



# EXPERIMENTELLE PHYSIK 4 MOLEKÜL-, FESTKÖRPER-, KERN- UND TEILCHENPHYSIK

82 — LEHRAMT FÜR GYMNASIEN —

— NUR FÜR DEN UNIVERSITÄTSINTERNEN GEBRAUCH —

Michael Himpel  
Universität Greifswald  
<https://physik.uni-greifswald.de/lehramt-exphy/>  
[himpel@physik.uni-greifswald.de](mailto:himpel@physik.uni-greifswald.de)

126

82

50

28

14

6

6

14

28

50

82

- $\beta^+$
- $\beta^-$
- $\alpha$
- Fission
- Proton
- Neutron
- Stable Nu
- Unknown



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1	Vorwort	9
2	Zielgruppen	9
<b>II</b>	<b>Mehrelektronensysteme</b>	<b>11</b>
3	Das Helium-Atom	13
4	Symmetrie der Wellenfunktion	14
5	Pauli-Prinzip	16
5.1	Supraleitung	17
5.2	Suprafluidität	17
6	Wellenfunktion mit Spin	18
7	Periodensystem der Elemente	18
8	Elektronenkonfigurationen	21
8.0.1	L-S-Kopplung	22
8.0.2	j-j-Kopplung	23
9	Besetzung der Helium-Zustände	24
10	Röntgenspektroskopie	25
<b>III</b>	<b>LASER</b>	<b>27</b>
11	Aufbau und Funktionsweise	29
12	Drei-Niveau-System (Rubin-LASER)	30
13	Anwendungen in der Praxis	32
13.1	Entfernungsmessung mit Lasern	33
13.2	Glasfaser als Lichtleiter	33
14	LASER-Sicherheit	34
<b>IV</b>	<b>Moleküle</b>	<b>37</b>
15	Wasserstoff als Molekülion $H_2^+$	39
15.1	Energieniveaus im Molekülion $H_2^+$	41
16	Wasserstoff-Molekül	41
17	Elektronische Zustände von Molekülen	43

<b>18 Chemische Bindungen</b>	<b>44</b>
18.1 Kovalente Bindung	44
18.2 Bindung im Fernfeld	45
18.2.1 Ionen-Ionen-Wechselwirkung	45
18.2.2 Ionen-Neutral-Wechselwirkung	45
18.2.3 Dipol-Dipol-Wechselwirkung	45
18.2.4 Van-der-Waals Wechselwirkung	45
18.2.5 Wasserstoff-Brückenbindung	46
<b>19 Rotation und Schwingung</b>	<b>46</b>
19.1 Rotation	46
19.2 Schwingung	47
<b>V Festkörper</b>	<b>49</b>
<b>20 Gitterstrukturen</b>	<b>51</b>
20.1 Translationsgitter	51
20.2 Bravais-Gitter	52
20.2.1 Rechtwinklige Gitter, ( $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )	52
20.2.2 Hexagonale Gitter, Kugelpackung	53
<b>21 Elektrische Leitfähigkeit - Klassische Variante</b>	<b>54</b>
21.1 Drude-Modell	54
<b>22 Elektrische Leitfähigkeit - Korrektur durch Quanteneffekte</b>	<b>56</b>
22.1 Elektronengas	56
22.2 Die Fermi-Energie	57
<b>23 Bändermodell</b>	<b>60</b>
23.1 Blochfunktionen	60
23.2 Bandstrukturen	61
<b>VI Kernphysik</b>	<b>63</b>
<b>24 Instabile Kerne und Radioaktivität</b>	<b>65</b>
24.1 Zerfallsgesetz	65
24.2 Halbwertszeit und mittlere Lebensdauer	66
<b>25 Strahlungsarten (<math>\alpha, \beta, \gamma</math>)</b>	<b>67</b>
25.1 $\alpha$ -Zerfall	67
25.2 $\beta$ -Zerfall	68
25.2.1 Neutrinohypothese	69
25.3 $\gamma$ -Zerfall	70
25.3.1 Konversion	70
25.4 Wann zerfällt ein Atomkern?	70
<b>26 Messmethoden in der Kernphysik</b>	<b>70</b>
26.1 Linearbeschleuniger	71
26.2 Hochfrequenzbeschleuniger	72
26.3 Zyklotron	73
26.4 Synchrotron	73
<b>27 Detektoren für atomare Strahlung</b>	<b>75</b>

<b>28 Schulversuche im Fachbereich Kernphysik</b>	<b>76</b>
<b>29 Aufbau der Atomkerne</b>	<b>76</b>
29.1 Kernbestandteile	76
29.2 Bindungsenergien der Nukleonen	76
29.3 Nukleonenstruktur im Kern	78
<b>30 Tröpfchenmodell</b>	<b>78</b>
<b>31 Kernreaktionen</b>	<b>80</b>
31.1 Inelastische Streuung mit Kernanregung	81
31.2 Reaktive Streuung	81
31.3 Stoßinduzierte Kernspaltung	82
31.4 Erhaltungssätze für Reaktionsgleichungen	82
<b>32 Altersbestimmung</b>	<b>83</b>
<b>33 Kernspaltung</b>	<b>84</b>
<b>34 Kernreaktoren</b>	<b>85</b>
34.1 Anreicherung	85
34.2 Aufbau und Funktion eines Kernreaktors	86
34.2.1 Reaktorkern	86
34.2.2 Reaktoraufbau	86
34.2.3 Steuerung eines Kernreaktors	87
34.2.4 Kontrolle der Kettenreaktion	88
34.2.5 Kontrolle der Wärmeabfuhr	89
34.2.6 Strahlenschutz	89
<b>35 Kernfusion</b>	<b>89</b>
<b>36 Kontrollierte Kernfusion</b>	<b>90</b>
36.1 Magnetischer Einschluss	91
36.1.1 TOKAMAK	91
36.1.2 Stellarator	92
36.1.3 Z-Pinch	93
36.2 Trägheitsfusion	93
<b>VII Teilchenphysik</b>	<b>95</b>
<b>37 Allgemeines zum Standardmodell</b>	<b>97</b>
<b>38 Teilchen und Antiteilchen</b>	<b>98</b>
38.1 Gibt es natürlich vorkommende Antiteilchen?	99
<b>39 Leptonen und Hadronen</b>	<b>100</b>
39.1 Leptonen – eine Familienangelegenheit	100
39.2 Hadronen	100
39.3 Erhaltung der Ladung	101
39.4 Drehimpulserhaltung	102
39.5 Energie/Massenbilanz	102
39.6 Leptonenzahl	103
39.7 Baryonenzahl	104
39.8 Strangeness	104

39.9 Quarks als Grundbausteine der Materie	105
<b>40 Austauschteilchen und Grundkräfte der Physik</b>	<b>107</b>
40.1 Elektromagnetische Wechselwirkung	107
40.2 Starke Wechselwirkung	108
40.3 Schwache Wechselwirkung	109
40.4 Gravitation	110
40.5 Feynman-Graphen	111
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>113</b>



# INHALTSVERZEICHNIS

# Einleitung

ABSCHNITT 1

## Vorwort

---

Dieses Buch enthält die wesentlichen Inhalte der Vorlesung über Experimentelle Physik 4 (Molekül-, Kern- und Teilchenphysik) für das Lehramt Physik, wie sie an der Universität Greifswald stattfindet. Ich gebe mir dabei Mühe, die Rechenwege so ausführlich wie möglich darzustellen. Die Rechnungen sollten also für alle mit den Mathematikwissen aus den Einführungsveranstaltungen nachvollziehbar sein. Das Verständnis der Schrödingergleichung und deren Lösung für das Wasserstoffatom wird vorausgesetzt.

Rötlich hervorgehobene Textbereiche stellen Ergänzungen, Zahlenbeispiele oder praktische Anwendungen des Lehrstoffes dar. Es wird auch teilweise auf mögliche Demonstrationsexperimente verwiesen.

Blaue Textbereiche enthalten zentrale Aussagen oder Definitionen, die unbedingt bekannt sein sollen.

Dieses Skript unterliegt ständiger Weiterentwicklung und Anpassung. Ich freue mich sehr über Meldungen von Rechen- oder Rechtschreibfehlern an mich!

ABSCHNITT 2

## Zielgruppen

---

Dieses Buch richtet sich an StudentInnen des Studienganges Lehramt Physik. Das Zweitfach Mathematik bietet die meisten symbiotischen Effekte, aber ich gehe beim Mathematischen Vorwissen nicht von dieser Zweitfachwahl aus.

Herzlicher Dank geht an Jeff C. Jensen, Edward A. Lee und Sanjit A., deren  $\text{\LaTeX}$ -Layout ich als Grundlage für dieses Skript nutze. Das Titelbild stammt von Wikipedia Commons (User: Napy1kenobi und Sjlegg)

TEIL

I

1. Vorwort
2. Zielgruppen







# Mehrelektronensysteme

In diesem Abschnitt sollen nun Atome mit mehr als einem Elektron betrachtet werden. Bisher mussten wir für das Wasserstoffatom nur die elektrostatischen Wechselwirkungen von positivem Kern und negativ geladenem Elektron berücksichtigen. Nun verkompliziert sich die Situation, da zusätzlich die Elektronen untereinander eine Coulomb-Wechselwirkung aufweisen. Außerdem kommt ein neuer Gedanke hinzu: Elektronen werden als ununterscheidbare Teilchen modelliert, dies führt erstmals auch auf fundamentale Symmetrieprinzipien.

## ABSCHNITT 3

### Das Helium-Atom

Der erste und am einfachsten zu beschreibende Kandidat für ein Zwei-Elektronen-System ist das Helium-Atom. Der Heliumkern besteht dabei aus einem 2-fach positiv geladenen Kern mit einer Masse von etwa  $4m_H$  und zwei Elektronen (siehe Abb. 1). Wir suchen also bei der Lösung der Schrödingergleichung nach einer Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , die den Zustand beider Elektronen beschreibt.

Die potentielle Energie für diese Wellenfunktion, wie sie in die Schrödingergleichung eingesetzt werden müsste, lautet

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right), \quad (3.1)$$

wobei  $r_{12}$  den Abstand der Elektronen untereinander kennzeichnet. Abb. 2 zeigt die Definition der Größen auch grafisch.

Der letzte Term im Potential von Gl. 3.1 führt leider dazu, dass der bisher so erfolgreiche Produktansatz  $\psi = R_{n,l}(r) \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  nicht mehr möglich ist. Damit ist die Schrödingergleichung schon für ein so "kleines" Atom wie Helium nicht mehr analytisch lösbar. Was wir also brauchen, ist eine Vereinfachung des Problems um dennoch zu nützlichen Aussagen zu kommen. Auf der Hand liegt die simpelste Möglichkeit, die leider zugleich zu den schlechtesten Ergebnissen führt. Diese Näherung berücksichtigt den gegenseitigen Einfluss der Elektronen schlichtweg nicht. Es gelte also  $r_{12} \gg r_1, r_{12} \gg r_2$ , womit dann der  $1/r_{12}$ -Term gegenüber den anderen in Gl. 3.1 vernachlässigt wird. Dies hat nun den Vorteil, dass die Wellenfunktionen für Elektron 1 und Elektron 2 nicht mehr miteinander in Verbindung stehen – daher kann man ganz einfach für jedes Elektron selbst die Schrödingergleichung lösen mit der Kernladung  $Z = 2$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_1(\vec{r}_1) - \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} \psi_1(\vec{r}_1) = E_1 \psi_1(\vec{r}_1) \quad (3.2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_2(\vec{r}_2) - \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} \psi_2(\vec{r}_2) = E_2 \psi_2(\vec{r}_2) \quad (3.3)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind natürlich wieder die bekannten Wasserstoff-Wellenfunktionen, wobei diesmal immer  $Z = 2$  gilt. Die Gesamtenergie  $E_{\text{He}}$  des Helium-Atoms wird somit zur Summe der beiden Elektronenenergien  $E_{\text{He}} = E_1 + E_2 = -2 \cdot Z^2 E_H = -108.8 \text{ eV}$ . Dieses Ergebnis weicht allerdings stark von der experimentell gemessenen Ionisationsenergie von  $78.9 \text{ eV}$  ab.

Der Einfluss der gegenseitigen Wechselwirkung ist also offenbar doch von Bedeutung. Die nächstbeste Näherungsmöglichkeit ist die Folgende: Man setzt für je-

3. Helium
  4. Sym. Wellenfunktionen
  5. Pauli-Prinzip
  6. Wfkt. mit Spin
  7. Periodensystem
  8. e-Konfigurationen
- 
9. Helium-Zustände
  10. Röntgenspektroskopie

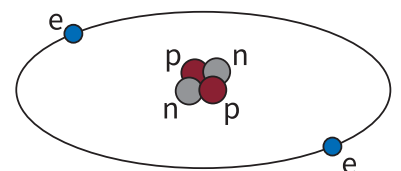


Abb. 1. Ein Helium-Atom besteht aus 2 Protonen, 2 Neutronen und 2 Elektronen.

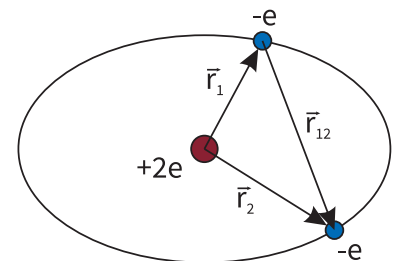


Abb. 2. Zur Definition der Abstände beim Helium-Atom.

des Elektron jeweils das elektrische Feld des anderen Elektrons (1s-Zustand aus der Wasserstoff-Lösung) als fixiertes Umgebungspotential an. Dessen elektrische Ladungsdichte  $\rho_{el}$  ist dann über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch  $\rho_{el} = e \cdot |\psi_2|^2$  zu bestimmen. Dann nimmt das Potential die Form

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z}{r_1} - \int \frac{\psi^* \psi}{r_{12}} dV \right) \quad (3.4)$$

an. Setzt man nun für  $\psi$  die konkrete 1s-Wellenfunktion ein, führt das zu

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z}{r_1} - 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \int \frac{e^{-2Z\frac{r_2}{a_0}}}{r_{12}} dV_2 \right) \quad (3.5)$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z-1}{r_1} + \left( \frac{Z}{a_0} + \frac{1}{r_1} \right) e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} \right) \quad (3.6)$$

Einsetzen der Zahlenwerte führt zu einer Energie von  $E_{\text{He}} \approx 78 \text{ eV}$ , was schon ziemlich nahe am experimentellen Wert von  $E_{\text{He,exp}} \approx 78.8 \text{ eV}$  liegt.

#### ABSCHNITT 4

## Symmetrie der Wellenfunktion

Nun betrachten wir die eigentliche Wellenfunktion, ohne uns auf ein konkretes Potential festzulegen. Es soll ein System aus 2 Elektronen im Zustand  $a = (n_1, l_1, m_{l1}, m_{s1})$  und  $b = (n_2, l_2, m_{l2}, m_{s2})$  vorliegen. Die Gesamtwellenfunktion soll wieder als Produkt gemäß

$$\psi_{\text{ges}} = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) \quad (4.1)$$

darstellbar sein. Nun aber rückt ein neues Problem in den Fokus: Die Ununterscheidbarkeit der Elektronen. Die beiden Elektronen mit den Wellenfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sind nicht unterscheidbar. Man kann also unmöglich entscheiden, ob nun  $\psi = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b)$  oder doch  $\psi = \psi_2(a) \cdot \psi_1(b)$  vorliegt. Wir müssen dafür sorgen, dass bei einer mathematischen Beschreibung die physikalische Aussage, die durch die Wellenfunktion am Ende getroffen wird, NICHT von dieser Vertauschung beeinflusst wird. Damit  $\psi$  also für physikalisch sinnvolle Aussagen genutzt werden kann, muss die Wahrscheinlichkeitsdichte – nur diese führt zu “echten” physikalischen Aussagen, die komplexe Wellenfunktion selbst strenggenommen noch nicht – von der Vertauschung der Elektronen unberührt bleiben. Dies führt zu der Forderung

$$|\psi_1| = |\psi_2|$$

und daraus folgt, dass  $\psi_1 = \pm\psi_2$  sein muss – dies ist aber durch Gl. 4.1 nicht sichergestellt. Der bis jetzt stets erfolgreiche Produktansatz zur Kombination zweier Funktionsteile ist also diesmal gescheitert. Man kann aber durch Linearkombination aus zwei Produkten die o.g. Bedingung erfüllen:

$$\psi^s = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) + \psi_2(a) \cdot \psi_1(b) \quad (4.2)$$

$$\psi^a = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) - \psi_2(a) \cdot \psi_1(b) \quad (4.3)$$

Die Kombination  $\psi^s$  nennt man *symmetrische Wellenfunktion* und  $\psi^a$  nennt man *antisymmetrische Wellenfunktion*.

Wir zeigen nun, dass Gl. 4.2 sich tatsächlich symmetrisch bei Vertauschung verhält. Die “nicht vertauschte” Wellenfunktion heißt dann

$$\psi_I = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) + \psi_2(a) \cdot \psi_1(b)$$

und wenn man  $\psi_1$  und  $\psi_2$  vertauscht erhält man

$$\psi_{II} = \psi_2(a) \cdot \psi_1(b) + \psi_1(a) \cdot \psi_2(b).$$

Beim Vergleich der beiden sieht man direkt symmetrische Beziehung von  $\psi_I = +\psi_{II}$  durch Umordnung der Summanden.

Wir zeigen nun, dass Gl. 4.3 sich tatsächlich antisymmetrisch bei Vertauschung verhält. Die “nicht vertauschte” Wellenfunktion heißt dann

$$\psi_I = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) - \psi_2(a) \cdot \psi_1(b)$$

und die “vertauschte” Wellenfunktion lautet

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= \psi_2(a) \cdot \psi_1(b) - \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) \\ &= -(\psi_1(a) \cdot \psi_2(b) - \psi_2(a) \cdot \psi_1(b)). \end{aligned}$$

Beim Vergleich der beiden sieht man direkt die antisymmetrische Beziehung von  $\psi_I = -\psi_{II}$  durch Umordnung der Summanden.

Die Motivation, die hinter der Formulierung der Wellenfunktion als symmetrisch oder antisymmetrisch steckt, ist bisher noch nicht konkret formuliert worden. Später werden wir sehen, dass diese Betrachtung notwendig ist um gewisse experimentelle Beobachtungen erklären zu können. Eine Folge aus der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Kombination (Gl. 4.2/4.3) von  $\psi_1$  und  $\psi_2$  offenbart sich, wenn wir folgendes Gedankenexperiment betrachten:

Wir nehmen an, dass sich die 2 Elektronen unseres Helium-Atoms im gleichen Zustand  $a$  befinden, also  $\psi_1 = \psi_1(a)$  und  $\psi_2 = \psi_2(a)$ . Es sollen also alle Quantenzahlen übereinstimmen und die Wellenfunktionen damit identisch sein. Daraus folgt für die antisymmetrische Kombination:

$$\psi^a = \psi_1(a)\psi_2(a) - \psi_1(a)\psi_2(a) = 0$$

Dementsprechend ist also auch die Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\psi^a|^2$  überall gleich Null. Die Wahrscheinlichkeit, die beiden Elektronen mit dieser antisymmetrischen Kombination der Wellenfunktionen zu finden ist bei gleichen Zuständen also Null. Im Gegensatz dazu lautet die symmetrische Kombination bei identischen Zuständen

$$\psi^s = \psi_1(a)\psi_2(a) + \psi_1(a)\psi_2(a) = 2 \cdot \psi_1(a)\psi_2(a).$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\psi^s|^2$  ist ungleich Null und kann also real existieren. Die Schlussfolgerung aus diesem Gedankenspiel lautet: Ein System aus 2 Elektronen könnte beschrieben werden durch:

- Eine antisymmetrische Wellenfunktion, dann dürfen die Zustände der beiden Elektronen aber nicht identisch sein.
- Eine symmetrische Wellenfunktion, dann sind alle Zustände realisierbar.

Experimentell zeigt sich allerdings, dass stets nur die antisymmetrische Kombination vorliegt. Mehrelektronensysteme werden demnach immer durch eine antisymmetrische Wellenfunktion beschrieben.

Nun stellt sich die Frage, ob man solche Aussagen auch für andere Elementarteilchen treffen kann. Ja – man kann. Die Eigenschaft, ob Teilchensysteme jeweils mit symmetrischer oder antisymmetrischer Wellenfunktion beschrieben werden müssen, dient sogar als grundlegendes Gruppierungsmerkmal. Die folgende Tabelle zeigt die Aufteilung der Elementarteilchen in Fermionen (kombinieren sich antisymmetrisch) und Bosonen (kombinieren sich symmetrisch):

<b>Fermionen (antisym.)</b> Spin = halbzahlig	<b>Bosonen (sym.)</b> Spin = ganzzahlig
Leptonen (“leicht”): $e, \mu, \tau$ $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	Mesonen: $\pi, K, W$
Baryonen (“schwer”): $n, p$	Photonen: $\gamma$

Gemäß dieser Tabelle werden also alle “materiellen” Teilchen durch antisymmetrische Wellenfunktionen beschrieben, die Bosonen werden durch symmetrische Wellenfunktionen beschrieben. Auf die Teilchenarten wird später im Teil “Teilchenphysik” noch näher eingegangen.

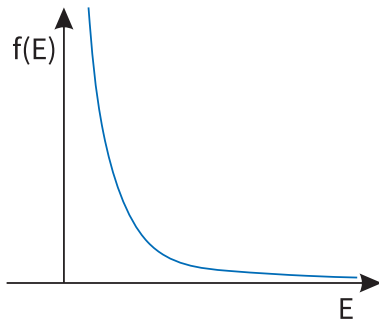
ABSCHNITT 5

## Pauli-Prinzip

Es wird nun untersucht, welche Auswirkung die Feststellung “Elektronen = Antisymmetrisch” auf die Besetzung der Energieniveaus im Atom hat. Da wir gesehen haben, dass 2 Elektronen im gleichen Zustand nicht existieren können, folgt daraus also ebenfalls dass ein Elektron mit seinen spezifischen Quantenzahlen  $n, l, m_l, m_s$  nur einmal pro Atom existieren kann.

$n_1 = n_2 = 1$	
$l_1 = l_2 = 0$	
$m_{l1} = m_{l2} = 0$	
$s_{z1} = s_{z2}$	nicht erlaubt!
$s_{z1} \uparrow, s_{z2} \downarrow$	erlaubt!
$s_{z1} \downarrow, s_{z2} \uparrow$	erlaubt!

**Tab. 1.** Erlaubte und nicht erlaubte Quantenzahlen gemäß Pauli-Prinzip im 1s-Zustand.



**Abb. 3.** Besetzungsverteilung für Bosonen.

### Pauli-Prinzip

Elektronen werden durch eine antisymmetrische Wellenfunktion beschrieben.

äquivalent zu:

Ein Zustand, der durch  $n, l, m_l, m_s$  charakterisiert ist, kann nur durch ein Elektron besetzt werden.

Dieser spezielle Zustand kann also nur von jeweils einem Elektron besetzt werden. In Tab. 1 ist dies verdeutlicht: Wenn sich die beiden Elektronen in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden (hier  $m_s$ ), können sie gemeinsam im Atomverbund existieren. Wenn sie in allen Quantenzahlen übereinstimmen, ist dieser gemeinsame Zustand nicht möglich. Bosonen dagegen können durch ihre symmetrische Wellenfunktion problemlos mit identischen Zuständen co-existieren. Für diesen letzten Fall, bedeutet das: Jedes Boson befindet sich im günstigsten (niedrigsten) Energiezustand. Durch eine von Null verschiedene Temperatur befinden sich jedoch einige Bosonen statistisch verteilt in höheren Energiezuständen. Diese Verteilung

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}$$

nennt man *Bose-Einstein-Statistik*. Der qualitative Verlauf dieser Verteilung ist als blaue Linie in Abb. 3 gezeigt. Ein System aus Bosonen strebt also immer zu einer Häufung von Teilchen im niedrigst möglichen Energiezustand.

Exkurs: Bose-Einstein-Kondensat:

Ein aktueller Forschungsgegenstand ist das sogenannte Bose-Einstein-Kondensat. Dieses erhält man, indem ein System aus Bosonen sehr nahe an den absoluten Temperaturnullpunkt gebracht wird. Dies hat zur Folge, dass die allermeisten (bzw. alle) Teilchen des Systems sich gemäß Abb. 3 im Ruhezustand  $E_0$  befinden. Diese Teilchen können dann durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben werden – es handelt sich quasi um ein makroskopisches Objekt mit quantenphysikalischen Eigenschaften. Dies kann z.B. Supraleitung und Suprafluidität sein.

Bei den Fermionen ergibt sich ein anderes Bild. Die Fermionen besetzen natürlich auch den jeweils günstigsten/niedrigsten Energiezustand, aber nur solange dieser noch nicht bereits durch ein anderes Fermion eingenommen wurde. Diesbezüglich gibt es auch die bildliche Vorstellung des Fermi-Sees: Der See wird mit Teilchen angefüllt und die Füllhöhe ergibt sich dann aus der Dichte der möglichen Zustände und der Teilchenanzahl. Die höchste Energie, bis zu der die Zustände bei gegebener Teilchenzahl also gefüllt werden müssen, nennt man *Fermi-Energie*  $E_F$ . Bei zunehmender Temperatur  $T > 0$  wird die Verteilung

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T}} + 1} \quad (5.1)$$

sich dann um die Kante bei  $E = E_F$  etwas “aufweichen”, wie die rote Linie in Abb. 4 zeigt. Einige Teilchen befinden sich durch thermische Anregung also in höheren als dem minimal möglichen Energiezustand. Dieses Verhalten von Elektronen (Fermionen), hat eine große Bedeutung in der Praxis. Für die Elektronen in einem Festkörper gilt auch das Pauli-Prinzip. Die Fermienergie  $E_F$  ist hierbei sehr eng mit dem Auftreten von elektrischer Leitfähigkeit in Metallen verknüpft.

#### ABSCHNITT 5.1

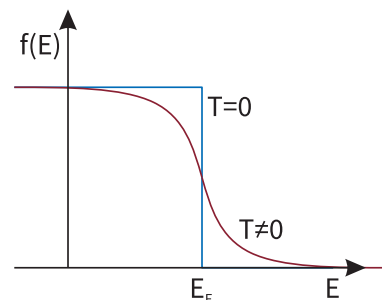
### Supraleitung

Supraleitung ist die Eigenschaft von Festkörpern, elektrischen Strom ohne jeglichen Widerstand zu leiten. Wir haben gesehen, dass man diesen Zustand durch das Abkühlen von Bosonen auf den absoluten Nullpunkt erreichen kann. Für elektrischen Strom sollen aber die Elektronen (Fermionen!) als Ladungsträger alle auf den Grundzustand zurückgesetzt werden. Dies ist gemäß Pauli-Prinzip nicht möglich. Durch einen Trick erreicht man trotzdem die technische Realisierung dieses Zustandes: Man kann erreichen, dass 2 Elektronen ( $\uparrow\downarrow$ ) zu einem “Cooper-Paar” koppeln. Dieses Objekt aus 2 Elektronen besitzt den Spin = 0 und gehorcht damit der Bose-Einstein-Statistik. Durch ein Abkühlen dieses Materials gehen nun die Cooper-Paare über in den Zustand eines Bose-Einstein-Kondensates und zeigen supraleitendes Verhalten.

#### ABSCHNITT 5.2

### Suprafluidität

Der Effekt der Suprafluidität kann beobachtet werden, wenn man Helium auf eine Temperatur von  $T < 2.17\text{ K}$  abkühlt. Die Suprafluidität äußert sich u.a. durch eine Viskosität von  $\eta = 0$  und eine Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda = \infty$ . Ein spannender Effekt ist das sogenannte Helium-Kriechen. Dabei ist die Kohäsionskraft an einer Gefäßwand größer als die Gravitationskraft auf die Heliumatome. Durch das Fehlen einer Viskosität kriecht also suprafluides Helium aus einer Schale selbstständig über den Rand hinaus und tropft ab.



**Abb. 4.** Besetzungsverteilung für Fermionen mit der Fermi-Energie  $E_F$ .

## Wellenfunktion mit Spin

Wir stehen durch das Pauli-Prinzip der Forderung nach einer antisymmetrischen Wellenfunktion für das Elektron gegenüber. Wir wollen dies nun auch noch der Vollständigkeit halber für Wellenfunktionen mit Spin-Teil  $\mathcal{X}^1$  auch für ein System aus 2 Elektronen betrachten. Die Gesamtwellenfunktion  $\psi = \psi^{\text{Ort}} \cdot \psi^{\text{Spin}}$  für beide Elektronen setzt sich nun also zusammen aus der sogenannten Ortswellenfunktion  $\psi^{\text{Ort}}(n_1, l_1, m_{l1}, n_2, l_2, m_{l2})$  und der Spinwellenfunktion  $\psi^{\text{Spin}}(m_{s1}, m_{s2})$ . Das Pauli-Prinzip besagt nun, dass diese Gesamtwellenfunktion  $\psi$  antisymmetrisch bzgl. der Vertauschung der beiden Elektronen sein. Sowohl die einzelnen Ortswellenfunktionen, als auch die Spinwellenfunktionen können symmetrisch oder antisymmetrisch sein. Es sind also die folgenden Kombinationen möglich:

- $\psi_{\text{sym}}^{\text{Ort}} \cdot \psi_{\text{antisym}}^{\text{Spin}} = \psi_{\text{antisym}}$   
Diese Gesamtwellenfunktion ist antisymmetrisch und damit erlaubt für die Beschreibung von 2 Elektronen. Die Spins sind gegensätzlich gerichtet ( $\uparrow\downarrow$  oder  $\downarrow\uparrow$ ) und die Ortswellenfunktion weist einen großen Überlapp auf.
- $\psi_{\text{antisym}}^{\text{Ort}} \cdot \psi_{\text{sym}}^{\text{Spin}} = \psi_{\text{antisym}}$   
Diese Gesamtwellenfunktion ist antisymmetrisch und damit erlaubt für die Beschreibung von 2 Elektronen. Die Spins sind gleichgerichtet ( $\uparrow\uparrow$  oder  $\downarrow\downarrow$ ) und die Ortswellenfunktion weist einen kleinen Überlapp auf.<sup>2</sup>
- $\psi_{\text{sym}}^{\text{Ort}} \cdot \psi_{\text{sym}}^{\text{Spin}} = \psi_{\text{sym}}$   
Hier ist die Gesamtwellenfunktion symmetrisch, verstößt also gegen das Pauli-Prinzip und kann nicht das 2-Elektronen System beschreiben. Beide Elektronen besitzen hier die gleichen Quantenzahlen und halten sich in überlappenden Orbitalen auf.
- $\psi_{\text{antisym}}^{\text{Ort}} \cdot \psi_{\text{antisym}}^{\text{Spin}} = \psi_{\text{sym}}$   
Diese Wellenfunktion ist durch das Pauli-Prinzip für Elektronen verboten.

<sup>1</sup> ...siehe Ex-Phy 3 Teil zum Wasserstoffatom

<sup>2</sup> Gewissermaßen sind also die Quantenzahlen alle gleich, dafür sind die Elektronen stets an verschiedenen Orten. Das ist für die Einhaltung des Pauli-Prinzips auch zureichend.

## Periodensystem der Elemente

Das Periodensystem der Elemente wurde 1868 von Mendelejew (parallel und unabh. von Meyer) entwickelt. Die Quantenphysik zur Beschreibung der Atome und Elektronen stand also noch nicht zur Verfügung. Damals wurde das Periodensystem noch eingeführt um die Elemente nach Atomgewicht (Spalten) und chemischen Eigenschaften (Zeilen) zu ordnen. Aus heutiger Sicht werden die chemischen Eigenschaften durch die Elektronen in der äußeren Hülle der Atome bestimmt. Demnach kann man nun mit Erkenntnissen der Quantenphysik das Periodensystem wie folgt beschreiben:

- Die Zeile<sup>3</sup>, in der ein Element aufgeführt ist, ist abhängig von der Hauptquantenzahl  $n$  der äußersten Elektronenhülle.
- Die Spalten werden als "Gruppe" bezeichnet und durchnummeriert.
- die Hauptgruppen 1-8 entsprechen dem Auffüllen der s- und p-Zustände durch Elektronen.
- Bei komplett gefüllter Schale wird eine neue Zeile begonnen.

<sup>3</sup> Manchmal auch "Periode" genannt

Aus der Gruppe eines Elements kann man außerdem direkt wichtige chemischen Eigenschaften ableiten. So werden alle Atome in der 1. Gruppe Alkali-Atome genannt wegen ihres chemisch-alkalischen Verhaltens. Elemente in der 8. Gruppe sind die Edelgase. Die äußeren Elektronenschalen (s+p) sind bei diesen Atomen voll besetzt und daher verhält sich dieses Element chemisch besonders stabil. Elemente in der 7. Gruppe sind dagegen besonders reaktiv - es fehlt nur noch ein Elektron bis zu einer energetisch besonders günstigen vollen Schale. Die Elemente dieser Gruppe nennt man auch Halogenoide. In Abbildung 5 ist ein typischer Eintrag eines Periodensystems gezeigt. Zentral ist die Atombezeichnung gezeigt, in der linken oberen Ecke die Ordnungszahl. Die Ordnungszahl entspricht außerdem der Anzahl der Protonen im jeweiligen Kern. Das Atomgewicht ist in der Einheit  $1u \approx 1.66 \cdot 10^{-27}$  kg angegeben. Manchmal ist auch die Elektronegativität, die Massendichte bei  $20^\circ\text{C}$  und der Trivialname angegeben.

Anhand des Periodensystems (Auszug in Abb. 6) kann man auch sehr gut die Mechanismen nachvollziehen, nach denen die jeweiligen Elektronenzustände "aufgefüllt" werden. Die Atome werden dabei schalenweise betrachtet. Die Besetzung der Niveaus erfolgt nun nach den folgenden *Hund'schen Regeln* mit absteigender Priorität:

Z	mass	1	1.0079
<b>Symbol</b>		<b>H</b>	
Name		Hydrogen	

Abb. 5. Typischer Eintrag im Periodensystem [1].

1. **Pauli-Prinzip:** jeder zu besetzende Zustand kann nur von einem Elektron besetzt werden. So sind zum Beispiel im 1s-Niveau genau 2 Elektronen möglich:  $(n_1 = 1, l_1 = 0, m_{l1} = 0, m_{s1} = -1/2)$  und  $(n_2 = 1, l_2 = 0, m_{l2} = 0, m_{s2} = +1/2)$

## 2. niedrigster Energiezustand:

- Die Gesamtenergie des Zustandes muss minimal sein. Daraus kann man ableiten, dass die Schalen für  $n = 1$  und  $n = 2$  sukzessiv aufgefüllt werden.<sup>4</sup>
- jede Schale umfasst  $2n^2$  Elektronen
- Die Schalen werden mit Buchstaben bezeichnet:

	K	L	M	N	O
n=	1	2	3	4	5
$\Sigma e^-$	2	8	18	32	50

## 3. Gesamtspin $\vec{S}$ maximal:

Die antisymmetrische Ortswellenfunktion (und dann symmetrische Spinwellenfunktion mit  $\uparrow\uparrow$ ) ist energetisch am günstigsten.

## 4. Gefüllte Schalen haben $\vec{L} = 0$ und $\vec{S} = 0$ :<sup>5</sup>

Für die Besetzung der nächsten Schalen zählen die Hund'schen Regeln dann nur für die noch nicht vollständig gefüllten Schalen.

## 5. Komponente $\vec{L}_z$ ist maximal:

Das ist energetisch am günstigsten, nachdem schon die Spins maximiert wurden.

<sup>4</sup> Bei den höheren Schalen ist es leider komplizierter.

<sup>5</sup> Großbuchstaben kennzeichnen hier immer die Summen aus den Einzeldrehimpulsen: z.B.  $\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$



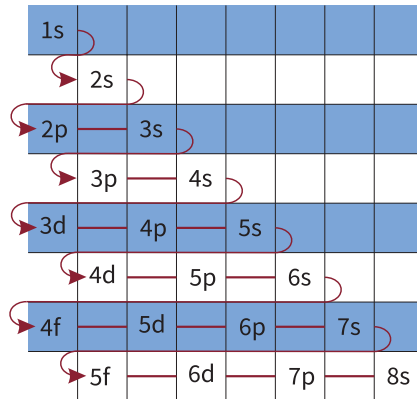


Abb. 7. Merkschema zur Besetzung der elektronischen Zustände.

ABSCHNITT 8

## Elektronenkonfigurationen

Wir haben also in Form der Hundschen Regeln gesehen, dass es viel zu beachten gibt um zu entscheiden, welche Quantenzahlen die Elektronen in einem gegebenen Atom einnehmen. Wir werden hier nun noch etwas mehr auf die Konfigurationen im Detail eingehen.

Zur Wiederholung: Welche Kräfte sind überhaupt verantwortlich für die Auswahl des günstigsten Zustandes?

- Die Coulombkraft zwischen dem jeweiligen Elektron und dem Atomkern
- Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander
- die magnetische Wechselwirkungen der Dipolmomente (Bahndrehimpulse, Elektronenspins). Dies führt wie beim Wasserstoffatom auch bei größeren Atomen zur Aufspaltung in Feinstrukturturniveaus.

Die Benennung der schlussendlichen Konfiguration erfolgt beispielsweise als

$$1s^2 2s 2p$$

Der Exponent beschreibt hierbei die Anzahl der Elektronen im bezeichneten Zustand. Es befinden sich also hier 2 Elektronen im 1s-Zustand. Außerdem noch eines im 2s- und eines im 2p-Zustand. Bei dieser Schreibweise ist es außerdem Konvention, dass man komplett besetzte Schalen weglassen kann. So schreibt man also statt  $1s^2 2s^2 2p^3$  auch verkürzend  $2s^2 2p^3$ . Für das sukzessive Auffüllen der Zustände ist außerdem das Merkschema in Abb. 7 sehr hilfreich. Man kann es leicht als Merkhilfe reproduzieren und sich dann das nächstfolgende Energieniveau herleiten.

Für mehrere (leichte) Atome sind in Abbildung 8 die Schalenbesetzungen gezeigt. Diese ergeben sich aus der Anwendung der Hundschen Regeln sowie aus dem Merkschema 7.

Für die Situation bei vielen Elektronen (statt nur 2 wie bisher) stellt sich außerdem eine weitere Verkomplizierung ein. Die Bahndrehimpulse und Spins der Elektronen können auf vielfältige Weise zu einem Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  kombiniert werden. Bei einem Elektron war es nur möglich durch  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  den Spin und den Bahndrehimpuls zu addieren. Je nach Wert der z-Komponenten gibt es dann nur einige

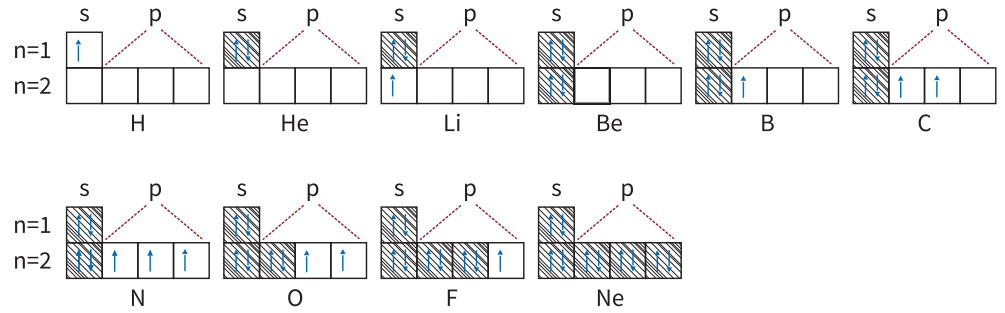


Abb. 8. Einige Beispielzustände für leichte Atome.

wenige Möglichkeiten diese Vektoraddition zu realisieren. Bei mehreren Elektronen ist es aber sehr unbequem alle diese Komponenten der einzelnen Drehimpulse zu berücksichtigen. Hier sollen nun die 2 häufigsten Näherungen vorgestellt werden, mit dem man die Bildung des Gesamtdrehimpulses vereinfacht.

### 8.0.1 L-S-Kopplung

Für dieses Modell der Kopplung addiert man zunächst alle Bahndrehimpulse  $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$  und alle Spins  $\vec{S} = \sum_i \vec{s}$  zu Gesamtbahndrehimpulsen und Gesamtspin. Dann nimmt man an, dass der Gesamtdrehimpuls die Summe dieser beiden ist:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (8.1)$$

mit den dazugehörigen Quantenzahlen  $S, L, J$ . Für die Beträge gilt dann wie für alle quantenmechanischen Drehimpulse

$$\begin{aligned} |\vec{L}|^2 &= L(L+1)\hbar^2 \\ |\vec{S}|^2 &= S(S+1)\hbar^2 \\ |\vec{J}|^2 &= J(J+1)\hbar^2 \end{aligned}$$

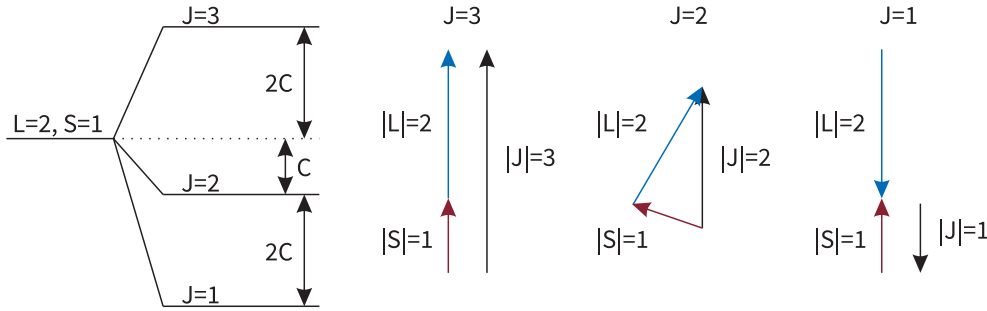
. Auf diese Weise ergibt sich wieder wie beim Wasserstoffatom eine Spin-Bahn-Kopplung (also Feinstrukturaufspaltung) gemäß

$$E_J = E(n, L, S) + C \cdot \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (8.2)$$

mit der Herleitung analog zur Spin-Bahn-Kopplung beim Wasserstoffatom findet man, dass

$$c \cdot \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} C \hbar^2 [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] \quad (8.3)$$

Wir schauen uns hierfür mal ein Beispiel an. Es sollen mehrere Elektronen die Gesamtdrehimpulsquantenzahl  $L = 2$  und die Gesamtspinquantenzahl  $S = 1$  haben. Dies könnte beispielsweise für ein 2 Elektronensystem mit  $l_1 = 2$  und  $l_2 = 0$  sowie  $s_1 = s_2 = 1/2$  gelten. Die Vektoren  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  sowie ihre möglichen Additionen sind im rechten Teil von Abb. 9 dargestellt. Aus den möglichen Orientierungen folgen die möglichen Quantenzahlen für den Gesamtdrehimpuls von  $J = 1, 2, 3$ . Dies ergibt sich



**Abb. 9.** Feinstruktur bei LS-Kopplung und mögliche Vektoradditionen von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$ .

auch nach den Gleichungen 8.2 und 8.3 wenn man die 3 verschiedenen  $J$  einsetzt:

$$\begin{aligned}
 E_J &= E(n, L, S) + \frac{C}{2} [J(J+1) - 8] \hbar^2 \\
 E_1 &= E(n, L, S) - 3C\hbar^2 \\
 E_2 &= E(n, L, S) - 1C\hbar^2 \\
 E_3 &= E(n, L, S) + 2C\hbar^2
 \end{aligned}$$

Diese Energieterme sind auch entsprechen mit den Abständen zueinander im linken Teil von Abb. 9 gezeigt. Da sich durch die LS-Kopplung 3 Energieniveaus ergeben spricht man hier auch von einer Triplet-Struktur.<sup>6</sup>

Die LS-Kopplung ist vor allem für leichte Atome mit geringer Kernladungszahl (ca. bis Kohlenstoff) die korrekte Beschreibung der Kopplung, wie man am Spektrum der Atome in Experimenten sehen kann. Dies zeigt sich dann gerade durch die relativ kleinen Abstände  $\Delta E = E_{J,\max} - E_{J,\min}$  im Spektrum im Vergleich zu den viel größeren Abständen der Energieniveaus verschiedener Quantenzahlen  $L$  und  $S$ . In der Spektrografie werden die Terme – analog zum Wasserstoffatom – durch die folgende Nomenklatur

$$n^{2S+1}L_J \quad (8.4)$$

bezeichnet. Dabei ist  $S = \sum_i s_i$  die Summe der Spinquantenzahlen. Die Multiplizität  $2S+1$  gibt dann die Anzahl der Feinstruktur-niveaus an. Die Summe der Bahndrehimpulse  $L$  wird dann mit dem jeweiligen Orbit bezeichnet, also etwa mit  $S$  für  $L=0$ , dann  $P, D$  usw. Im Oben betrachteten Beispiel würde man also die mittlere Linie in Abb. 9 mit  ${}^3D_2$  bezeichnen.

### 8.0.2 j-j-Kopplung

Die Variante der LS-Kopplung ist nicht zwingend, wird jedoch für leichte Elemente durch Experimente unterstützt. Für schwere Elemente scheitert dieses Modell jedoch. Durch hat sich gezeigt, dass die sogenannte j-j-Kopplung die Messdaten besser wiedergibt. Dafür nimmt man an, dass für jedes einzelne Elektron der individuelle Bahndrehimpuls und der individuelle Spin koppeln zum individuellen Gesamtdrehimpuls gemäß  $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$ . Schließlich sind es dann alle diese individuellen Gesamtdrehimpulse  $\vec{j}_i$  die zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$  koppeln.

Diese Art der Kopplung führt zu einer sehr unübersichtlichen Spektrum, mit sich überkreuzenden Energieniveaus. Diese Beschreibung ist aber korrekt für Atome mit großen Kernladungszahlen (z.B: Blei).

Für einige Atome, z.B. Germanium, ist es auch nur mit einer Mischung der LS und jj-Kopplung möglich, das Termschema korrekt zu modellieren.

<sup>6</sup> Auch möglich sind Singulett oder Multipllett-Zustände.

Spins im Zustand $n = 1$	Spins im Zustand $n = 2$	$m_{l2}$	LS-Kopplung $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$	Gesamt- drehimpuls $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$	Zustand
$\uparrow\downarrow$	—	—	$ \vec{S}  = 0,  \vec{L}  = 0$	$ \vec{J}  = 0$	$1^1S_0$
$\uparrow$	$\downarrow$	0	$ \vec{S}  = 0,  \vec{L}  = 0$	$ \vec{J}  = 0$	$2^1S_0$
$\uparrow$	$\uparrow$	0	$ \vec{S}  = 1,  \vec{L}  = 0$	$ \vec{J}  = 1$	$2^3S_1$
$\uparrow$	$\uparrow$	1	$ \vec{S}  = 1,  \vec{L}  = 1$	$ \vec{J}  = 2$	$2^3P_2$
$\downarrow$	$\downarrow$	1	$ \vec{S}  = 1,  \vec{L}  = 1$	$ \vec{J}  = 0$	$2^3P_0$
$\downarrow$	$\downarrow$	1	$ \vec{S}  = 1,  \vec{L}  = 1$	$ \vec{J}  = 1$	$2^3P_1$
$\uparrow$	$\uparrow$	1	$ \vec{S}  = 1,  \vec{L}  = 1$	$ \vec{J}  = 1$	$2^3P_1$

Tab. 2. Einige mögliche Zustände im Helium Atom. Drehimpulsbeträge in Einheiten von  $\hbar$ .

ABSCHNITT 9

## Besetzung der Helium-Zustände

Für die Betrachtungen zu den elektronischen Zuständen wird nun das Helium-Atom unser Beispiel sein. Wir haben es hierbei mit einem System aus 2 Elektronen und einem Atomkern mit Kernladungszahl  $Z = 2$  zu tun. Die Spins der beiden Elektronen können sich zum Gesamtspin  $S = 0$  ( $\uparrow\downarrow$  oder  $\downarrow\uparrow$ ) oder  $S = 1$  addieren. Die magnetischen Spinquantenzahlen führen nun einerseits zu einem Singulett-Zustand ( $S = 0$ ) und andererseits zu einem Triplett-Zustand ( $S = 1$ ) wie in Abbildung 10 gezeigt. Die schwarzen Pfeile zeigen dabei jeweils die Länge des aufsummierten Spins  $\vec{S}$ . Im oberen Fall addieren sich die entgegengesetzten Spins zu  $S = 0$ . Darunter ist das Resultat der Addition jetzt jeweils ein schwarzer Pfeil der Länge 1. Durch die verschiedenen Richtungen der Summanden kann jetzt aber der schwarze Pfeil (mit der fixen Länge 1) in verschiedene Richtungen zeigen. Es ist möglich, die  $z$ -Komponenten 1, -1 und 0 zu erzeugen wie im Bild gezeigt.

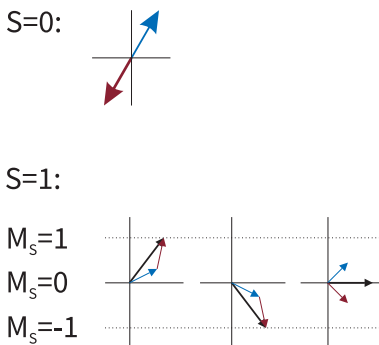


Abb. 10. Spinkombinationen im Helium-Atom.

Um den kompletten Zustand, inklusive Bahndrehimpuls, anzugeben muss man dann auch den Gesamtdrehimpuls ermitteln. Außerdem kann sich das Helium-Atom natürlich auch in angeregten Zuständen befinden – also nicht dem energetisch günstigsten. Eine Übersicht auch über einige mögliche angeregte Zustände ist in Tabelle 2 zu sehen. Der Grundzustand ist dabei ganz links gekennzeichnet durch antiparallele Spins, wobei sich auch beide Elektronen um Zustand  $n = 1$  und  $l = 0$  befinden können. Unter Nicht-Verwendung der Vektorschreibweise ist der Gesamtspin dadurch  $S = -1/2 + 1/2 = 0$  und der Gesamtbahndrehimpuls  $L = 0 + 0 = 0$ . Der Gesamtdrehimpuls kann dann nur  $J = L + S = 0$  sein. Vom ersten angeregten Zustand spricht man nun, wenn eines der beiden Elektronen die Hauptquantenzahl  $n = 2$  besetzt. Dann gibt es natürlich bei Wahrung des Pauli-Prinzips wieder die volle Auswahlmöglichkeit für die übrigen Quantenzahlen.

Wir wollen nun zur Übung 2 der in der Tabelle gezeigten Zustände noch im detail besprechen. Der Zustand  $2^3S_1$  wird durch folgende Quantenzahlen erzeugt: Beide Elektronen haben den gleichen Spin ( $s_1 = s_2 = +1/2$ ) und auch die gleichen Bahn-

drehimpulse ( $l_1 = l_2 = 0$ ). Damit muss also auch  $S = 1$  und  $L = 0$  sowie  $J = 1$  folgen. Der höchste Besetzte Zustand/Hauptquantenzahl ist hierbei  $n = 2$ . Dementsprechend ergibt sich die 2 vor dem Term. Die Multiplizität ist  $2S + 1 = 3$ . Der Gesamtdrehimpuls ist  $L = 0$  und dies entspricht dem Orbitalnamen  $S$ . So folgt also die Termbezeichnung  $2^3S_1$ .

Wir können hier auch einen Triplett-Zustand konstruieren. Wenn das zweite Elektron<sup>7</sup> die Bahndrehimpulsquantenzahl  $l_2 = 1$  aufweist, dann ergeben sich analog zu Abbildung 10 3 Möglichkeiten, die magnetische Spinquantenzahl  $m_{l2} = -1, 0, 1$  zu wählen. Damit folgen die Vektoradditionen der 3 rechten Spalten in Abbildung 2 zu den Gesamtdrehimpulsen  $J = 1, 2$  oder  $3$ . Die Multiplizität dieser Zustände ist  $3$ , der höchste Besetzte Zustand ist  $n = 2$  und das höchste Besetzte Orbital ist das P-Orbital. Damit folgen also die 3 möglichen Zustandsterme  $2^3P_0, 2^3P_1, 2^3P_2$ .

<sup>7</sup> Das erste ist immer noch im Grundzustand ( $n_1 = 1, l_1 = 0, s_1 = s_2 = +1/2$ ).

## ABSCHNITT 10

# Röntgenspektroskopie

Wir haben nun gesehen, dass die Spektren von Atomen sehr vielfältig und kompliziert sein können. Dies gilt insbesondere für schwere Elemente. Eine Identifikation von Elementen oder von Element-Gemischen durch Analyse des optischen Spektrums scheint also eher schwierig.

Im Jahr 1913 hat Henry Mosley für alle ihm verfügbaren Elemente (immerhin 38) das Röntgenspektrum untersucht.<sup>8</sup> Die Linien im Spektrum, die der  $K$ -Schale (also den  $n = 1$ -Zuständen) zuzuordnen sind hat er für alle diese Elemente identifiziert. Empirisch fand er heraus, dass eine Zuordnung von der Wurzel der größten Frequenz einer  $K$ -Linie<sup>9</sup> proportional zur Position des Elementes im Periodensystem ist. In der Abbildung 11 ist dieser Zusammenhang gezeigt. Da über die Kerneigenschaften zur damaligen Zeit noch nichts bekannt war, beruhte die Position im Periodensystem noch allein auf der Eigenschaft der Atommasse. Trotzdem konnte man aus dieser empirisch gefundenen Zuordnung

<sup>8</sup> Wir erinnern uns: Man beschießt ein Material mit hochenergetischen Elektronen im keV-Bereich und analysiert dann das emittierte Röntgenspektrum.

<sup>9</sup> Man spricht auch von  $K$ -Kante

$$\sqrt{f} = \text{const.} \cdot Z + n \quad (10.1)$$

bereits die Röntgenstrahlung zur Identifikation der Elemente heranziehen (Röntgenspektroskopie). Heute weiß man: Die Übergänge in die  $K$ -Schale sind energetisch hauptsächlich bestimmt durch die Kernladungszahl  $Z$ . Für Wasserstoff sind die Energieniveaus durch  $E_n = \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2}$  bestimmt. Für Mehrelektronensysteme kann man als grobe Näherung annehmen, dass

$$E_n \approx \frac{-13,6 \text{ eV}(Z - 1)^2}{n^2} \quad (10.2)$$

gilt. Wenn nun also die  $K_\alpha$ -Linie durch den Übergang eines Photons von  $n = 2$  auf  $n = 1$  entsteht, beträgt die Energie des Emittierten Photons

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{-13,6 \text{ eV}(Z - 1)^2}{2^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}(Z - 1)^2}{1^2} = 10,2 \text{ eV}(Z - 1)^2 \quad (10.3)$$

Für die Frequenz gilt dann also

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \text{const.}(Z - 1)^2 \quad (10.4)$$

$$\rightarrow \sqrt{f} = C_1 Z - C_2 \quad (10.5)$$

, was sich genau mit dem linearen Zusammenhang im Mosley-Diagramm (Abb. 11) deckt. Die Kenntnis des Röntgenspektrums kann also als eine Art Fingerabdruck für das jeweilige Element verstanden werden.

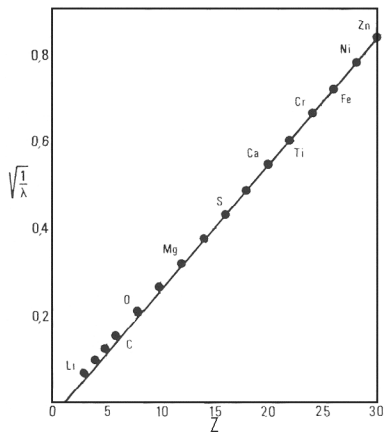
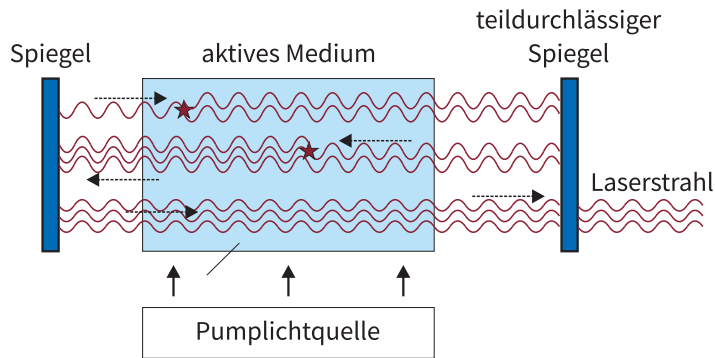


Abb. 11. Mosley-Diagramm







**Abb. 12.** Schematischer Aufbau eines Lasers. Durch induzierte Emission (Sternsymbole) werden phasengleich die Photonen vervielfältigt.

# LASER

ABSCHNITT 11

## Aufbau und Funktionsweise

Der Begriff LASER ist ein Akronym aus dessen Funktionsprinzip: **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation. Der erste optische LASER wurde im Jahr 1960 realisiert. Dabei handelte es sich um einen mit einer Blitzlampe gepulsten Rubinlaser mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 694 \text{ nm}$ . Mittlerweile steht ein enormer Spektralbereich für Laserstrahlung zur Verfügung, und LASER haben sich als unentbehrliches Hilfsmittel in Industrie, Wirtschaft und Forschung erwiesen.

Zur Beschreibung der Funktion eines LASERS beginnen wir zunächst mit seinem Aufbau und den verschiedenen Bestandteilen. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 12 dargestellt. Die wesentlichen Elemente sind:

**aktives Medium:** Dieses Medium muss die sogenannte Besetzungsinversion erlauben: Durch Energiezufuhr muss es möglich werden, dass in einem höheren Energieniveau mehr Elektronen vorhanden sind als in dem (eigentlich günstigeren) niedrigen Niveau. Die Besetzungsverteilung ist also invertiert.

**Energiepumpe:** Dies ist die Energiequelle, mit der eine Besetzungsinversion erzeugt wird. Je nach LASER-Typ kann dies beispielsweise eine Blitzlampe, eine Gasentladung oder ein anderer LASER sein.

**optischer Resonator:** Dieser sorgt dafür, dass die LASER-Strahlung stets ins aktive Medium zurückgeführt wird und so ein Verstärkungseffekt erzeugt wird.

Wir wollen nun die grundlegenden physikalischen Zusammenhänge finden, die die Erzeugung von Laserstrahlung überhaupt erst möglich machen. Dazu betrachten wir (siehe Abb. 13) zunächst die drei möglichen Absorptions/Emissions-Vorgänge von EM-Strahlung. Dazu sollen zwei Energieniveaus  $E_i$  und  $E_k$  betrachtet werden, wobei  $E_i > E_k$  ist. Bereits bekannt ist die *Absorption*  $B_{ki}$ , bei der ein Photon absorbiert wird und dabei ein Elektron vom Energiezustand  $E_k$  nach  $E_i$  angehoben wird. Außerdem gibt es noch die Möglichkeit einer *spontanen Emission*  $A_{ik}$ , bei der ein Photon abgegeben wird und dabei das Elektron von  $E_i$  auf den Zustand  $E_k$  herabfällt. Für uns

TEIL

III

- 11. Funktionsweise
- 12. Drei-Niveau-System
- ?? Resonator und Moden
- 13. Praktische Anwendung
- 14. LASER-Sicherheit

nun wichtig ist ein weiterer Prozess, die sogenannte *induzierte Emission*  $B_{ik}$ . Diese findet statt, wenn sich bereits ein Elektron auf dem angeregten Zustand  $E_i$  befindet (und auf die spontane Emission wartet) während ein weiteres Photon mit diesem Atom wechselwirkt. Dann führt das zu einer Aussendung zweier Photonen mit genau gleicher Phase, während das Elektron auf den niedrigeren Zustand springt. Diese induzierte Emission ist der Effekt, den man ausnutzen kann um Photonen zu vervielfältigen. Um die Funktionsweise des LASERS zu verstehen, muss man die Bilanz aller hier auftretenden Prozesse verstehen. Dafür betrachtet man die zu den Prozessen gehörenden Ratengleichungen. Diese Raten werden jeweils mit  $W_{ij}$  bezeichnet und geben die Wahrscheinlichkeit pro Sekunde an, dass ein Elektron vom Zustand  $i$  nach  $j$  wechselt. Für die oben betrachteten Vorgänge führt das zu den Raten:

**Absorption:**

$$W_{ki} = B_{ki} \cdot w_\nu(\nu) \quad (11.1)$$

, wobei  $B$  Einstein-Koeffizient genannt wird und  $w_\nu$  die spektrale Energiedichte<sup>10</sup> ist.

**induzierte Emission:**

$$W_{ik} = B_{ik} \cdot w_\nu(\nu) \quad (11.2)$$

**spontane Emission:**

$$W_{ik}^{\text{spontan}} = A_{ik} \quad (11.3)$$

Die Grundannahme für das Aufstellen einer Bilanzgleichung ist nun, dass alle Raten insgesamt ein Gleichgewicht bilden müssen. Es müssen also genauso viele Elektronen von  $i$  nach  $k$  wechseln wie umgekehrt. Dafür betrachten wir nun eine Gesamtanzahl von  $N$  Atomen, von denen sich  $N_i$  im Zustand  $i$  befinden sollen und  $N_k$  im Zustand  $k$ . Dann lautet also die Ratengleichung für den Gleichgewichtszustand

$$A_{ik}N_i + B_{ik}w_\nu(\nu)N_i = B_{ki}w_\nu(\nu)N_k \quad (11.4)$$

Wie stark sind jetzt aber die Niveaus  $i$  und  $k$  besetzt? Die Anzahl der Atome in den jeweiligen Zuständen lässt sich mit der Boltzmann-Statistik

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{-\frac{E_i - E_k}{k_B T}} \quad (11.5)$$

und den Niveauhäufigkeiten  $g_i$  und  $g_k$  beschreiben. Die Planck-Verteilung für  $w_\nu$  ist bereits bekannt. Aus diesen Gleichungen lassen sich nun durch Kombination die Ausdrücke

$$B_{ik} = \frac{g_k}{g_i} B_{ki} \quad (11.6)$$

$$A_{ik} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{ik} \quad (11.7)$$

ABSCHNITT 12

## Drei-Niveau-System (Rubin-LASER)

---

Der erste betriebene Laser (Rubin-Laser) ist auch das ideale Beispiel um die Funktionsweise zu zeigen. Wir haben es hier mit einem sogenannten Drei-Niveau-System zu tun wie in Abbildung 14 skizziert. Es existieren also die für uns wichtigen drei

<sup>10</sup> Das wurde im Rahmen der Hohlraumstrahlung und der Planckschen Schwarzkörperstrahlung behandelt.

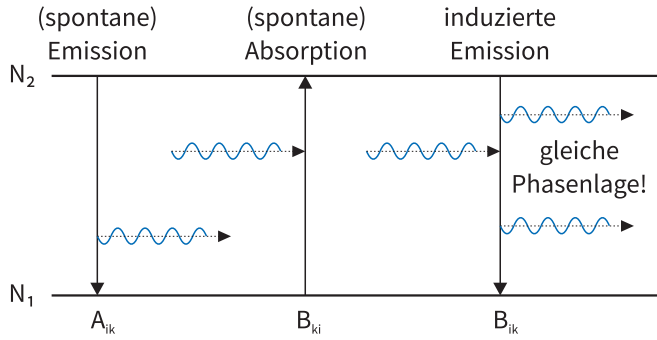


Abb. 13. Verschiedene Arten der An- und Abregung von Niveaus.

Energieniveaus  $E_1$  bis  $E_3$  mit aufsteigenden Energien. Für einen funktionierenden Laser brauchen wir nun die schon angesprochene Besetzungsinversion – in diesem Fall soll damit das Niveau  $E_2$  bei mehr Atomen vorzufinden sein als das Niveau  $E_1$ . Dieser Zustand muss künstlich herbeigeführt werden, denn normalerweise würde gemäß Boltzmann-Verteilung (blaue Linie in Abb. 15) mit steigender Energie die Besetzungszahl abnehmen.

Man erreicht die Besetzungsinversion wie folgt: Durch Absorption eines Photons mit der Energie  $E_{13} = h\nu_{13}$  wird das Atom zunächst vom Zustand  $E_1$  in den Zustand  $E_3$  „gepumpt“<sup>11</sup>. Dann gibt es nach einer gewissen Zeit den strahlungslosen Übergang von  $E_3$  auf  $E_2$ . Wenn nun die Eigenschaften der Atomniveaus dies hergeben, kann man durch optisches Pumpen den Zustand  $E_2$  in größerer Zahl als das Niveau  $E_1$  besetzen. Diese unnatürliche Besetzung der Energieniveaus ist in Abb. 15 durch die roten Abweichungen der thermischen Verteilung zu sehen.

Für alle diese Zustände lauten nun die Ratengleichungen für die drei Emissions/Absorptionsprozesse:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2 A_{21} + N_3 A_{31} + (N_2 - N_1) B_{21} w_\nu(\nu_{12}) + (N_3 - N_1) B_{31} w_\nu(\nu_{13}) \quad (12.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_3 A_{32} - N_2 A_{21} - (N_2 - N_1) B_{21} w_\nu(\nu_{12}) + (N_3 - N_2) B_{32} w_\nu(\nu_{23}) \quad (12.2)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = -N_3 A_{32} - N_3 A_{31} - (N_3 - N_1) B_{31} w_\nu(\nu_{13}) - (N_3 - N_2) B_{32} w_\nu(\nu_{23}) \quad (12.3)$$

Um dieses Gleichungssystem zunächst zu vereinfachen, kann man die Teilchenzahlerhaltung  $N_{\text{ges}} = N_1 + N_2 + N_3 = \text{const.}$  und folglich  $\frac{dN}{dt} = 0$  verwenden. Eine Emission bei  $\nu_{23}$  wird nicht erwartet, da hier sogenannte Stoßabregung (also ohne Photonemission) stattfindet. Deshalb kann man  $w_\nu(\nu_{23}) = 0$  setzen. Übrig bleiben bei Kombination der Gleichungen nur 2 linear unabhängige Gleichungen:

$$\frac{dN}{dt} = 0 = N_3 A_{32} - N_2 A_{21} - (N_2 - N_1) B_{21} w_\nu(\nu_L) \quad (12.4)$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 = -N_3 (A_{32} + A_{31}) - (N_3 - N_1) B_{31} w_\nu(\nu_p) \quad (12.5)$$

$$N_3 = N_{\text{ges}} - N_1 - N_2 \quad (12.6)$$

mit der Laserfrequenz  $\nu_L = \nu_{21}$  und der Pumpfrequenz  $\nu_p = \nu_{13}$ . Wenn man nun die Stärke der Inversion, also  $N_2 - N_1$  berechnen möchte, erhält man

$$N_2 - N_1 = \frac{(A_{32} - A_{21}) B_{31} w_\nu(\nu_p) - A_{21} (A_{32} + A_{31})}{\dots} \quad (12.7)$$

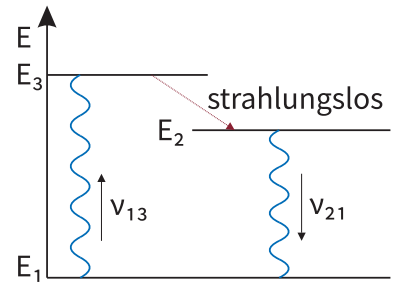


Abb. 14. Energieübergänge beim 3-Niveau-LASER

<sup>11</sup> Man spricht hier auch von optischem Pumpen

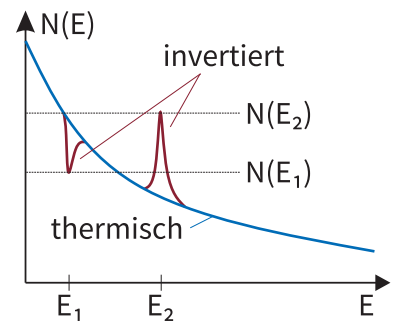


Abb. 15. Besetzung der Elektronenzustände im Normalfall und im Falle der Besetzungsinversion.

und kann daraus die Bedingung für eine gute Inversion benennen. Es sollte dafür  $A_{21} \ll A_{32}$  und  $A_{31} \ll A_{32}$  sein. Für die Atomzustände werden nun oft statt der Einsteinkoeffizienten (Wahrscheinliche Zustandsbesetzung) oft auch die Zerfallszeiten (mittlere Zeit in diesem Zustand) angegeben. Dafür muss nun also entsprechend  $\tau_{21} \gg \tau_{32}$  und  $\tau_{31} \gg \tau_{32}$  gelten. Beim Rubinlaser sind diese Forderungen mit  $\tau_{21} \approx 3 \cdot 10^{-3}$  s,  $\tau_{31} \approx 10^{-6}$  s und  $\tau_{32} \approx 10^{-8}$  s gut erfüllt. In diesem Lasermedium kann man sich nun den Prozess, der zur Entstehung des Laserlichtes führt, wie folgt vorstellen: Durch eine Lichtquelle (Blitzlicht wie etwa beim Fotoapparat) werden viele Atome in den Zustand  $E_2$  gehoben (nach dem Pumpen auf  $E_3$  und Stoßabregung auf  $E_2$ ). Wegen der speziellen Eigenschaften im aktiven Medium sind die Atome relativ lange in diesem Zustand. Wenn nun ein solches Atom einem Photon mit der Frequenz  $\nu_L = \nu_{12}$  ausgesetzt wird, führt dies zur indizierten Emission eines genau phasengleichen zweiten Photons. Dieser Prozess wiederholt sich wieder und wieder, da die Strahlung über Spiegel ständig wieder in das Medium zurückgeführt wird. Man erhält also am Ende eine Photonenlawine, deren Photonen alle genau phasengleich sind und die exakt gleiche Wellenlänge haben. Dies sind genau die Eigenschaften, die Laserlicht so besonders machen und von anderen Lichtquellen unterscheiden:

#### Eigenschaften von Laserlicht:

**Laserlicht ist monochromatisch.** Das bedeutet alle Photonen, die zum Laserlicht beitragen, haben exakt (im Rahmen der Unbestimmtheitsrelation) die gleiche Frequenz/Wellenlänge. Die relative Abweichung beträgt nur etwa  $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 10^{-15}$

**Laserlicht ist kohärent.** Die Phasenlage aller Photonen ist identisch. Diese Eigenschaft bleibt auch über große Entfernungen erhalten. So sind noch über Entfernungen von 100 km noch Interferenzeffekte zu beobachten.

**Laserlicht ist hochgradig gerichtet.** Diese Eigenschaft ist eine Folge der Kohärenz. Ein Laserstrahl ist quasi nicht aufgefächert, es gibt lediglich unvermeidbare Beugungseffekte beim Austritt aus dem Laser. Man konnte Laser-Pulse auf den Mond schicken mit einem Leuchtkreisdurchmesser im Bereich eines Meters.

**Laserlicht ist hochgradig fokussierbar.** Einen Laserstrahl kann man auf extreme Energiedichten fokussieren. Es sind Energiedichten von  $10^{17}$  W/m<sup>2</sup> möglich. Zum Vergleich: Ein Schweißbrenner, der mit Gas betrieben wird, erzeugt am Brennpunkt eine Energiedichte von  $10^3$  W/m<sup>2</sup>.

#### ABSCHNITT 13

## Anwendungen in der Praxis

Für die Verwendung von Lasern in der Praxis muss man die verschiedenen Lasertypen und Bautypen kennen. Es gibt, wie zu erwarten war, nicht den besten Laser für alle Anwendungen, sondern spezifisch optimale Lösungen für ein gestelltes Problem.

Die erste grobe Unterscheidung finden zwischen Dauerstrich- und gepulsten Lasern statt. Während ein Dauerstrahl (cw - continuous wave) Laser dauerhaft Laserlicht aussendet, wird in einem gepulsten Laser die Leistung "gesammelt" und in einem kurzen aber starken Puls entladen. Die Leistungen sind also dementsprechend bei cw-Lasern eher geringer, dafür aber dauerhaft vorhanden. Bei PulsLasern ist die abgegebene Leistung im Pulszeitraum größer.

Die wichtigsten Bautypen sind die Festkörperlaser und Diodenlaser:

**Festkörperlaser:** Das aktive Medium ist bei diesem Lasertyp ein Kristall oder Glas (z.B. NdYAG). Gepumpt werden Festkörperlaser meist mit Licht bzw. Dioden (DPSS). Die Leistung von Festkörperlasern reicht bis in den kW-Bereich.

**Diodenlaser:** Diese Laser basieren auf einem ähnlichen Prinzip wie LEDs nur sind sie zusätzlich mit einem aktiven Medium ausgestattet. Dieser Laser können sehr klein und auch sehr energieeffizient sein. Die bekannten "Laserpointer" gehören zu dieser Bauart. Hier gibt es allerdings nur wenig Lichtfarben und die Laser haben außerdem eine geringe Kohärenzlänge. Die Leistung geht bis in den mW-Bereich.

Ansonsten gibt es auch noch andere aktive Medien die zur Lasererzeugung genutzt werden. Dazu gehören auch Gaslaser oder Flüssigkeitslaser. Die Pumpmechanismen zur Erzeugung der Inversion sind außerdem vielfältig: Es gibt das optische Pumpen durch Licht bzw. Laser, elektrische Entladungen, Elektronenstrahlen und auch Gamma-Strahlen die zum Pumpen genutzt werden.

Die Nutzung von Lasern ist heute in sehr vielen technischen Bereichen üblich. So arbeitet Netzwerktechnik mit Laserlicht zur Datenübertragung (Glasfaser), Barcode-Scanner arbeiten mit aufgefächertem Licht und auch Entfernungsmessung kann man mit Lasern durchführen.

#### ABSCHNITT 13.1

### Entfernungsmessung mit Lasern

Lasern werden häufig (neben Radarmessungen) zur Entfernungsmessung genutzt. Es wird unterschieden zwischen Messverfahren für größere und kleinere Entfernungen:

**Laufzeitmessung:** Mit dieser Methode kann man größere Entfernungen exakt messen. Das Messsystem besteht aus einem Sender (Laserdiode) und einem Empfänger (Photodiode). Wenn das empfangene Signal registriert wird, kann man aus dem Zeitversatz und der Lichtgeschwindigkeit die Entfernung bestimmen.

**Phasenverschiebung:** Mit dieser Methode können auch kleinere Entfernungen bestimmt werden. Dafür braucht man ein moduliertes Ausgangssignal, das im gleichen Gerät wieder empfangen wird. Das gesendete und empfangene Signal wird dann verglichen und es wird dann ein bestimmter Phasenversatz zwischen diesen Beiden festgestellt. In Abb. 16 ist dies schematisch verdeutlicht.

#### ABSCHNITT 13.2

### Glasfaser als Lichtleiter

Glasfasern dienen heute der schnellen Übertragung von Daten - realisiert wird dies durch Laserpulse die durch einen Lichtleiter geschickt werden. Man könnte sich vereinfachend dafür eine Art Bit-Code (Laser an - Laser aus) vorstellen, mit welchem man Daten durch Hilfe eines Lasers übertragen kann. Man kann hierfür die Kohärenz und Schmalbandigkeit der Laser ausnutzen. Im Faseraufbau ist das Kernglas und das Mantelglas an die Lichtfrequenzen angepasst - das Mantelglas besitzt genau die richtige Dicke und Brechungsindex, damit die Photonen das Kernglas nicht verlassen. In welcher Form genau sich das Laserlicht im Kern ausbreitet, hängt vom Fasertyp ab:

**Single-Mode Faser:** Wir breitet sich durch den kleinen Kerndurchmesser von  $8\ \mu\text{m}$  genau eine Laserfrequenz/Phase (Mode) aus. Es gibt nahezu keine Verluste und die Übertragung ist über große Entfernungen möglich.

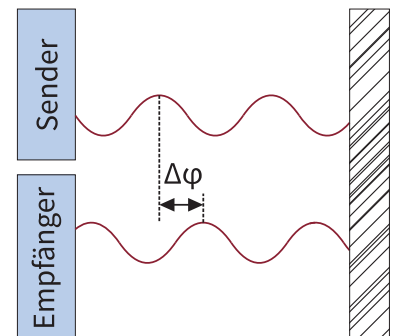


Abb. 16. Entfernungsmessung mit Lasern.

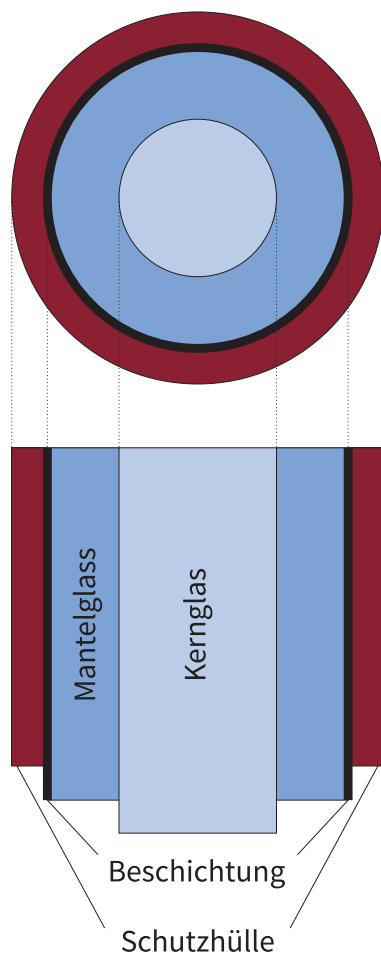


Abb. 17. Aufbau einer Glasfaser.

<sup>12</sup> Eine Interlockschaltung stellt beispielsweise sicher, dass bei offener Labortür der Laser ausgeschaltet bleibt. Ein Totmannschalter muss dauerhaft manuell betätigt werden um den Laser zu betreiben.

<sup>13</sup> Wir haben mit einem Leistungsmessgerät einen 1 mW-Laser mit 20 mW gemessen!

#### ABSCHNITT 14

## LASER-Sicherheit

Laserlicht kommt in der Natur nicht vor. Der menschliche Organismus ist evolutionär nicht vor dessen Gefahren geschützt wie dies bei z.B. Sonnenlicht der Fall ist. Besonders bei Demonstrationsexperimenten oder Schülerexperimenten ist es deshalb enorm wichtig auf die Sicherheitsaspekte Wert zu legen. Beachten Sie bitte, dass die Gefahren von Laserlicht im Allgemeinen stets als viel geringer eingeschätzt werden – es muss also immer mit Vernunft und Information eine Gefahreinschätzung durchgeführt werden, mit “Erfahrung” oder “Bauchgefühl” führt diese oft zu einer Unterschätzung der Gefahr.

Bei den Schädigungen durch Laser unterscheidet man Schäden an der Haut und an den Augen. Bei Schäden an den Augen ist zu beachten, dass **Netzhautschäden** irreparabel sind und nicht durch körperliche Heilungsprozesse regeneriert werden können. Zusätzlich wird durch die Augenlinse die Strahlung auf der Netzhaut fokussiert, was die Schadwirkung nochmals verstärkt. Der körpereigene Lidschutzreflex funktioniert nur bei sichtbarem Licht, es gibt aber auch Laser die im UV-Bereich leuchten und so die körpereigenen Schutzreflexe umgehen. Bei Schäden durch UV-Laser wird zusätzlich zum Netzhautschaden auch oft die Linse getrübt. Die effektivsten Möglichkeiten die Augen vor Laserlicht zu schützen sind Laserschutzbrillen (auf die richtige Wellenlänge achten! OD-Bereich beachten!). Außerdem müssen starke Laser oft durch bestimmte Schutzschaltungen (Interlock, Totmannschalter)<sup>12</sup> gesichert sein.

Schäden durch Laserstrahlung an der Haut sind generell weniger ernsthaft als Augenschäden. Ein Kontakt mit dem Strahl oder dessen Reflexionen kann dabei zu **Hautverbrennungen** führen. Bei schwachen UV-Lasern kann Sonnenbrand auftreten.

Bei sehr Leistungsstarken Lasern kann auch **Brandgefahr** durch entzündete Objekte im Strahlengang entstehen. Die von Laserstrahlung ausgehenden Gefahren sind in sogenannte Klassen eingeteilt:

**Klasse 1: (Schultauglich)** Laser dieser Klasse sind “Augensicher”, können also auch über einen längeren Zeitraum mit dem Auge betrachtet werden. Der Strahl kann auch auf einem Weg über eine Lupe oder ein Fernglas ins Auge gelangen. Die Laserleistung liegt hier typischerweise im  $\mu\text{W}$ -Bereich.

**Klasse 1M: (Schultauglich)** Laser dieser Klasse können nicht mehr sicher mit einer Lupe oder einem Fernglas betrachtet werden. Zu dieser Laserklasse gehören viele Laserdioden, Glasfasern und Geräte zur Entfernungsmessung.

**Klasse 2: (Schultauglich)** Bei dieser Klasse sorgt der Lidschutzreflex durch Zeitbegrenzung der Einwirkung auf 0,25 s (sofern funktionell, nicht unter Drogeneinfluss) für ausreichenden Schutz der Augen. Die Laserleistung liegt hier bei etwa 1 mW.

**Bitte Beachten: Billige importierte Laserpointer weisen häufig eine deutlich höhere Leistung auf als angegeben!**<sup>13</sup>

**Klasse 2M: (Schulauglich)** Der Lidschutzreflex sorgt noch immer für Schutz vor Augenschäden. Ein Betrachten des Strahls und dessen Reflexionen mit Lupe/Fernglas ist nicht mehr erlaubt.

**Klasse 3R/3B:** Hier ist auch das Betrachten von Reflexionen mit dem Auge nicht mehr sicher. Diffuse Reflexionen sind ungefährlich.

**Klasse 4:** Zu dieser Klasse gehören die leistungsstärksten Laser. Es besteht auch Brandgefahr durch Laser die etwa schneiden und schweißen können.







# Moleküle

Wir werden uns nun (etwas) mit der Physik der Moleküle beschäftigen. Diese ist eine Komplexitätsebene über der Physik der Atome und deren Elektronen angelegt. Schon dort sind wir bisweilen an gewisse Grenzen gelangt die nur durch Näherungen zu lösen waren - jetzt wird es also noch etwas komplizierter. Als "Dank" dafür erhalten wir jedoch die Grundlage des Zusammenspiels der Atome in den Molekülen. Dies bildet in gewisser Weise die Grundlage für alle Bereiche der Biologie und Chemie, in denen die Moleküle und nicht die Atome die wesentlichen Akteure sind. Aus diesen Bereichen kann man konkrete Fragen an die Physik stellen:

- Warum bilden sich überhaupt stabile Moleküle aus Atomen?
- Wie sehen die Energieniveaus von Molekülen aus?
- Kann man chemische Reaktionen und biologische Prozesse auf molekularer Basis verstehen?

Um diesen Fragen zumindest etwas auf den Grund zu gehen, suchen wir uns das denkbar einfachste Beispiel hierfür heraus: Das  $H_2^+$ -Molekülion.

## ABSCHNITT 15

### Wasserstoff als Molekülion $H_2^+$

Das Wasserstoffmolekül besteht aus zwei aneinander gebundenen Wasserstoff-Atomen. Die chemische Schreibweise hierfür ist  $H_2$ . Im Normalzustand besitzen die zwei Wasserstoffatome auf zwei Elektronen. Zur Vereinfachung betrachten wir nun zunächst den Fall des Molekülions  $H_2^+$ , bei dem ein Elektron fehlt und das deswegen einfach positiv geladen ist ( $2 \cdot (Z = 1)e - 1e = +1e$ ). In Abb. 18 sind die Abstände für dieses System definiert. Die potentielle Energie dieses Systems setzt sich zusammen aus der Coulomb-Energie zwischen Elektron und den jeweiligen Atomkernen A und B, sowie der Coulomb-Energie zwischen den Atomkernen mit Abstand  $R$ . Daher ist

$$E_{\text{pot}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} + \frac{1}{R} \right) \quad (15.1)$$

Als Ansatz um nun die Wellenfunktion zu erhalten, verwenden wir die Summe aus zwei bereits bekannten Wasserstoff-Wellenfunktionen: Eine Wellenfunktion  $\psi_A$  die das Elektron um den Kern A beschreibt und eine Wellenfunktion  $\psi_B$  die das Elektron um den Kern B beschreibt:

$$\psi = C_1\psi_A + C_2\psi_B \quad (15.2)$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  müssen durch die Normierung festgelegt werden. Am Beispiel der 1s-Wellenfunktion

$$\psi_{A/B} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r_{A/B}}{a_0}} \quad (15.3)$$

- 15. Molekülion  $H_2^+$
- 16.  $H_2$ -Molekül
- 17. elektronische Zustände
- 18. chem. Bindungen
- 19. Rotation/Schwingung

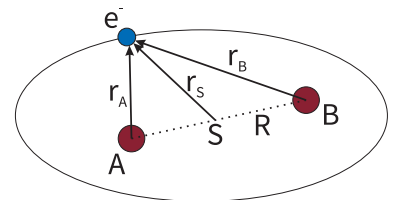


Abb. 18. Definition zur Berechnung des  $H_2$ -Molekülions.

erhält man

$$1 = \int |\psi|^2 dV = C_1^2 \int |\psi_A|^2 dV + C_2^2 \int |\psi_B|^2 dV + 2C_1C_2 \int \psi_A\psi_B dV \quad (15.4)$$

$$1 = C_1^2 + C_2^2 + \underbrace{2C_1C_2 \int \psi_A\psi_B dV}_{\text{Überlappintegral}} \quad (15.5)$$

Aus Gründen der Symmetrie müssen die Konstanten  $|C_1|^2 = |C_2|^2$  sein, woraus  $C_1 = \pm C_2$  folgt. Für die beiden Fälle kann man dann also Gl. 15.5 nach  $C_1$  umstellen. Für den Fall  $C_1 = C_2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= C_1^2 + C_1^2 + 2C_1C_1 \int \psi_A\psi_B dV \\ &= C_1^2 \left( 2 + 2 \int \psi_A\psi_B dV \right) \\ C_1 &= \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \int \psi_A\psi_B dV}} \end{aligned}$$

und für den ungeraden Fall  $C_1 = -C_2$  folgt analog

$$\begin{aligned} 1 &= C_1^2 + C_1^2 - 2C_1C_1 \int \psi_A\psi_B dV \\ &= C_1^2 \left( 2 - 2 \int \psi_A\psi_B dV \right) \\ C_1 &= \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \int \psi_A\psi_B dV}} . \end{aligned}$$

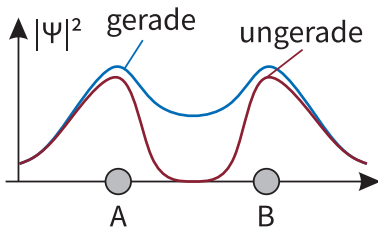
Es gibt also zwei mögliche Linearkombinationen für die Lösung, welche als *gerade* und *ungerade* bezeichnet werden:

$$\psi_{\text{gerade}} = C_1\psi_A + C_1\psi_B = C_1(\psi_A + \psi_B) \quad (15.6)$$

$$\psi_{\text{gerade}} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \int \psi_A\psi_B dV}} (\psi_A + \psi_B) \quad (15.7)$$

$$\psi_{\text{ungerade}} = C_1\psi_A - C_1\psi_B = C_1(\psi_A - \psi_B) \quad (15.8)$$

$$\psi_{\text{ungerade}} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \int \psi_A\psi_B dV}} (\psi_A - \psi_B) \quad (15.9)$$



**Abb. 19.** Symmetrischer und Antisymmetrischer Zustand im Vergleich.

Die Begriffe gerade/ungerade verwendet man wegen den Spiegelungseigenschaften am Koordinatenursprung. So ist bei geraden Funktionen  $\psi(\vec{r}) = +\psi(-\vec{r})$  und bei ungeraden Funktionen  $\psi(\vec{r}) = -\psi(-\vec{r})$ . In Abbildung 19 sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die gerade und ungerade kombinierten Wellenfunktionen gezeigt. Nur die gerade Kombination wird demnach für eine Bindung zwischen den Atomen sorgen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist für diesen Zustand zwischen den Atomkernen nicht Null, so dass also eine Anziehende Wechselwirkung durch das Elektron vermittelt werden kann und das Molekül stabil ist. Die ungerade Wellenfunktion beschreibt dagegen einen Zustand, bei dem sich das Elektron "niemals" zwischen den Kernen aufhält. Somit stoßen sich die positiv geladenen Kerne voneinander ab und man spricht von einem anti-bindenden Zustand.

## ABSCHNITT 15.1

Energieniveaus im MolekÜlion  $H_2^+$ 

ToDo

## ABSCHNITT 16

## Wasserstoff-Molekül

Das (vollständige) Wasserstoffmolekül besteht aus 2 Wasserstoff-Atomen und 2 Elektronen gemäß Abbildung 20. Die wesentlichste Änderung im Vergleich zum Ion ist die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen. Wir werden sehen, dass dies zu einem analytisch nicht löslichen Problem führt und wir auf Näherungen angewiesen sein werden.

Die **Molekülorbitalnäherung (MO)** ist dabei ein guter Einstieg. Als Wellenfunktion der einzelnen Elektronen dient uns das Ergebnis aus der Rechnung vom MolekÜlion. Für jedes Elektron wird also der bindende Zustand

$$\psi_g = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \int \psi_A \psi_B dV}} (\psi_A + \psi_B)$$

angenommen und diese beiden werden im Produkt überlagert:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_g(\vec{r}_1) \cdot \psi_g(\vec{r}_2) \quad (16.1)$$

Es wurde also keinerlei Wechselwirkung der beiden Elektronen untereinander berücksichtigt. Nun gibt es aber noch eine Tatsache, die wir unbedingt berücksichtigen müssen: In einem System aus 2 Elektronen muss das Pauli-Prinzip berücksichtigt werden. Die Gesamtwellenfunktion muss also antisymmetrisch sein. Dies kann man sicherstellen, indem man eine antisymmetrische Spinwellenfunktion hinzufügt. So erhält man

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \psi_g(\vec{r}_1) \cdot \psi_g(\vec{r}_2) \cdot [\mathcal{X} \uparrow(1) \mathcal{X} \downarrow(2) - \mathcal{X} \uparrow(2) \mathcal{X} \downarrow(1)] \quad (16.2)$$

mit den Spins  $\mathcal{X} \uparrow$  und  $\mathcal{X} \downarrow$  die durch die  $z$ -Komponente des Spins  $m_s = \pm 1/2$  dargestellt werden. Der räumliche Anteil der Lösung (also nur die Ortswellenfunktion) beträgt dann

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2 + 2 \int \psi_A \psi_B dV} \cdot [\psi_A(1) + \psi_B(1)] \cdot [\psi_A(2) + \psi_B(2)] \quad (16.3)$$

Die Gesamtenergie des Systems aus 2 Protonen und 2 Elektronen setzt sich zusammen aus den kinetischen und den potentiellen Anteilen gemäß

$$E_{\text{ges}} = \sum_i E_{\text{kin}}^i + E_{\text{pot}} \quad (16.4)$$

Für die Lösung der Schrödingergleichung lautet dann der entsprechende Hamilton-Operator<sup>14</sup>

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{r_{A1}} - \frac{1}{r_{B1}} - \frac{1}{r_{A2}} - \frac{1}{r_{B2}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} \right) \quad (16.5)$$

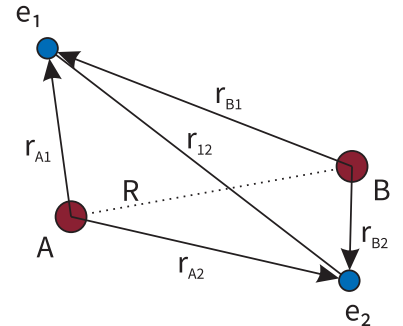


Abb. 20. Zur Definition der Abstände im  $H_2$ -Molekül.

<sup>14</sup> Damit erhält man als Eigenwert die Energie des Systems.

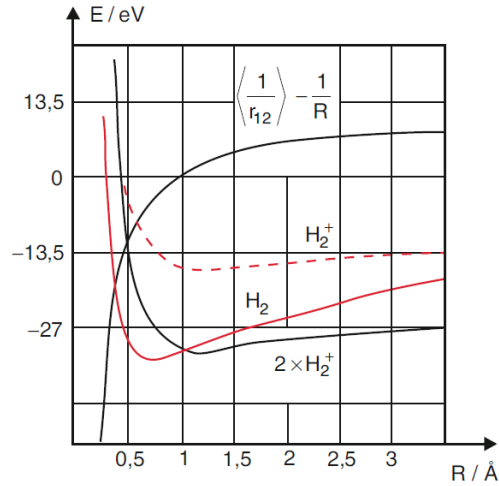


Abb. 21. Potentialverläufe in der Molekülorbitalnäherung.

In diesem ist schon als Teil der Hamilton-Operator des  $H_2^+$ -Ions enthalten. Für das  $i$ -te Elektron ist dort:

$$\hat{H}_{i,H2+} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{r_{Ai}} - \frac{1}{r_{Bi}} + \frac{1}{R} \right) \quad (16.6)$$

Wir können nun also für Elektron 1 und 2 die Gleichung 16.6 aus Gl. 16.5 ausklammern und es bleibt

$$\hat{H}_{H2} = \hat{H}_{1,H2+} - \frac{\hbar^2}{2m} (\cancel{\nabla_1^2} + \nabla_2^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \cancel{-\frac{1}{r_{A1}} - \frac{1}{r_{B1}}} - \frac{1}{r_{A2}} - \frac{1}{r_{B2}} + \frac{1}{r_{12}} + \cancel{\frac{1}{R}} - \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}_{\text{erweitert mit 0}} \right)$$

$$\hat{H}_{H2} = \hat{H}_{1,H2+} + \hat{H}_{2,H2+} - \frac{\hbar^2}{2m} (\cancel{\nabla_2^2}) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \cancel{-\frac{1}{r_{A2}} - \frac{1}{r_{B2}}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{R} + \cancel{\frac{1}{R}} \right)$$

Daher bleibt

$$\hat{H}_{H2} = \underbrace{\hat{H}_{1,H2+} + \hat{H}_{2,H2+}}_{2 \cdot E_{H2+}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( +\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{R} \right) \quad (16.7)$$

Durch Berechnungen kann man zeigen, dass der Anteil in der Klammer sich etwa gegenseitig aufhebt. So dass man als Näherung

$$\hat{H}_{H2} = \underbrace{\hat{H}_{1,H2+} + \hat{H}_{2,H2+}}_{2 \cdot E_{H2+}} \approx -3.5 \text{ eV} \quad (16.8)$$

annehmen kann. Vom experimentellen Wert von  $E_{H2} = -4.747 \text{ eV}$  weicht das Ergebnis trotzdem recht stark ab. Mit komplexen – aber besseren – Näherungen kann man sich bis zu theoretischen Werten von  $E_{H2,theo} = -4.7467 \text{ eV}$  vorarbeiten.

In Abb. 21 sind alle relevanten Energieverläufe gezeigt. Man sieht, dass für einen Atomabstand  $R \approx 1 \text{ Å}$  der Term  $\left( +\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{R} \right)$  nahezu verschwindet.

## Elektronische Zustände von Molekülen

Bisher haben wir für die Wellenfunktionen immer angenommen, dass sich alle Elektronen im 1s-Zustand befinden. In Molekülen gibt es aber natürlich auch angeregte Zustände. Zusammen mit der Möglichkeit eines Variablen Kernabstandes  $R$  ergibt sich eine Vielzahl an möglichen Zuständen. Es soll nur übersichtshalber hierauf eingegangen werden. Oft findet man in Zeitschriftenartikeln die Schreibweise für solche Elektronischen Zustände und sollte wenigstens verstehen, was damit gemeint ist.

Es wird nun dementsprechend folgende Erweiterungen geben:

- Die Energie ist nun Abhängig vom Atomabstand  $E_n = E_n(R)$
- Die  $z$ -Komponente des Bahndrehimpulses muss für eine "neue Richtung" definiert werden. Zweckmäßig ist es, hier die Molekülachse zu verwenden. Die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Molekülachse wird nun mit griechischen Buchstaben bezeichnet

$$|L_z| = \hbar \sum_i \lambda_i$$

- Der Gesamtspin wird ebenfalls auf die Molekülachse projiziert

Die Bahndrehimpulsquantenzahl für die Komponente entlang der Molekülachse wird nun analog zur Bezeichnung bei Atomen ( $l = 0 \rightarrow s, l = 1 \rightarrow p, \dots$ ) mit griechischen Buchstaben gearbeitet:

Drehimpuls	Bezeichnung
$\lambda = 0$	$\sigma$
$\lambda = 1$	$\pi$
$\lambda = 2$	$\delta$
$\dots$	$\dots$

Bei der Angabe des Gesamtzustandes verbindet man dann die Angabe der Drehimpulsquantenzahl  $l$  mit der Angabe dessen Projektion auf die Molekülachse  $\lambda$ <sup>15</sup>. So ergibt sich also als Beispiel aus einem Zustand mit der Drehimpulsquantenzahl  $l = 0$  und  $\lambda = 0$  der Zustand  $s\sigma$ . Aus  $l = 1$  und  $\lambda = 0$  der Zustand  $p\sigma$  und aus  $l = 1$  und  $\lambda = 1$  der Zustand  $p\pi$ . Bei mehreren Atomen werden die Einzelzustände addiert und dann als Großbuchstaben gekennzeichnet (z.B.  $S\Sigma$ ). Die Besetzung der Orbitale wird wie bereits bei den Atomen mit einer hochgestellten Zahl gekennzeichnet. Die energetische Reihenfolge (von niedrig nach hoch) lauten in dem Fall  $1s\sigma, 2s\sigma, 2p\sigma, 2p\pi, 3s\sigma, 3p\pi, 3d\sigma, 3d\pi$ .

<sup>15</sup> Dies wurde vorher mit  $l$  und  $m_l$  bezeichnet.

Für ein Molekül aus 2 Lithium-Atomen (insgesamt 6 Elektronen) werden also die untersten Zustände aufgefüllt und es resultiert die Besetzung

$$\text{Li}_2(1s\sigma_g)^2(1s\sigma_u)^2(2s\sigma_g)^2$$

Oftmals findet man auch die Abkürzung

$$\text{Li}_2(KK(2s\sigma_g)^2)$$

, die bedeutet, dass sich 2 Paare in der K-Schale befinden (gerade und ungerade Wfkt.) die nicht zur Bindung beitragen da sie abgeschlossen sind. Außerdem gibt es auch wieder wie in der Physik der Atome die Nomenklatur für Zustände. Diese werden in der Form

$$^{2S+1}\Lambda_{g/u}^{\pm} \tag{17.1}$$

	Konfiguration	Zustand
H <sub>2</sub>	(1sσ <sub>g</sub> ) <sup>2</sup> ↑↓	<sup>1</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>+</sup>
He <sub>2</sub> <sup>+</sup>	(1sσ <sub>g</sub> ) <sup>2</sup> (1sσ <sub>u</sub> ) ↑	<sup>2</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup>
He <sub>2</sub>	(1sσ <sub>g</sub> ) <sup>2</sup> (1sσ <sub>u</sub> ) <sup>2</sup> ↑↓	<sup>1</sup> Σ <sub>g</sub> <sup>+</sup>

**Tab. 3.** Elektronische Zustände in Molekülen.

angegeben.  $\Lambda$  ist dabei die Summer der Einzelbeiträge  $\Lambda = \sum_i \lambda_i$ . Für das oben genannte Lithium-Molekül ergibt sich

$${}^1\Sigma_g$$

als Zustand. In Tabelle 3 sind einige Konfigurationen und Zustände zusammengefasst.

## ABSCHNITT 18

# Chemische Bindungen

Nun werden wir uns mit der Frage beschäftigen, warum und auf welche Weise überhaupt Molekülbindungen existieren. Diese Fragestellung überschneidet sich stark mit Fragestellungen aus Chemie und Biologie. Man kann dabei die Bindungsursachen in zwei grobe Bereiche teilen: Einen für geringe Kernabstände und einen für größere Kernabstände.

## ABSCHNITT 18.1

# Kovalente Bindung

Bei eher geringen Kernabständen sind die Valenzelektronen (die äußeren Elektronen in nicht-abgeschlossenen Schalen) für die Bindung verantwortlich. In der Chemie spricht man vom *Valenzbindungsmodell*. Dieser Bindungsmechanismus basiert auf dem Vorhandensein einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen im Bereich zwischen den positiv geladenen Atomkernen. Dies haben wir bereits bei der Formulierung des symmetrischen Zustands in Abbildung 19 beim Wasserstoffmolekül gesehen. Das negativ geladene Elektron fungiert dabei quasi als Vermittler zwischen den sich abstoßenden Protonen. Es können sich so bei größeren Molekülen auch mehrere Kerne ein Valenzelektron "teilen". Außerdem gibt bei kleinen Kernabständen auch noch die sogenannte *Austauschwechselwirkung*. Dabei wird nun der größere Bewegungsradius der Elektronen um ein Molekül wirksam. Wenn die Atomkerne sich nah beieinander aufhalten, dann dehnt sich das Elektronenorbital auf Bereiche um beide Atomkerne aus. Diese Orbitale sind dann entsprechend größer, als wenn man nur ein Orbital um einen Atomkern hätte. Gemäß Unschärferelation  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$  führt also die größere Ortsunschärfe  $\Delta x$  zu einer kleineren Impulsunschärfe  $\Delta p$ . Die kinetische Energie dieses Elektrons muss also geringer sein (und die Bindung darum stärker) als wenn es nur zu einem Atomkern gehören würde. Diese Bindungskraft beruht letztenendes auf dem Pauliprinzip und der Ununterscheidbarkeit von Elektronen. Deshalb wird diese Art der Bindung *Austauschwechselwirkung* genannt.

Die soeben vorgestellten Bindungen, Valenzbindung und Austauschwechselwirkung, bezeichnet man zusammen als kovalente Bindungen. Diese kovalente Bindung

ist bedeutsam für geringe Kernabstände  $R < \langle r_A \rangle + \langle r_B \rangle$  im Vergleich zu den einzelnen Atomradien  $\langle r_A \rangle$  und  $\langle r_B \rangle$ .

## ABSCHNITT 18.2

### Bindung im Fernfeld

Nun sollen die Molekülbindungen für größere Kernabstände  $R > \langle r_A \rangle + \langle r_B \rangle$  betrachtet werden. Zwar gibt es hier kaum noch einen Überlapp der Elektronenorbitale, aber dennoch sind vielfältige Bindungsarten möglich.

#### 18.2.1 Ionen-Ionen-Wechselwirkung

Für dieses Modell nimmt man einfach an, dass zwei ungleichgeladene Ionen miteinander durch Coulomb-Interaktion wechselwirken. Das Potential besitzt dann die Form

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{R} \quad (18.1)$$

und fällt mit  $1/R$  ab.

#### 18.2.2 Ionen-Neutral-Wechselwirkung

Wenn nur ein Partner der Bindung ein Ion ist, kann trotzdem eine Bindung geschaffen werden solange das neutrale zweite Atom ein statisches Dipolmoment aufweist. Die Wechselwirkungsenergie zwischen Dipolmoment und elektrischem Feld lautet nun

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_{\text{el}} \cdot \vec{E} = |\vec{p}_{\text{el}}| \cdot \cos \vartheta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{R^2} \quad (18.2)$$

und nimmt quadratisch zum Abstand ab.

#### 18.2.3 Dipol-Dipol-Wechselwirkung

Diese Art der Wechselwirkung bezeichnet das Zusammentreffen zweier neutraler Atome, jedes davon mit einem elektrischen Dipolmoment ausgestattet. Die Wechselwirkung wird nun dadurch verursacht, dass das eine Dipolmoment mit dem elektrischen Feld des anderen Atoms, verursacht durch das andere Dipolmoment, interagiert. So wird dann

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_{A,\text{el}} \cdot \vec{E}_B \quad \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( 3p_B \vec{R} \cos \vartheta_B - \vec{p}_B \right) \quad (18.3)$$

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_{A,\text{el}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( 3p_B \vec{R} \cos \vartheta_B - \vec{p}_B \right) \quad (18.4)$$

und die Wechselwirkung nimmt mit  $1/R^3$  ab.

#### 18.2.4 Van-der-Waals Wechselwirkung

Eine in der Natur oft anzutreffende Bindungsart ist die Van-der-Waals-Bindung. Sie entsteht durch jeweils beim anderen Atom induzierte Dipolmomente. Der Mechanismus funktioniert wie folgt: Atom A soll das Dipolmoment  $p_A$  besitzen. Dieses erzeugt am Ort von Atom B das elektrische Feld

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( 3|p_A| \vec{R} \cos \vartheta_A - \vec{p}_A \right) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} p_A \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (18.5)$$

Dieses Feld am Ort B führt dort zu einem induzierten Dipolmoment  $p_B^{\text{ind}} = \alpha_B \vec{E}_A$ . Umgekehrt gilt dieses Moment auch für B mit dessen Wirkung auf A. Wir sehen also

ebenfalls ein induziertes Dipolmoment in Atom A von  $p_A^{\text{ind}} = \alpha_A \vec{E}_B$ . Die potentielle Energie dieser Wechselwirkung skaliert dann also gemäß  $E_{\text{pot}} \propto \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B = \alpha_A \alpha_B |E|^2$ . Dies führt zu einer anziehenden Wechselwirkung

$$E_{\text{pot}} \propto -\frac{1}{R^6} \tag{18.6}$$

, die jedoch bei zu nahen Atomkernen durch das Pauli-Verbot "gebremst" wird. Die durch das Pauli-Verbot resultierende Abstoßung wird als proportional zu  $R^{-12}$  postuliert. Damit ergibt sich insgesamt das sogenannte Van-der-Waals oder auch Lennard-Jones-Potential der Form

**Lennard-Jones-Potential**

$$E_{\text{pot}} = \frac{a}{R^{12}} - \frac{b}{R^6} \tag{18.7}$$

### 18.2.5 Wasserstoff-Brückenbindung

Die Wasserstoffbrückenbindung kann zwischen zwei negativ geladenen Ionen eine Bindung aufbauen, in dem sich ein (positiv geladenes) Wasserstoffion zwischen zwei Ionen plaziert. Der Mechanismus entspricht dabei etwa dem der Valenzbindung, nur bei größeren Abständen.

## ABSCHNITT 19

# Rotation und Schwingung

Die vielfältigen elektronischen Zustände genügen bereits, um die Analyse eines Molekülspektrums kompliziert zu machen. Nun kommt aber noch eine wesentliche Eigenschaft von Molekülen hinzu – die Freiheitsgrade der Atome als Verbund bezüglich der Verbindungsachse. Die Moleküle können also Rotieren (Drehung um eine bestimmte Achse) oder Schwingen (der Abstand der Atome verändert sich periodisch).

### ABSCHNITT 19.1

## Rotation

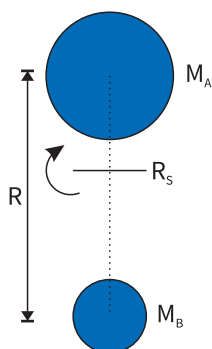
Durch die im Vergleich zu den Elektronen große Atommasse, kann man gemeinhin die Bewegung der Atome als langsam ansehen (die sogenannte Born-Oppenheimer-Näherung). Deswegen kann man die Bewegung von Elektronen und Atomen voneinander getrennt betrachten. Die Wellenfunktion ist dann das Produkt einer Wellenfunktion für die Atomkerne mit variablem  $\vec{R}$  und einer Wellenfunktion für die Elektronen mit variablem  $\vec{r}$  und konstantem  $\vec{R}$ :

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \psi_{\text{Kern}}(\vec{R}) \cdot \psi_e(\vec{r}, \vec{R} = \text{const}) \tag{19.1}$$

Für die Lösung der Schrödingergleichung verwendet man die reduzierte Masse

$$M = \frac{M_A \cdot M_B}{M_A + M_B}$$

und verwendet den Schwerpunkt als Koordinatenursprung, wie in Abb. 22 gezeigt. Dann stellt sich die stationäre SGL in der bekannten Form



**Abb. 22.** Molekülrotation, schematisch.

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + E_{\text{pot}}(R) \right] \psi_{\text{Kern}} = E_{\text{Kern}} \psi_{\text{Kern}} \quad (19.2)$$

dar. Hier kann man wieder die Lösung aus der Behandlung des kugelsymmetrischen Potentials in der Form

$$\psi_{\text{Kern}} = R(\vec{R}) \cdot Y(\vartheta, \varphi) \quad (19.3)$$

benutzen. Mit dem Trägheitsmoment  $\Theta$  und dem quantenmechanischen Drehimpuls  $J = \Theta \cdot \omega$  kann man die Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{J^2}{2\Theta} = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2MR} \quad (19.4)$$

bestimmen. Es sind also wieder nicht alle kontinuierlichen Rotationszustände möglich, sondern diese sind gequantelt. Die Abstände der Energieniveaus hierbei betragen

$$\Delta E_{\text{rot}} = E(J+1) - E(J) = \frac{J(J+1)\hbar^2}{\Theta} \quad (19.5)$$

und hängen also vom Trägheitsmoment des Moleküls ab. Für die Bezeichnung der Rotationsniveaus wird oft die etwas gewöhnungsbedürftige Rotationskonstante  $B_e$  genutzt. Diese beinhaltet die Massen und Trägheitsmomente des jeweiligen Moleküls und ist also ein charakteristischer Wert für diese. Mit der Rotationskonstante

$$B_e = \frac{\hbar}{4\pi cMR^2} \quad (19.6)$$

, wobei  $M$  die reduzierte Masse ist. Nun stellt sich die Frage, mit welcher Frequenz ein Photon den Übergang von  $E(J)$  zu  $E(J+1)$  bewirken kann. Dafür ist die Frequenz  $\nu_{\text{rot}}(J)$  dann

$$\nu_{\text{rot}}(J) = \frac{[E(J+1) - E(J)]}{h} \quad (19.7)$$

$$\bar{\nu}_{\text{rot}}(J) = \frac{\nu_{\text{rot}}(J)}{c} = \frac{[E(J+1) - E(J)]}{hc} \quad (19.8)$$

$$= \frac{1}{hc} \cdot \hbar c \cdot B_e [(J+1)(J+2) - J(J+1)] \quad (19.9)$$

$$= B_e(J+1)(J+2 - J) \quad (19.10)$$

$$= 2B_e(J+1) \quad (19.11)$$

Der Übergang zwischen Rotationsniveaus wird in einer Mikrowelle ausgenutzt, um wasserhaltiges Essen zu erwärmen. Die Mikrowellenstrahlung hat zwar nicht genügend Energie um Schwingungen oder Elektronische Übergänge anzuregen, aber für die Wechselwirkung mit den Rotationsniveaus genügt die Energie. Eine Mikrowelle erzeugt Photonen mit  $\nu \approx 2.45$  GHz.

ABSCHNITT 19.2

## Schwingung

Die Schwingungszustände in Molekülen beruhen auf einer periodischen Änderung des Abstandes. Um die Effekte nicht zu vermischen, soll hier jetzt keine Rotation vorliegen ( $J = 0$ ). Das Potential der Wechselwirkung zwischen den beiden Atomen ist in Abb. 23 durch die blaue Kurve gezeigt. Um die SGL für dieses Potential lösen zu können, muss man eine praktikable Näherung vornehmen. Die einfachste Näherung wäre durch eine Entwicklung bis zum quadratischen Term (Parabel) gegeben. Dies würde dann beim

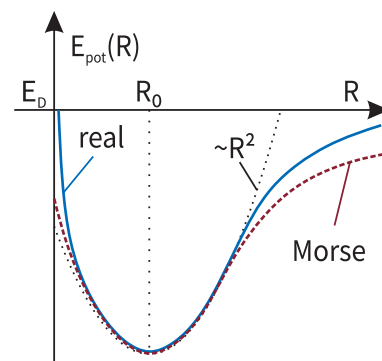


Abb. 23. Potentielle Energie für Molekülschwingungen.

Einsetzen in die SGL zu einer harmonischen Schwingung führen - also identisch zum Modell des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Die Energieniveaus dafür würden dann durch

$$E_{\text{Schw.}}(\nu) = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (19.12)$$

mit der Schwingungsquantenzahl  $\nu$  beschrieben. Das Problem in dieser einfachen Potentialform liegt offenbar darin, dass die Lösung für große Quantenzahlen divergiert. Deshalb wird stattdessen das Morse-Potential mit der Dissoziationsenergie  $E_D$

$$E_{\text{pot}}(R) = E_D \cdot \left(1 - e^{-a(R-R_0)}\right)^2 \quad (19.13)$$

verwendet (siehe Abb. 23). Mit diesem Potential ist die SGL noch immer analytisch lösbar und führt zu den Schwingungsenergien

$$E_{\text{Schw.}}(\nu) = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{\hbar^2\omega^2}{4E_D} \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (19.14)$$

bzw. den Energiedifferenzen zwischen den Niveaus

$$\Delta E_{\text{Schw.}}(\nu) = E_{\text{Schw.}}(\nu + 1) - E_{\text{Schw.}}(\nu) \quad (19.15)$$

$$= \hbar\omega \cdot \left[1 - \frac{\hbar\omega}{2E_D} \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (19.16)$$

$$\omega = a \cdot \sqrt{\frac{2E_D}{M}} \quad (19.17)$$

mit  $a$  als Fit-Konstante aus dem Morse-Potential.





# Festkörper

Nachdem wesentliche Eigenschaften der Moleküle betrachtet wurden, soll nun ein weiterer Schritt hin zu makroskopischen Objekten gegangen werden. Wenn man viele Atome zu einem komplexen Medium anordnet, wird dies durch einen weiteren Zweig der Physik beschrieben - die Festkörperphysik.

Die Festkörperphysik ist ein enorm großes Betätigungsfeld. Für einen etwas umfassenden Überblick empfehle ich die Einführung zum Thema von P. Hofmann [2]. Für die Lehramtsausbildung müssen wir uns auf die zentralen und auch praktisch wichtigsten Kernthemen beschränken. In diesem Lehrbuch habe ich mich für die Festkörpereigenschaft *Leitfähigkeit* entschieden, da man hier eine direkte Verbindung zur Elektrizitätslehre herstellen kann und somit bestehendes Wissen vertieft. Nach der Behandlung des Themas sollte verstanden sein, warum Festkörper in die Kategorien Leiter, Isolator und Halbleiter eingeteilt werden können. Um das Konzept der Leitfähigkeit zu verstehen, wird zunächst die Kategorisierung des Aufbaus von Festkörpern beschrieben.

- 20. Gitterstrukturen
- 21. Leitfähigkeit Klassisch
- 22. Leitfähigkeit QM

## ABSCHNITT 20

### Gitterstrukturen

#### ABSCHNITT 20.1

#### Translationsgitter

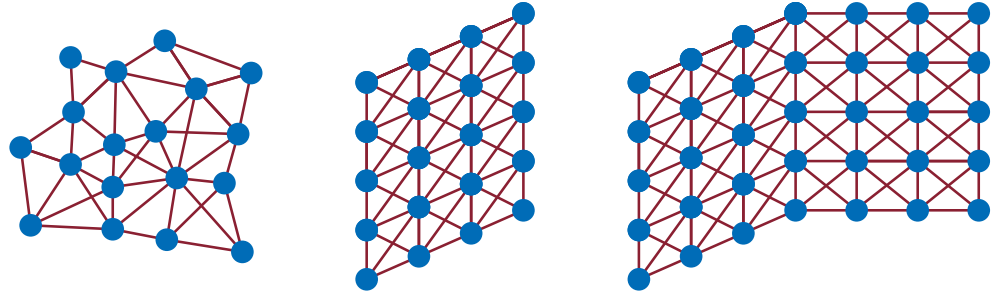
Die wesentlichste Unterscheidung die bezüglich der mikroskopischen Beschaffenheit von Festkörpern gemacht wird, ist die Einteilung in

- Amorphe Festkörper: Auf mikroskopischer Ebene sind die Atome nicht in wiederkehrender Struktur angeordnet.
- Kristalline Festkörper: Auf mikroskopischer Ebene besitzen die Atome eine wiederkehrende Struktur.
  - Einkristalline Festkörper: Der ganze Festkörper ist durch eine einzige wiederkehrende Struktur identifizierbar.
  - Polykristalline Festkörper: Anordnung von (evtl. unterschiedlichen) Einkristallen, die ungeordnet zu einem größeren Gesamtkomplex verbunden sind.

Amorphe Festkörper (Abb. 24 links) besitzen auf mikroskopischer Ebene keine regelmäßige Ordnung. Es ist aber zu beachten, dass dieser Zustand trotzdem dem festen Aggregatzustand entspricht und nicht mit dem Zustand "flüssig" verwechselt werden darf. Der wesentliche Unterschied liegt auf der Hand: In einer Flüssigkeit verschieben sich die Atome ständig gegeneinander. In einem amorphen Festkörper gibt es zwar eine unregelmäßige, aber stabile Struktur.

Polykristalline Festkörper (Abb. 24 rechts) bestehen aus nicht-periodisch aneinandergefügt Bereichen mit Einkristall-Struktur. Für unseren Rahmen werden diese Polykristalle nicht weiter behandelt.

Die Metalle, für dessen Leitfähigkeit wir uns im Weiteren interessieren, liegen meist in Einkristall-Struktur vor. Einkristalline Festkörper (Abb. 24 mitte) besitzen über den gesamten Festkörper hinweg ein periodisch wiederkehrenden Aufbau. Man



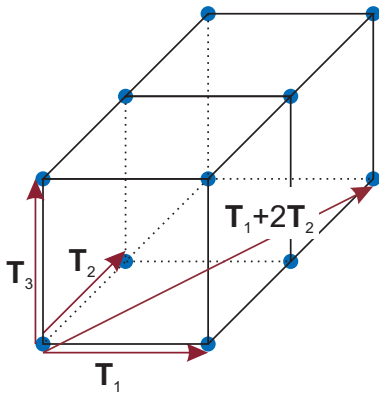
**Abb. 24.** Einteilung von Festkörpern gemäß ihrer Atomanordnung. (links) amorphe Struktur, (mitte) Einkristall, (rechts) Polykristall

gibt diese Struktur durch eine vektorielle Beschreibung mit Basisvektoren an. Dabei gibt man an, wie durch Wahl von ganzzahligen Zählindizes  $a, b, c$  alle Atompositionen im Festkörper erreicht werden können:

**Translationsgitter**

$$\vec{T}_{abc} = a \cdot \vec{T}_1 + b \cdot \vec{T}_2 + c \cdot \vec{T}_3 \quad ; a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Die Vektoren  $\vec{T}_{1,2,3}$  sind dabei nicht normalisiert<sup>16</sup> und stehen in den Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  zu den kartesischen Koordinatenachsen  $\vec{e}_{x,y,z}$ . In Abb. 25 ist gezeigt, wie man für zwei verschiedene Sätze der Parameter  $a, b, c$  zu verschiedenen Punkten auf dem Kristallgitter gelangt. Der Körper, der durch die Wahl der “ersten” Gitterpunkte, also  $\vec{T}_{000}, \vec{T}_{001}, \vec{T}_{010}, \dots, \vec{T}_{111}$  aufgespannt wird, heißt *Elementarzelle* und ist in Abb. 26 hervorgehoben.



**Abb. 25.** Ein Translationsgitter mit drei orthogonalen Basisvektoren. Beliebige Gitterpunkte sind durch Linearkombination darstellbar.

<sup>16</sup> Die Länge der Vektoren spiegelt also die Abstände in den verschiedenen Richtungen wieder.

ABSCHNITT 20.2

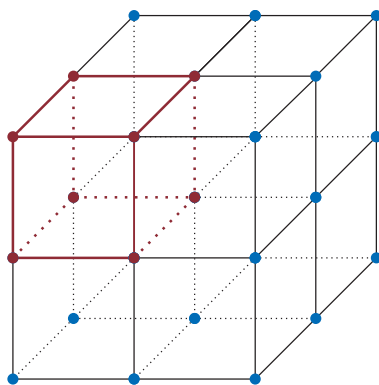
**Bravais-Gitter**

Nun werden wir die Einkristalle noch weitergehend in unterschiedliche Kategorien einteilen. Die Parameter, mit denen man die Unterscheidung vornimmt sind die Winkel der Translationsvektoren untereinander<sup>17</sup> sowie das Verhältnis ihrer Längen zueinander<sup>18</sup>. Außerdem wird jede dieser Variationen noch unterteilt in *primitive* (nur auf den Gitterpunkten sind Atome) und andere Strukturen, bei denen etwa im Zentrum der Elementarzelle oder im Zentrum der Außenflächen noch Atome vorhanden sind.

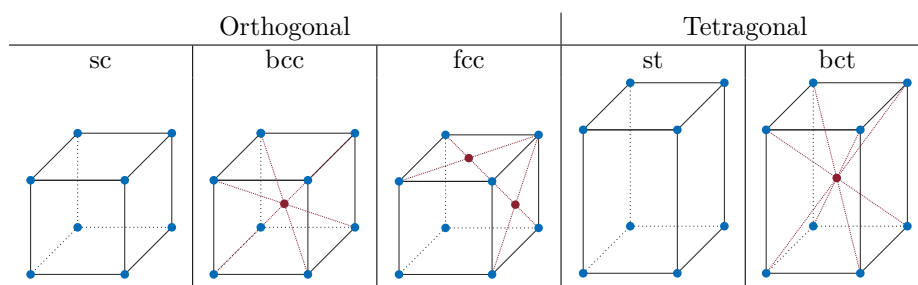
**20.2.1 Rechtwinklige Gitter, ( $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )**

Für den Fall, dass alle Translationsvektoren  $\vec{T}_{1,2,3}$  senkrecht aufeinanderstehen, schauen wir nun zunächst auf den besonderen Fall höchster Symmetrie: Auch die Seitenlängen der drei Translationsvektoren sind gleich ( $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|$ ). Diese Gitter werden *kubisch* genannt. Die primitive Form dieses kubischen Gitters (simple-cubic, sc) liegt vor, wenn genau auf den beschriebenen Gitterpunkten Atome platziert sind. Es gibt aber auch noch die Möglichkeiten, dass in der Raummitte (body-centered-cubic, bcc) oder in den Mitten der Seitenflächen (face-centered-cubic, fcc) Atome platziert sind. Diese drei Orthogonalen Gitter sind für bessere Übersichtlichkeit in Tabelle 4 im linken Teil zusammengefasst. Im fcc-Gitter sind alle Seitenflächen im jeweiligen Zentrum mit einem Atomplatz versehen. Zur Übersichtlichkeit wurden in der Zeichnung aber nur 2 Atome skizziert.

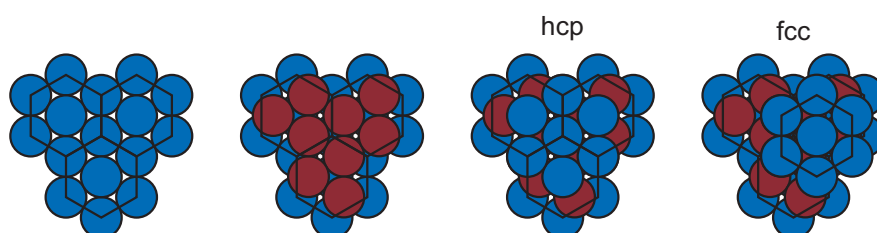
Im *tetragonalen* Kristallsystem sind die Bedingungen an die Seitenlängen des kubischen Gitters jetzt gelockert. Es gibt nun zwei gleiche Seitenlängen und eine



**Abb. 26.** In einem kubischen Gitter hervorgehobene Elementarzelle.



**Tab. 4.** Bravais-Gitter mit orthogonaler und tetragonaler Basisgittern. Hinweis: Für bessere Übersichtlichkeit sind einige Atome im fcc-Beispiel weggelassen worden.



**Abb. 27.** Vorgehensweise für die dichteste Kugelpackung. In der dritten Ebene gibt es zwei Möglichkeiten, die zur hcp bzw. fcc Struktur führen (nach Hofmann [2]).

Seite mit abweichender Länge. Die primitive Form dieses Gitters (simple tetragonal, st) ist also ein Quader mit quadratischer Grundfläche mit Atomen an den Eckpunkten. Außerdem ist noch eine raumzentrierte Variante (body-centered tetragonal, bct) mit einem Atom in der Mitte der Zelle möglich. In Tabelle 4 im rechten Teil sind diese Gitter gezeigt.

Die letzten Vertreter der Gitter mit  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$  gib es noch 4 *Orthorhombische* Bravais Gitter<sup>19</sup> mit drei unterschiedlich langen Seiten, auf die wir hier aber nicht gesondert eingehen wollen. Ein wichtigerer Fall mit praktischer Bedeutung sind die nun folgenden schiefwinkligen hexagonalen Gitter.

### 20.2.2 Hexagonale Gitter, Kugelpackung

Metalle sind oft aus Strukturen aufgebaut, die einen größtmöglichen Überlapp der äußeren Elektronenschalen sicherstellen. Dies führt letztenendes auf eine Anordnung mit größtmöglicher Dichte der Atome. Wenn wir nun eine Anordnung aus einem metallischen Festkörper betrachten, können wir die Atomstruktur auch vereinfachend als Kugeln annehmen. Wie kann man also Eine Ansammlung von Kugeln mit maximaler Dichte aufeinander stapeln?

Das Vorgehen dafür ist in Abb. 27 aufgezeigt. Für die erste Ebene (blaue Kugeln) ist es offenbar am sinnvollsten die Kugeln in hexagonaler Form anzuordnen, da so am wenigsten ungefüllter Zwischenraum entsteht. In der zweiten Ebene (rote Kugeln), werden die Kugeln nun einfach in die entstandenen Mulden jeweils zwischen den Kugeln der ersten Ebene abgelegt. Wegen der Symmetrie der Anordnung macht es hier keinen Unterschied für welche Mulden man sich entscheidet. In der dritten Ebene werden die Kugeln (blau) nun erneut in die Mulden der roten Kugeln gelegt. Es gibt aber nun zwei Möglichkeiten die Platzierung zu wählen: Wenn die blauen Kugeln der dritten Ebene genau über die Kugeln der ersten Ebene platziert werden, führt das zu einer hcp (hexagonal closed packed) Struktur. Wenn man stattdessen aber die jeweils anderen Mulden verwendet, ist die dritte Ebene zur ersten Ebene verschoben und es

<sup>17</sup> ...sind die Translationsvektoren untereinander rechtwinklig oder nicht?

<sup>18</sup> ...gleichlang oder nicht?

<sup>19</sup> eingeteilt in: primitiv, basiszentriert, flächenzentriert und raumzentriert.

ergibt sich eine fcc-Anordnung. Die Dichte dieser beiden Kugelpackungen ist jeweils natürlich gleich und beträgt ca. 74%. Außerdem ist beiden Varianten gemein, dass jedes Atom von 12 nächsten Nachbarn umgeben ist.

Schon Johannes Kepler beschäftigte sich mit Gitterstrukturen. Von einem anderen Wissenschaftler, Thomas Harriot, wurde er gebeten, die bestmögliche Raumaussnutzung für das Stapeln von Kanonenkugeln zu verifizieren. Im Jahr 1611 stellte er die sogenannte *Keplersche Vermutung* auf: Die im Mittel bestmögliche Raumaussnutzung von  $\approx 74\%$  beim Stapeln gleichgroßer Kugeln wird durch fcc und hcp-Strukturen erreicht. Keine Kugelpackung kann demnach eine höhere Dichte bewirken. Beweisen konnte er diese Aussage aber nicht. Diese Vermutung konnte erst 400 Jahre später, im Jahr 2017, durch Thomas Hales formal bewiesen werden [3].

Die Gitterstruktur eines hexagonalen Gitters ist in Abb. 28 gezeigt. Die Grund- und Deckfläche sind jeweils regelmäßige Sechsecke. Demnach muss für die Elementarzelle (rote Linien) gelten, dass die Translationsvektoren der Grundfläche einen Winkel von  $120^\circ$  bilden. Zu diesen beiden steht dann der Translationsvektor in  $z$ -Richtung jeweils im rechten Winkel. Die hcp-Kugelpackung bedarf nun die raum-zentrierte Variante dieses Gitters mit zusätzlichem Atom im Zentrum der Elementarzelle (nur für ein Atom in der Skizze eingezeichnet).

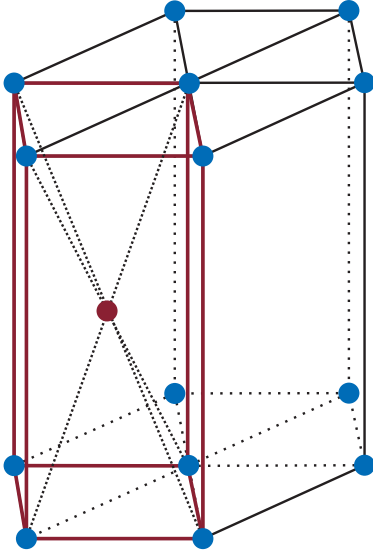


Abb. 28. Hexagonales Gitter. Die Elementarzelle ist rot hervorgehoben.

## ABSCHNITT 21

### Elektrische Leitfähigkeit - Klassische Variante

Bereits kurz nach der Entdeckung des Elektrons stellte P. Drude im Jahr 1900 ein einfaches Modell vor, mit dem sich viele Eigenschaften von Metallen erstmals erklären ließen. Noch heute ist das Drude-Modell für viele Menschen, ohne dass diese sich dessen bewusst sind, das übliche Modell für die Vorstellung über elektrischen Strom oder den elektrischen Widerstand. Wir werden darum dieses Modell betrachten und die Erfolge und Misserfolge bei der Vorhersage von experimentellen Befunden betrachten. Außerdem ist das Drude-Modell, das ohne Kenntnis der Quantenphysik verstanden werden kann, von besonderem Interesse für den Physikunterricht in der Schule und wird auch inherent in den gängigen Schulbüchern genutzt [4, 5]. Lehrkräfte sollten daher sowohl dieses Modell mit seinen plausiblen Ergebnissen als auch die weiterführende Beschreibung auf Basis der Quantenmechanik kennen.

## ABSCHNITT 21.1

### Drude-Modell

Im Drude Modell werden die Elektronen als frei bewegliche Teilchen mit Masse  $m_e$  beschrieben. Wenn man an die Seiten eines metallischen Leiters eine Spannungsdifferenz anlegt wird ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  erzeugt. Die Bewegung der Elektronen in diesem Feld wird durch die Bewegungsgleichung

$$m_e \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} = e \cdot \vec{E}$$

beschrieben. Die Lösung dieser Differentialgleichung findet man durch Trennung der Variablen und anschließendes Integrieren:

$$d\vec{v} = \frac{e\vec{E}}{m_e} dt$$

$$\vec{v}(t) = \frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot t$$

Dies bedeutet also, das Elektron bewegt sich entgegen der Richtung des Feldes (weil  $e = -e_0$ ) und wird mit der Zeit immer schneller, da es der konstanten Beschleunigung  $\frac{e\vec{E}}{m_e}$  unterliegt. Das Modell geht aber nun davon aus, dass nach der mittleren Stoßzeit  $\tau$  diese Beschleunigungsphase durch einen Zusammenstoß mit einem Ion des Festkörperrgitters beendet wird und das Elektron dabei seine Energie komplett verliert. Dann ist also die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen sich im Feld durchschnittlich fortbewegen durch

$$v_d = \frac{eE}{m_e} \tau \quad (21.1)$$

gegeben und wird *Driftgeschwindigkeit* genannt. Die Bewegung der Elektronen ist dann eine Überlagerung dieser Driftgeschwindigkeit (bewirkt durch das Feld  $E$ ) und der thermischen Geschwindigkeit  $v_{\text{therm}}$  (durch Stöße mit dem Atomgitter). Die thermische Geschwindigkeit bei gegebener Temperatur  $T$  erhält man durch Gleichsetzen der kinetischen Energie der Elektronen mit der thermischen Energie des Gitters gemäß Gleichverteilungssatz:

$$\frac{1}{2} m_e v_t^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (21.2)$$

Bei normaler Raumtemperatur beträgt die thermische Geschwindigkeit ca.  $v_t = 10^5$  m/s. Welchen Wert nimmt aber die Driftgeschwindigkeit bei üblichen Rahmenbedingungen ein? Für das Einsetzen der Werte in Gl. 21.1 benötigen wir Abschätzungen für die Feldstärke  $E$  und die mittlere Stoßzeit  $\tau$ . Eine typische Spannung von 10 V in einem 1 m langem Leiter führt zu einer Feldstärke von  $E = U/d = 10$  V/m. Für die Relaxationszeit  $\tau$  nutzen wir einen Umweg. Die mittlere Stoßzeit hängt über  $\tau = \lambda/v$  mit der mittleren freien Weglänge  $\lambda$  zusammen. Typische Gitterabstände in Festkörpern sind ca. 0.1 ... 0.5 nm. Es findet nicht immer genau ein Stoß des Elektrons mit jedem Gitteratom statt, also schätzen wir eine mittlere Strecke bis zum nächsten Stoß von etwa  $\lambda = 1$  nm ab. Die thermische Geschwindigkeit beträgt ca.  $v_t = 10^5$  m/s. Damit ergibt sich für

$$v_d = \frac{e \cdot 10 \text{ V/m}}{m_e} \cdot \frac{1 \text{ nm}}{10^5 \text{ m/s}} \approx 0.017 \text{ m/s}$$

Wenn man nun die Geschwindigkeit der Ladungsträger in einem Leiter berechnen kann, kann man auch den Widerstand bzw. die Leitfähigkeit daraus ableiten. Die Stromstärke  $I$  ist definiert als die Anzahl von Ladungsträgern die pro Zeiteinheit durch den Leiter strömen. Nehmen wir an, die Dichte der Ladungsträger in unserem Leiter sei  $n_e$ , die Ladungsmenge ist dann  $e \cdot n_e$ . Dann folgt durch einen Leiter mit Querschnitt  $A$  die Stromstärke

$$I = e \cdot n_e \cdot v_d \cdot A \quad (21.3)$$

Wenn man nun Gl. 21.1 in Gl. 21.3 einsetzt, ergibt sich

$$I = en_e A \cdot \left( \frac{eE}{m_e} \tau \right) = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} \cdot E. \quad (21.4)$$

Wenn man nun die Feldstärke mit  $E = U/l$  durch einen Ausdruck für die angelegte Spannung bei Leiterlänge  $l$  ersetzt, erhält man das Ohm'sche Gesetz mit dem Widerstand  $R$ :

$$I = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e l} \cdot U = \frac{1}{R} \cdot U \quad (21.5)$$

Das Drude Modell hat also erfolgreich die Proportionalität zwischen Strom und Spannung in Leitern vorhergesagt. Es muss aber erwähnt werden, dass mit gemessenen Werten der Elektronendichte die Werte der vorhergesagten Proportionalitätskonstante  $1/R$  teilweise um Größenordnungen von gemessenen Werten abweichen. Die Abweichung wird außerdem bei sinkenden Temperaturen immer gravierender.

### Drude Modell

Das Drude Modell macht folgende Annahmen:

- Die negativ geladenen Elektronen im Metall sind wechselwirkungsfrei.
- Die positiven Ladungen befinden sich auf unbeweglichen Ionenrümpfen.
- Es gibt Stöße zwischen Elektronen und Ionenrümpfen. Dabei stellt sich ein thermisches Gleichgewicht zw. Elektronen und Gitter ein.
- Die Zeit zwischen zwei Stößen ist die Relaxationszeit  $\tau$ .

Das Drude Modell kann zwar das Ohm'sche Gesetz qualitativ erklären, aber es gibt neben den berechneten Widerstandswerten noch andere Probleme. So können wenige Fremdatome in einem Festkörper drastischen Einfluss auf seine Leitfähigkeit haben, was durch das Drude-Modell nicht erfasst werden kann. Einige Vorhersagen zur Wärmekapazität, auf die wir hier nicht eingegangen sind, sind ebenfalls sehr problematisch gewesen.

## ABSCHNITT 22

# Elektrische Leitfähigkeit - Korrektur durch Quanteneffekte

Um die Schwächen und Ungenauigkeiten der klassischen Betrachtung der Leitfähigkeit angemessen zu behandeln, wird nun auf eine mehr an die Quantenmechanik angelehnte Betrachtungsweise eingegangen.

### ABSCHNITT 22.1

## Elektronengas

Wir werden im Folgenden die Elektronen zunächst – wie im klassischen Fall – als frei annehmen. Allerdings soll diesmal das Pauli-Prinzip bei der Besetzung energetischer Zustände berücksichtigt werden. Als kurze Wiederholung schauen wir uns einen direkten Vergleich von Fermionen und Bosonen in einem unendlich hohen Potentialtopf an. In Abb. 29 sieht man, wie jeweils 5 Elektronen die Energieniveaus in einem Potentialtopf besetzen. Zur Erinnerung: Die Energieniveaus des unendlich hohen Potentialstopfes mit Länge  $L$  betragen jeweils

$$E_n = n^2 \cdot \frac{1}{8m_e L^2} \quad (22.1)$$

Die Bosonen nehmen jeweils die niedrigst mögliche Energie ein. Damit ergibt sich eine Gesamtenergie des Systems von  $E_{\text{Boson}} = 5 \cdot E_1$ . Die Fermionen hingegen können jeweils nur zu Zweit ein Energieniveau besetzen – ein Elektron mit Spin “up” und ein Elektron mit Spin “down” – ohne das Pauli Prinzip zu verletzen. Daher ergibt die bestmögliche Aufteilung die Besetzung aus der Abb. 29 (rechts). Die Gesamtenergie beträgt dann, zusammen mit Gl. 22.1,

$$\begin{aligned} E_{\text{Fermion}} &= 2 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 \\ &= 2 \cdot E_1 + 2 \cdot 2^2 E_1 + 1 \cdot 3^2 E_1 = 19E_1. \end{aligned}$$

Der höchste besetzte Zustand ist ebenfalls viel höher als im Fall der Bosonen ( $E_3$  statt  $E_1$ ). Es hat also größere Auswirkungen auf ein System aus Elektronen, wenn wir diese korrekterweise als Fermionen betrachten und daher das Pauli-Prinzip befolgen. Dieses Vorgehen wollen wir jetzt auf die Elektronen in Festkörpern anwenden. Für die Besetzung der Energie-Niveaus muss man die Fermi-Dirac-Statistik zu Grunde legen<sup>20</sup>. Dort sind die Energieniveaus bei Temperatur  $T$  gemäß

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \quad (22.2)$$

besetzt. In Abb. 4 auf Seite 17 wurde diese diese Verteilung bereits skizziert. Für die Leitfähigkeit ist momentan interessant, bis zu welcher Energie die Energieniveaus in einem Festkörper besetzt sind. Diese Energie-“Obergrenze” soll die klassische Betrachtung durch thermisches Gleichgewicht aus Gl. 21.2 ablösen. In der Verteilung der Fermi-Dirac-Statistik in Abb. 4 sind zwei Fälle skizziert: Einmal der Fall für  $T = 0$ , der durch eine exakte Besetzungsgrenze gekennzeichnet ist, und der Fall für  $T > 0$ , bei dem es einige Elektronen über und unter dieser Energiegrenze gibt. Der thermische Einfluss auf die Besetzungen führt also dazu, dass die starre Grenze etwas unscharf wird. Zu unserem Glück ist es aber so, dass der Einfluss der Temperatur erst ab enorm großen Werten von  $T > 10^5$  K bedeutend wird. In unserer Betrachtung können wir also immer vom idealen Fall mit  $T = 0$  ausgehen ohne dabei größere Fehler zu machen. Bei  $T = 0$  ist die Betrachtung einfach: Unterhalb der Fermi-Energie  $E_F$  sind alle Zustände besetzt, überhalb von  $E_F$  gibt es keine besetzten Zustände. Wenn wir jetzt also die Annahme für die Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronen korrigieren wollen, nutzen wir dafür durch

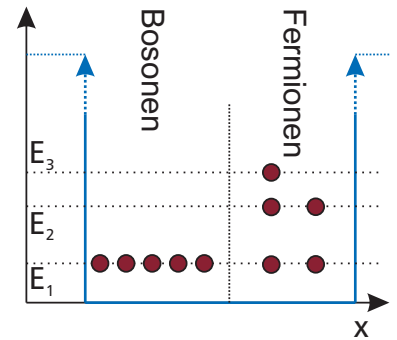
$$E_F = \frac{1}{2} m_e v_F^2 \quad (22.3)$$

die Fermi-Energie, statt die thermische Energie  $3/2 k_B T$ . Unserer Problemstellung wurde nun auf die Bestimmung der Fermi-Energie verlagert.

## ABSCHNITT 22.2

### Die Fermi-Energie

Wie können wir Angaben für die Fermi-Energie abschätzen? Wir betrachten dafür die Elektronen des gesamten Festkörpers als “frei”, entsprechend dem Elektronengas-Modell, sie sollen sich jedoch wie in Abb. 29 in einem unendlich hohen (dreidimensionalen) Potentialtopf befinden. Die Energieniveaus für diesen dreidimensionalen Fall sind aus der Quantenphysik-Veranstaltung hoffentlich noch bekannt und betragen bei



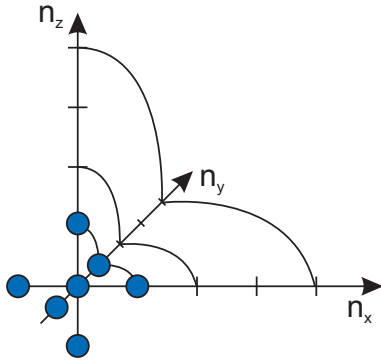
**Abb. 29.** Bosonen besetzen das niedrigste Energieniveau, Fermionen befolgen das Pauli-Prinzip.

<sup>20</sup> Eine Begründung und nähere Erläuterung wird im Rahmen der “statistischen Physik” gegeben.

gleicher Seitenlänge der Potentialausdehnung  $L_x = L_y = L_z = L$ :

$$E = E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} \\ = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \left( \frac{2\pi}{L} n_x \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} n_y \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} n_z \right)^2 \right) = \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2m_e L^2} n_F^2$$

Dies sind also die verfügbaren Niveaus in unserem Festkörper. Nun müssen die  $N$  vorhandenen Elektronen auf diese Niveaus – unter Beachtung des Pauli-Prinzips – verteilt werden. Wir nehmen an, dass die Elektronen jeweils mit Spin-Up und Spin-Down ein Niveau besetzen. Es ist also zu erwarten, dass am Ende die  $N/2$  niedrigsten Energieniveaus besetzt sind. Um diese Anzahl zu ermitteln, spannen wir wie in Abb. 30 einen dreidimensionalen Raum auf. Dessen Achsen sollen die Quantenzahlen  $n_x, n_y$  und  $n_z$  darstellen. Wir fragen nun danach, wie viele Zustände es in einem bestimmten Abstand  $n_F = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$  vom Zentrum dieser sogenannten *Fermi-Kugel* gibt. In der Abbildung ist dies beispielhaft gezeigt: Durch die möglichen Kombinationen kommen wir hier auf insgesamt 7 mögliche Zustände, ohne den im Beispiel erlaubten Radius von  $n_F = 1$  zu verlassen. Wenn wir nun diese Kugel mit  $N/2$  Elektronen befüllen, wird sie ein Volumen von



**Abb. 30.** Skizze zur Anzahl der besetzten Zustände in einem Potentialtopf.

$$\frac{N}{2} = \frac{4}{3} \pi n_F^3 \tag{22.4}$$

annehmen. Daraus folgt, dass der höchste besetzte Zustand mit der Quantenzahl

$$n_F = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \cdot N^{1/3}$$

erreicht wird. Der höchste besetzte Zustand führt zu der gesuchten Fermi-Energie

$$E_F = \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2m_e L^2} n_F^2 = \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2m_e L^2} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \cdot N^{2/3}.$$

Die Angabe der Energie durch die Elektronenanzahl  $N$  und die Ausdehnung des Festkörpers  $L$  ist allerdings wenig zweckmäßig. Sinnvoller ist es hier eine Elektronendichte  $n_e = N/V$  anzugeben um eine Angabe spezifisch für ein bestimmtes Material/Metall zu erhalten.

Für diese Umformung wird nach einer Elektronendichte  $n_e \propto N$  proportional zur Teilchenzahl gesucht. Die Teilchenzahl liegt aber in der Form  $N^{2/3}$  vor. Daher suchen wir nach einer Ersetzung für

$$n_e^{2/3} = \left( \frac{N}{L^3} \right)^{2/3} = \frac{N^{2/3}}{L^2}$$

Sowohl  $N$  als auch  $L$  liegen hierfür in gewünschter Potenz vor. Daher ersetzen wir nun  $N^{2/3}/L^2$  mit  $n_e^{2/3}$  und vereinfachen:

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2m_e} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \cdot n_e^{2/3} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{4 \cdot 3^{2/3}}{8^{2/3}} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^{2/3}} \pi^{4/3} \cdot n_e^{2/3} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \end{aligned}$$

Nach dieser Rechnung können wir nun die Fermi-Energie Wahlweise durch die Elektronendichte  $n_e$  oder den Fermi-Wellenzahlvektor  $k_F$  angeben.

### Fermi-Energie

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \\ E_F &= \frac{\hbar^2}{2m_e} k_F^2 \end{aligned}$$

Nachdem nun die Fermi-Energie für Metalle mit bekannter Ladungsträgerdichte berechnet werden kann, können wir mit Gl. 22.3 die Fermi-Geschwindigkeit  $V_F$  bestimmen. Es zeigt sich, dass typische Fermi-Energien für Metalle im Bereich einiger eV liegen. Die Fermi-Geschwindigkeiten der Elektronen liegen demnach im Bereich von  $10^6$  m/s und sind damit nochmals höher als im Fall der Ableitung durch thermische Bewegung. Die Geschwindigkeit der Elektronen wurde in Gl. 21.5 genutzt, um über die mittlere Stoßzeit  $\tau$  durch  $(m_e l)/(e^2 n_e \tau)$  einen Wert für den Ohm'schen Widerstand zu bestimmen. Für die Stoßzeit ist aber nicht nur die Geschwindigkeit ein wichtiger Wert, sondern auch der Stoßquerschnitt. In der klassischen Betrachtung wurden die Ionen rümpfe, ohne das dies näher ausgeführt wurde, als Kugeln mit einer festen Ausdehnung betrachtet. Im Bilde der Quantenmechanik ist eine solche Anschauung aber nicht mehr sinnvoll. Stattdessen wird der Stoßquerschnitt als eine Schwingungsamplitude der Ionen um ihre Gitterposition modelliert. Die Rechnung hierzu überschreitet allerdings den Rahmen dieses Lehrbuches und es wird stattdessen auf weitergehende Fachliteratur verwiesen [6].

Zusammenfassend kann man aber nun sagen, dass die Quantenmechanische Korrektur der Elektronengeschwindigkeiten über die Fermi-Energie zusammen mit korrigierten Stoßquerschnitten nun letztlich zu einer auch quantitativ richtigen Berechnung der spezifischen Widerstände von metallischen Leitern führt. Was wir aber durch diese Beschreibung noch nicht erfassen können, sind Effekte die offenbar unabhängig von der Elektronendichte in einigen Metallen zu sehr stark abweichenden Leitwerten führen (Isolatoren, Halbleiter). Dafür müssen wir das Modell der freien Elektronen/Elektronengas hinter uns lassen und nun doch die Einflüsse der Ionen auf die Elektronenzustände berücksichtigen.

## Bändermodell

---

### Blochfunktionen

---

Die folgende Erklärung bzw. Herleitung des Bändermodells ist stark verkürzt und verzichtet auf konkrete Rechnungen. Wer diese selbst nachvollziehen möchte, sei auf die etwas detailliertere Fachliteratur verwiesen [7, 2]. Zunächst müssen wir den Begriff eines Energiebandes kurz einführen. In den vorangegangenen Betrachtungen haben wir das Modell eines Elektrons im dreidimensionalen Potentialtopf verwendet. Dies führt bekanntermaßen zu diskreten Energieniveaus, die dann durch die vielen freien Elektronen des Festkörpers aufgefüllt wurden. Es ist nun eine vertretbare Vereinfachung, wenn man sich diese Energieniveaus als ein Kontinuum vorstellt. Die Abstände der einzelnen diskreten Energieniveaus

$$E_{n+1} - E_n \approx \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2$$

sind wegen der “großen” Länge  $L$  immerhin extrem klein. Im bisherigen Bild stellen wir uns also vor, dass ein kontinuierliches Energieband bis zur Fermi-Energie angefüllt ist. Um die Aufteilung der Metalle in Leiter, Isolatoren und Halbleiter zu verstehen, werden wir im Folgenden die Annahme völlig freier Elektronen fallenlassen. Stattdessen soll nun ein einzelnes Elektron<sup>21</sup> in einem periodischen Potential untersucht werden. Die Ursache dieses periodischen Potentials sind natürlich die Ionen des Festkörpers, die nun starr an ihren Gitterpositionen platziert sein sollen. Die Wellenfunktion dieses Elektrons wird nun durch drei Gleichungen beschrieben.

<sup>21</sup> Wir betrachten noch immer keine Wechselwirkung der Elektronen untereinander!

- Die stationäre Schrödingergleichung mit dem Ionenrumpfpotential:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi(\vec{x}) + V(r)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

- Die Periodizität des Potentials:

$$V(\vec{x}) = V(\vec{x} + \vec{T}_{abc})$$

- Die Struktur des Gitters:

$$\vec{T}_{abc} = a \cdot \vec{T}_1 + b \cdot \vec{T}_2 + c \cdot \vec{T}_3 \quad ; a, b, c \in \mathbb{Z}$$

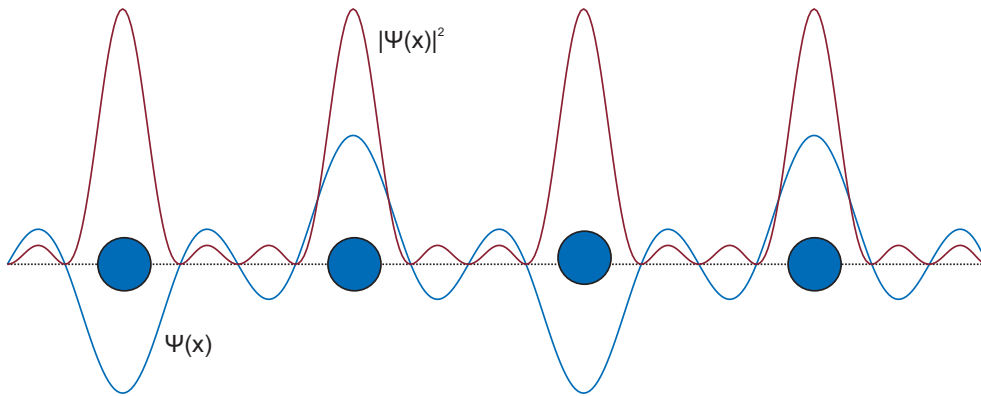
Als Lösung dieser Gleichungen erhält man ebene Wellen, die durch die Gitterperiodizität moduliert sind – die sogenannten *Bloch-Wellen* oder *Bloch-Funktionen*. Diese haben die Form

$$\psi(\vec{x}) = u_k(\vec{x}) \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{T}_{abc}},$$

wobei  $u_k(\vec{x})$  eine periodische Funktion mit dem Gitterabstand als Periodizitätslänge ist. Zur Anschauung sei hier ein sehr einfaches konkretes Beispiel genannt. Die Funktion

$$\psi(x) = A \cdot \sin \pi x \cdot e^{-i2\pi x}$$

erfüllt die Periodizitätsbedingungen und löst daher die Schrödingergleichung. In Abb. 31 ist die Funktion und ihr Betragsquadrat dargestellt. In diesem konkreten Zustand sieht



**Abb. 31.** Beispiel für eine Bloch-Wellenfunktion. In blau ist die Wellenfunktion, in rot ihr Betragsquadrat dargestellt. Die blauen Kreise zeigen die Position der Gitteratome.

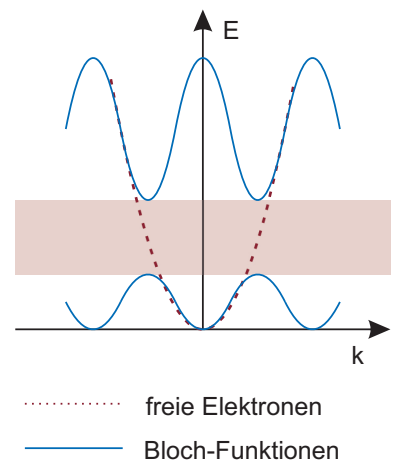
man am Verlauf der roten Kurve (Aufenthaltswahrscheinlichkeit), dass das Elektron sich bevorzugt in der Nähe des Ionenrumpfes aufhält. Auch wenn diese Funktion handlich erscheint, ist es recht schwierig die Energien – Eigenwerte des Hamilton-Operators – zu berechnen. In diesem Rahmen wird auf Details dazu verzichtet um stattdessen die Ergebnisse zu diskutieren. In Abb. 32 ist schematisch das Ergebnis für die Struktur der Energieniveaus gezeigt. Die gestrichelte rote Linie zeigt den Verlauf als Parabel wie wir ihn von einem freien Elektron im Potentialtopf kennen. Die blauen Linien zeigen nun die Ergebnisse für eine Bloch-Funktion: Die möglichen Energieniveaus decken nun nicht mehr den gesamten Bereich der Energieskala ab. Im rot hinterlegten Bereich gibt es keine Lösung der Schrödingelgleichung unter den geforderten Bedingungen. Man spricht hier von einer *Bandlücke*.

ABSCHNITT 23.2

**Bandstrukturen**

Die berechneten Energiebänder mitsamt ihren Bandlücken sind für jeden Festkörper charakteristisch, da dort sowohl die Ionenladung als auch das konkrete Translationsgitter berücksichtigt wird. Die wichtige Frage ist nun, wo liegt jeweils die Fermi-Energie bzw. bis zu welcher Energie sind die Bänder auch tatsächlich von Elektronen besetzt? Die Antwort hierauf wird entscheiden, ob es sich bei dem vorliegenden Festkörper um einen Leiter, Isolator oder Halbleiter handelt.

Für die Leitfähigkeit sind, wenn es denn mehrere gibt, nur die obersten Energiebänder relevant. Das jeweils oberste Band, in dem Elektronen vorhanden sind, nennt man *Valenzband*. Das niedrigste und nicht vollständig besetzte Band nennt man *Leitungsband*. Das Leitungsband ist also immer dasjenige, das die nächsten freien Plätze für die Elektronen bietet.



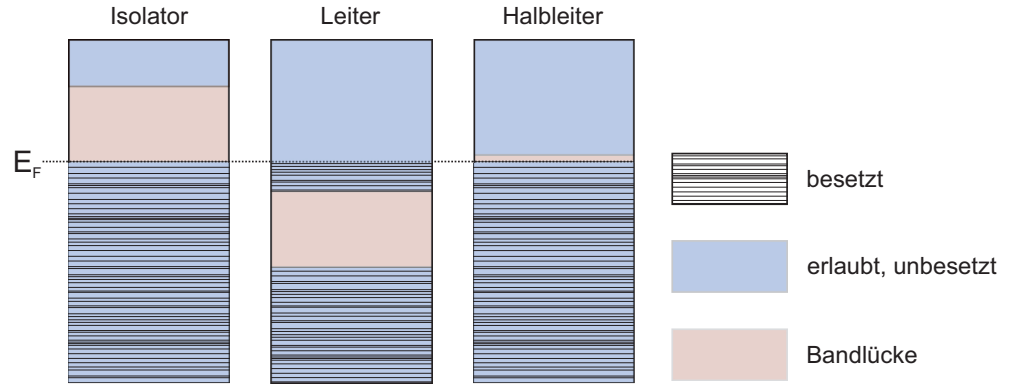
..... freie Elektronen  
 — Bloch-Funktionen

**Abb. 32.** Freie Elektronen besitzen eine quasikontinuierliches Energieband (rote gestrichelte Linie). Wenn man das Gitterpotential berücksichtigt (blaue Kurven), ergeben sich Bandlücken.

**Valenzband/Leitungsband**

- Valenzband: Höchstes Energieband mit Elektronen
- Leitungsband: Niedrigstes nicht vollständig besetztes Band

In Abb. 33 sind verschiedene Bandstrukturen gezeigt. Die Fermi-Energie  $E_F$  ist durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet. Auf der linken Seite führt die gegebene



**Abb. 33.** Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Bandstruktur bzw. deren Besetzung.

<sup>22</sup> Das Fermi-Niveau könnte bei einem Isolator auch innerhalb der Bandlücke liegen.

ne Fermi-Energie zusammen mit der Bandstruktur zur Ausbildung eines *Isolators*. Isolatoren sind dadurch gekennzeichnet, dass das Valenzband vollständig befüllt ist. Über dem Valenzband befindet sich eine “eher große” Bandlücke<sup>22</sup>. Beim Anlegen einer typischen elektrischen Spannung wird die Energie der Elektronen erhöht und sie könnten prinzipiell auch höhere Zustände besetzen – dies ist aber beim Isolator nicht möglich, da auf das Valenzband eine Bandlücke folgt. Die Elektronen können also nicht in das energetisch zu weit entfernte Leitungsband gelangen. Die Leitfähigkeit ist in diesem Fall also extrem gering. Beim Leiter ist die Situation eine andere: Das Leitungs- und das Valenzband sind identisch. Die Fermi-Energie liegt also innerhalb eines besetzbaren Bandes und füllt dieses noch nicht komplett auf. Die Energie eines elektrischen Feldes kann also direkt von den Elektronen aufgenommen werden und sie können energetisch höhere Zustände annehmen und damit zur Leitfähigkeit beitragen. Ein Halbleiter ist im Wesentlichen ein Isolator, jedoch mit sehr geringer Distanz zum Leitungsband. Die Distanz dorthin kann entweder eine kleine Bandlücke (wie in Abb. 33 rechts) bedeuten, oder aber die Fermi-Energie liegt innerhalb einer großen Bandlücke und erreicht schon fast das Leitungsband.





# Kernphysik

ABSCHNITT 24

## Instabile Kerne und Radioaktivität

Radioaktivität kann sowohl künstlich als auch natürlich auftreten. Gemeint ist damit immer ein Umwandlungsprozess innerhalb des Atomkerns. Natürliche Radioaktivität wurde bereits von H. Becquerel<sup>23</sup> im Jahre 1896 beobachtet. Dies geschah beiläufig während Untersuchungen von Fluoreszenz und Röntgeneffekten. Er stellte dabei folgende Tatsachen fest:

- Es gibt Stoffe (Uranerze), die spontan Strahlung aussenden, welche Schichten durchdringt und Photoplatten schwärzt.
- Diese Strahlung ist unabhängig von Fluoreszenz und hat andere Eigenschaften als Röntgenstrahlung

Im Jahr 1899 konnte Rutherford hierzu konkreter feststellen, dass diese Strahlung aus 2 verschiedenen Komponenten mit unterschiedlichem Durchdringungsvermögen besteht. Später werden diese Strahlungsarten  $\alpha$  und  $\beta$ -Strahlung genannt werden. Durch Messungen dieser Strahlung im Magnetfeld (siehe Abb. 34) konnte gezeigt werden, dass eine Strahlung ( $\alpha$ ) aus positiv geladenen Teilchen und die andere ( $\beta$ ) aus negativ geladenen Teilchen besteht. 10 Jahre später wird man durch Massenspektrometer messen können, dass es sich dabei um  $He^+$ -Kerne und Elektronen handeln muss.

ABSCHNITT 24.1

### Zerfallsgesetz

Um den Zerfall zunächst mathematisch zu erfassen geht man zunächst von  $N$  instabilen Teilchen aus. Hier gibt es die Wahrscheinlichkeit  $\lambda = \frac{dP}{dt}$ , dass ein solches Teilchen pro Zeiteinheit zerfällt und damit Strahlung aussendet. Die Änderung der Teilchenzahl ist dann also proportional zur Teilchenzahl gemäß

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N = -A(t) \quad (24.1)$$

wobei man  $A$  als Aktivität bezeichnet. Die Aktivität ist hierbei die physikalische Größe, die man beim Zerfall direkt beobachtet (Zerfälle pro Zeiteinheit). Die Lösung dieser Differentialgleichung ist offensichtlich durch

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (24.2)$$

beziehungsweise in Form der Aktivität

$$A = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t} \quad (24.3)$$

gegeben. Wenn man nun die Aktivität zu verschiedenen Zeitpunkten misst, kann man durch logarithmische Darstellung wie in Abbildung 35 die Zerfallskonstante  $\lambda$  ermitteln. Durch logarithmische Darstellung wird aus Gleichung 24.3 dann

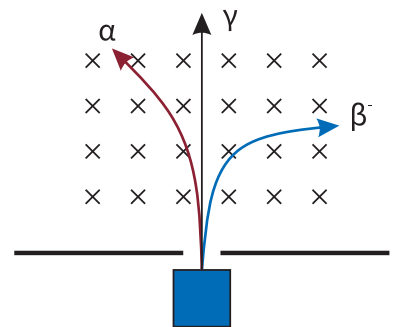
$$\ln(A(t)) = \ln(A_0) - \lambda t \quad (24.4)$$

TEIL

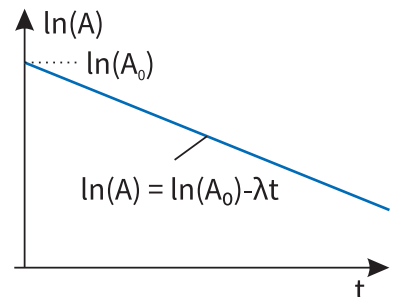
VI

- 24. Radioaktivität
- 25. Strahlungsarten
- 26. Messmethoden
- 28. Schulversuche
- 29. Aufbau der Kerne
- 30. Tröpfchenmodell
- 31. Kernreaktionen
- 32. Altersbestimmung
- 33. Kernspaltung
- 34. Kernreaktoren
- 35. Kernfusion
- 36. Fusionsreaktoren

<sup>23</sup> Ihm zu Ehren wurde die Einheit Becquerel [Bq] eingeführt.



**Abb. 34.** Zur Unterscheidung der radioaktiven Zerfallsarten. Im homogenen Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft unterschiedlich auf die verschiedenen Strahlungsarten.



**Abb. 35.** Zum Zerfallsgesetz. Aktivität in Abhängigkeit der Zeit.

und durch lineare Regression der Messwerte kann man  $\lambda$  ermitteln.

#### ABSCHNITT 24.2

### Halbwertszeit und mittlere Lebensdauer

---

Die mittlere Lebensdauer  $\tau$  und die Halbwertszeit  $t_{1/2}$  sind gängige Größen um die Eigenschaften von Strahlern zu beschreiben. Die mittlere Lebensdauer kann man berechnen, indem man das Zeitmittel<sup>24</sup> über die zerfallenen Kerne bildet:

$$\tau = \bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot \lambda N(t) dt = \frac{N_0}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (24.5)$$

<sup>24</sup> Das wird auch "erstes Moment" genannt.

Nach der Zeit  $\tau$  ist also der Teilchenvorrat, der potentiell zerfallen kann, auf  $(1/e) \cdot N_0$  abgesunken. Man kann auch mit gleicher Aussagekraft die Halbwertszeit angeben. Diese gibt die Zeit an, nach der die Hälfte der Teilchen zerfallen ist. Dies kann man bestimmen durch

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = N_0 e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} \quad (24.6)$$

$$\ln(1/2) = -\frac{t_{1/2}}{\tau} \quad (24.7)$$

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln(2) \quad (24.8)$$

# Strahlungsarten ( $\alpha, \beta, \gamma$ )

## $\alpha$ -Zerfall

In diesem Abschnitt werden die möglichen Strahlungsarten bei Kernzerfällen behandelt. Zuerst wurde die  $\alpha$  Strahlung entdeckt bzw. charakterisiert. Nebelkammeraufnahmen eines natürlichen Strahlers zeigten bei Rutherford eine konstante kinetische Energie der austretenden Strahlung, wie man in Abbildung 36 erkennen kann. Bei manchen Strahlern fand Rutherford auch mehrere, jedoch immer diskrete, Reichweiten der Nebellinien. Durch massenspektroskopische Untersuchungen fand man heraus, dass es sich dabei um Helium-Kerne handeln muss. Wie jedoch kommt es, dass beim Kernzerfall spontan ein Heliumkern ausgesendet wird? Ein Modell, welches den Prozess erklären kann, wurde 1928 von Gamow, Henry und Condon geliefert. In Abbildung 37 ist dies illustriert. Das Potential setzt sich zusammen aus den Kernkräften (nur kurze Reichweite) und der Coulomb-Abstoßung (größere Reichweite). Man nimmt in diesem Modell an, dass im Kern bereits ein alpha-Teilchen existiert. Durch die starke Bindung der Kernkräfte (starke Wechselwirkung) besitzt dieses aber nur eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit durch Energieschwankungen (gemäß  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ ) auf die nötige Energie zum Überwinden der Potentialbarriere zu kommen. Die berechnete Wahrscheinlichkeit kann keinesfalls die beobachteten Energien der Alphastrahlung erklären. Die Energie des Alphateilchens müsste für diesen Fall dann etwa

$$E_{\text{pot}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \tag{25.1}$$

betragen und übersteigt die gemessenen Werte deutlich. Man kann aber hier den Quantenmechanischen Tunneffekt anwenden. Es gibt auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass das Alphateilchen die Potentialbarriere verlassen kann, bevor die berechnete Energie erreicht wurde. Die Alphateilchen haben bei der Energie  $E_\alpha$  das optimale Verhältnis aus Wahrscheinlichkeit der Energieschwankung und Tunnelwahrscheinlichkeit. Die so berechneten Werte – und damit wohl auch das Modell – stimmen dann mit den Messungen überein. Der Zerfallsprozess wird mit einer sogenannten Reaktionsgleichung dargestellt:

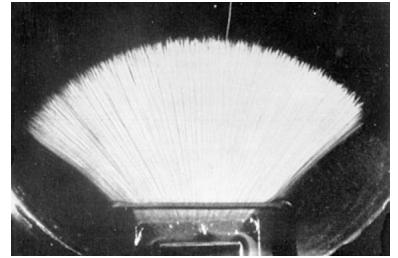


Abb. 36. Nebelkammeraufnahmen zeigen konstante Strahlungsenergie.

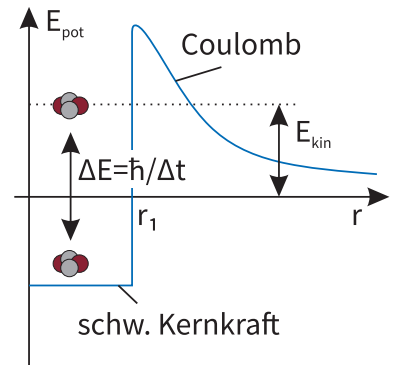
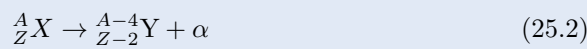
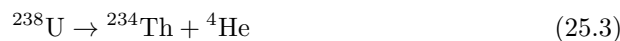


Abb. 37. Modell des Alphazerfalls. Im Kern wird das Alpha-Teilchen durch die schwache Kernkraft gehalten. Zusätzlich muss die Coulomb-Barriere überwunden werden. Der Tunneffekt reduziert die nötige Energie.

### $\alpha$ -Zerfall



Hierbei stellt der hochgestellte Index  $A$  die Massenzahl dar (Summe aller Nukleonen, Neutronen+Protonen) und der tiefgestellte Index die Kernladungszahl  $Z$  (Summe der Protonen). Wenn man die Elemente entsprechend des Periodensystems bezeichnet, ist indirekt auch die Kernladungszahl  $Z$  bereits genannt und wird oft weggelassen. Für den Alphastrahler  ${}^{238}\text{U}$  lautet beispielsweise die Zerfallsgleichung



$\beta$ -Zerfall

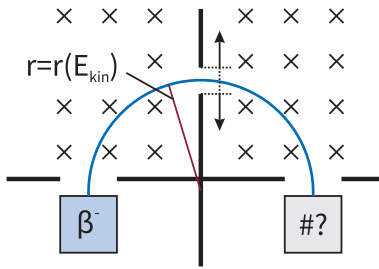


Abb. 38. Versuch zur Messung der Energie der  $\beta^-$ -Strahlung.

Man hat schon fröh bei den Untersuchungen zur atomaren Strahlung neben der  $\alpha$ -Strahlung auch noch eine zweite Art der Strahlung entdeckt. Diese Teilchenstrahlung wurde  $\beta$ -Strahlung genannt und war teils positiv ( $\beta^+$ -Strahler) und teils negativ ( $\beta^-$ -Strahler) geladen. Die Ladung der Teilchenstrahlung konnte man durch Versuche im Magnetfeld, wie in Abb. 38 gezeigt, bestimmen. Dafür muss der direkte Weg von der Quelle zum Detektor blockiert sein, beispielsweise durch eine dicke Bleiplatte. Im Magnetfeld werden nun die Teilchen durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen und erreichen schließlich den Detektor. Die Masse der Teilchen war mit der Elektronenmasse identisch. Außerdem gab es deutlich mehr (etwa doppelt soviel)  $\beta$ -Strahler als  $\alpha$ -Strahler. Beim Experiment in Abb. 38 kann man durch Variation der Magnetfeldstärke die kinetische Energie  $E_{kin}(\beta)$  der Teilchen, die den Detektor erreichen, selektieren und dann die Zählraten dafür bestimmen. Die kreisförmige Bahn mit Radius  $R$  wird dabei durch das Kräftegleichgewicht der Lorentz- und Zentrifugalkraft

$$\frac{m_\beta v^2}{R} = e \cdot v \cdot B \tag{25.4}$$

beschrieben. Daraus erhält man den passenden Impuls und schließlich die kinetische Energie der Teilchen, die genau zum jeweiligen Radius passt:

$$m_\beta \cdot v = p = R \cdot e \cdot B \tag{25.5}$$

$$E_{kin,\beta} = \frac{p^2}{2m_\beta} = \frac{R^2 e^2 B^2}{2m_\beta} \tag{25.6}$$

Es ergibt sich dabei, im Gegensatz zur  $\alpha$ -Strahlung, ein kontinuierlicher Verlauf wie in Abbildung 39. Mit dieser Beobachtung eines kontinuierlichen energetischen Spektrums der Strahlung gibt es nun aber Probleme bei der Erklärung des Zerfallsprozesses.

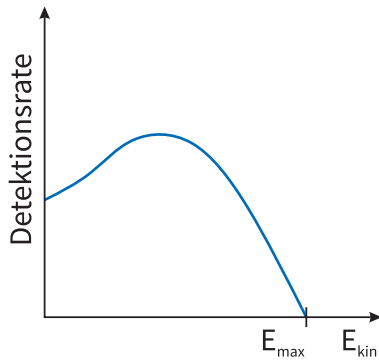


Abb. 39. Kontinuierliches Energiespektrum der  $\beta$ -Strahlung.

- Man versucht zunächst wie beim Alphazerfall einen Zweikörperzerfall zu modellieren. Dann müsste die Impulserhaltung gelten und es müsste folglich bei der Abspaltung einen "Rückstoß" auf den Mutterkern geben. In Nebelkammeraufnahmen ist dies aber nicht immer zu beobachten. Im Gegenteil, es gibt sogar Prozesse, bei denen beide Reaktionsprodukte in die gleiche Richtung bewegen.
- Aus Energie- und Impulserhaltung folgt:

$$E_{kin1} = \frac{p_1^2}{2m_1}; \quad E_{kin2} = \frac{p_2^2}{2m_2} \tag{25.7}$$

$$p_1^2 = p_2^2 \tag{25.8}$$

$$E_{kin1} + E_{kin2} = E_0 = Mc^2 - m_1c^2 - m_2c^2 \tag{25.9}$$

$$E_{kin1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0 = \text{diskrete Werte!} \tag{25.10}$$

- Das Elektron hat einen halbzahligen Spin. Wenn ein Atom ein Elektron aussendet, muss der Gesamtspin erhalten bleiben für alle Reaktionsprodukte. Beim  $\beta$ -Zerfall wird aber oft auch eine Änderung des Spins von  $\neq 1/2$  beobachtet.

Also ist es nicht möglich, dass der Beta-Zerfall ein Prozess von nur 2 Objekten sein kann. Abhilfe für dieses Dilemma schafft die 1930 von Pauli postulierte *Neutrinohypothese*.

### 25.2.1 Neutrinohypothese

Die zentrale Motivation hinter der Neutrinohypothese war es, den Betazerfall zu erklären ohne dabei die Erhaltungssätze von Energie, Impuls und Drehimpuls aufzugeben. Dies konnte dadurch realisiert werden, in dem bei dem Prozess noch ein drittes Teilchen entsteht. Dieses solle dann den "fehlenden" Impuls/Drehimpuls/Energie auf sich nehmen. Zunächst wurde dieses dritte Teilchen Neutron genannt. Mit der Entdeckung des Neutrons als Kernbestandteil mit  $m_p \approx m_n$  1932 wurde der Name in Neutrino (kleines Neutron) geändert. Dieses Neutrino muss einen Spin von  $\hbar/2$  besitzen um die Zerfallsprozesse zu erklären. Die Neutrinohypothese konnte erst 1955 experimentell bestätigt werden, als in Kernreaktoren starke Strahlung für diese Messzwecke verfügbar war.

Gemäß dem Neutrino Modell kann es die beiden folgenden Reaktionen geben:

$$\beta^- \text{-Zerfall : } {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} + e + \bar{\nu} \tag{25.11}$$

$$\beta^+ \text{-Zerfall : } {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} + e^+ + \nu \tag{25.12}$$

Dabei wird  $\nu$  Neutrino und  $\bar{\nu}$  Antineutrino genannt. Die Teilchenstrahlung beim  $\beta^+$ -Zerfall besteht dann also nach Gleichung 25.12 besteht also aus Positronen ( $e^+$ ). Wie der jeweilige Zerfall im mikroskopischen Bild beschrieben werden kann ist in Abb. 40 gezeigt. Demnach werden im Kern selbst ein Proton in ein Neutron bzw. ein Neutron in ein Proton umgewandelt und es entsteht dabei die Beta-Strahlung und die Neutrinos. Es ist also nicht so, dass das Elektron bereits schon vor dem Zerfallsprozess im Kern wartet (wie es beim Alpha-Zerfall der Fall war). Dafür wäre nach  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$  der Impuls und die Energie dieses auf engem Raum (Kernradius) eingesperrten Elektrons gigantisch groß. Stattdessen gibt es den Umwandlungsprozess  $n \leftrightarrow p$ , bei dem das Neutron oder Positron entsteht und sofort den Kern verlässt. In Abb. 40a ist gezeigt, wie sich im Kern ein Neutron in ein Proton umwandelt, um einen energetisch günstigeren Zustand zu besetzen. Die Reaktionsgleichung dafür lautet nun

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu} \tag{25.13}$$

Diese Reaktion findet nur statt, wenn es tatsächlich einen energetisch günstigen Zustand für ein "fehlendes" Proton gibt.<sup>25</sup> Wenn es jedoch, wie in Abb. 40b energetisch günstiger ist, dass ein Proton einen Neutronen-Zustand besetzt, dann kann die über die Reaktion

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \tag{25.14}$$

realisiert werden.

Die Physik und experimentelle Untersuchungen an Neutrinos sind ein sehr intensiv betriebenes Forschungsfeld. Dies liegt vor allem an den spannenden Eigenschaften dieser Elementarteilchen:

- Neutrinos sind die häufigsten Teilchen im Universum
- Neutrinos wechselwirken extrem selten mit anderer Materie. Im statistischen Mittel müsste ein Neutrino 1000 LJ in Wasser zurücklegen, bis es zu einer Wechselwirkung mit einem der Wassermoleküle kommt!
- pro Sekunde strömen  $\approx 10^{12}$  Neutrinos durch den menschlichen Körper!

Aufgrund dieser schwachen Wechselwirkung ist es natürlich sehr schwierig Neutrinos überhaupt nachzuweisen. Im Jahr 1987 gab es eine Supernovaexplosion in 170000 LJ Entfernung mit einer extremen Menge an emittierten Neutrinos. Davon konnten 10 auf der Erde nachgewiesen werden.

<sup>25</sup> Anmerkung: In der Skizze sind die Protonen-Energieniveaus nicht gleich den Neutronenniveaus. Dies liegt an der zusätzlichen Coulomb-Abstoßung der Protonen untereinander.

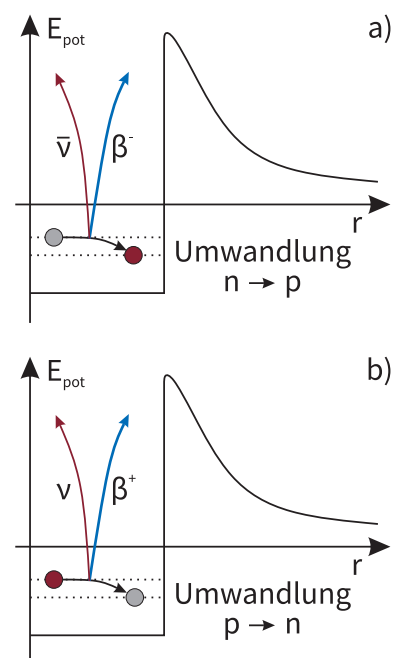


Abb. 40. a) Modell des  $\beta^-$ -Zerfalls. b) Modell des  $\beta^+$ -Zerfalls.

## ABSCHNITT 25.3

 **$\gamma$ -Zerfall**

Bei allen natürlichen radioaktiven Zerfällen gibt es außer der  $\alpha$  und  $\beta$ -Strahlung auch immer hochenergetischen Photonenemission. Diese Strahlungskomponente wird  $\gamma$ -Strahlung genannt. Der Ursprung dieser Strahlung liegt in Energieübergängen im Atomkern mit  $h\nu = E_k - E_i$  ganz analog zu Übergängen in der Atomhülle. Die Unterschiede liegen aber in der Größenordnung dieser Energiedifferenzen: Während in der Atomhülle die Energiedifferenzen im Bereich von  $\Delta E_{\text{Hülle}} \approx 1 - 10 \text{ eV}$  liegen, gibt es im Atomkern Übergangenergien von  $\Delta E_{\text{Kern}} \approx 10^4 - 10^7 \text{ eV}$ .

Eine Anregung der Kerne kann resultieren aus radioaktivem Zerfall instabiler Kerne ("natürliche Gammastrahlung") oder durch gezielten Beschuss stabiler Kerne mit energiereichen  $\gamma$ -Quanten, Neutronen oder Protonen ("künstlich erzeugte Gammastrahlung").

**25.3.1 Konversion**

Es gibt bei einem angeregten Atomkern auch die Möglichkeit, dass dieser seine überschüssige Energie nicht in Form von Photonen, sondern durch Abstoßung eines Elektrons abgibt:



Diesen Prozess nennt man auch inneren Photoeffekt. Er betrifft für allem die 1s-Elektronen, da deren Orbitale den größten Überlapp mit der Kernregion haben.

## ABSCHNITT 25.4

**Wann zerfällt ein Atomkern?**

Es gibt mehrere Bedingungen, bei denen ein Atomkern in den beschriebenen Prozessen zerfallen kann. Notwendig ist jedoch in jedem Fall, dass die Masse des Mutterkerns größer als die der Zerfallsprodukte sein muss:

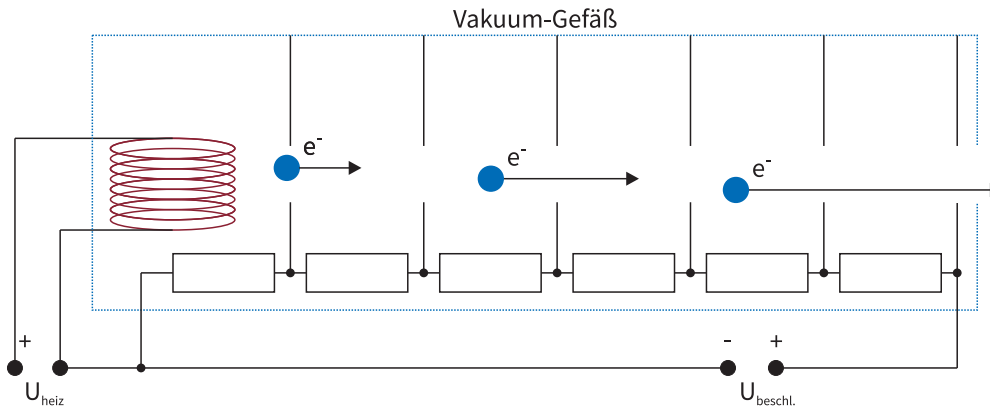
$$M({}^A_Z X) \geq M_1({}^{A'}_{Z'} Y) + M_2 \quad (25.16)$$

Dann ist es grundlegend möglich, dass ein Zerfallsprozess wie  $\alpha$ ,  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  oder eine Kernspaltung stattfindet. Dabei sind Kerne mit gerader Anzahl an Neutronen  $N$  und gerader Anzahl von Protonen  $Z$  besonders stabil. Man nennt diese auch g-g-Kerne. Im Gegensatz dazu gibt es nur 4 stabile u-u-Kerne. Diese sind unter den leichten Elementen zu finden. Alle u-u-Kerne mit  $Z > 7$  sind instabil.

## ABSCHNITT 26

**Messmethoden in der Kernphysik**

Messungen im Bereich der Physik der Atomkerne sind mit viel Aufwand und oft mit Großexperimenten verbunden. Das wohl wichtigste Werkzeug von Physikern dazu sind die Teilchenbeschleuniger. Diese ermöglichen es, Teilchen bis in den keV und MeV-Bereich zu beschleunigen und dann Kollisionen herbeizuführen. Die Energien genügen, um die Energieniveaus der Atomkerne anzuregen und darum etwas über diese zu lernen.



**Abb. 41.** Schematischer Aufbau eines Linearbeschleunigers für negativ geladene Teilchen. Durch den Spannungsteiler fällt jeweils eine identische Spannung zur Beschleunigung ab.

Das Funktionsprinzip von Teilchenbeschleunigern beruht auf der Beschleunigung von geladenen Teilchen durch Potentialdifferenzen. In nicht-relativistischer Betrachtung wird dies durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = q \cdot U \tag{26.1}$$

beschrieben. Die Teilchengeschwindigkeit beträgt dann nach dem Durchlaufen der Potentialdifferenz  $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$  und der Impuls  $p = m \cdot v$ . Wenn die Teilchengeschwindigkeiten aber groß werden, ist es oft nötig relativistisch zu rechnen<sup>26</sup>. Dann muss man auch die relativistische Ruhemasse in die kinetische Energie mit einbeziehen und es ergibt sich

$$q \cdot U = E_{\text{kin}} = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{m(v)}{m_0} - 1\right) m_0c^2 = \alpha \cdot m_0c^2 \tag{26.2}$$

mit dem  $\alpha = E_{\text{kin}}/(m_0c^2)$ , was ein häufig genutzter Parameter zur Beschreibung von Teilchenbeschleunigern ist.

In der technischen Realisierung von Beschleunigern unterscheidet man zwischen Linearbeschleunigern (gerade Flugbahn) und Kreisbeschleunigern (Magnetfeld zwingt Teilchen auf eine Kreisbahn).

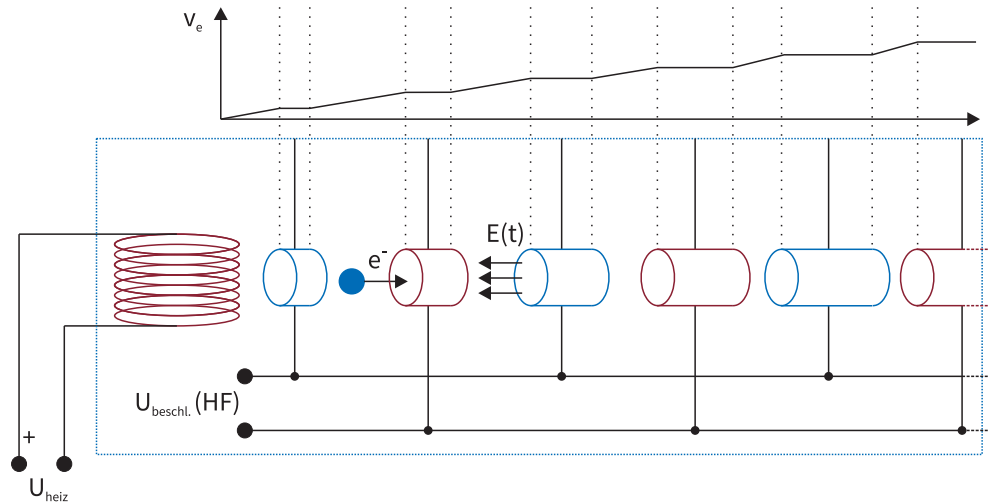
<sup>26</sup> Ab ca. 10% der Lichtgeschwindigkeit ist dies nötig.

ABSCHNITT 26.1

## Linearbeschleuniger

Als Beispiel zur Beschreibung eines Linearbeschleunigers soll hier ein Elektronen-Beschleuniger dienen. In Abb. 41a ist dies schematisch gezeigt. Die Elektronen werden z.B. durch Glühemission an einer Kathode erzeugt. Um die Teilchen einem konstanten Potentialgradienten auszusetzen wird ein Spannungsteiler für die Beschleunigungselemente genutzt. Die Beschleunigungsspannung kann hierbei im MV-Bereich liegen.

In Abbildung Abb. 41b wird ein Beschleuniger für Ionen (positiv geladen) schematisch dargestellt. Die Ionen werden nach der Beschleunigung noch in einem Magnetfeld nach Ladung und Masse selektiert.



**Abb. 42.** Schematischer Aufbau eines Hochfrequenzbeschleunigers. (oben) Verlauf der Geschwindigkeitszunahme. In den feldfreien Röhren findet keine Beschleunigung statt.

ABSCHNITT 26.2

### Hochfrequenzbeschleuniger

Im Linearbeschleuniger aus Abb. 41 ist die maximale Geschwindigkeit durch die angelegte Spannung begrenzt. Um nicht auf diese enorm großen Spannungen angewiesen zu sein, kann man auch auf Wechselspannung zur Beschleunigung ausweichen. In Abb. 42 ist ein solcher Hochfrequenzbeschleuniger gezeigt. Die Beschleunigung findet dabei immer in begrenzten Pulsen statt. Es muss dafür gesorgt werden, dass gerade beim Durchlaufen eines bestimmten Segmentes die Phase/Polung der Spannung für eine Beschleunigung sorgt. Weil die Geschwindigkeit der Teilchen immer zwischen den Magnetfeldringen zunimmt, wird sich auch die Aufenthaltszeit innerhalb der Ringe ändern. Die Länge der Beschleunigungsringe und der Abstand zum nächsten Ring muss also entlang des Weges variiert werden. In einem Ring der Länge  $L$  hält sich das Teilchen mit Geschwindigkeit  $v$  für die Zeit  $\Delta t = L/v$  auf. Diese Zeit muss gerade der halben Periodendauer der Wechselspannung (in der richtigen Polung) entsprechen, damit eine Beschleunigung stattfindet. Das führt zu

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{L}{v} \tag{26.3}$$

Nach  $n$  durchlaufenden Ringen beträgt die Geschwindigkeit der Teilchen

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2nU \cdot Z \cdot e}{m}} \tag{26.4}$$

Zusammen ergibt sich ein Ausdruck für die nötige Frequenz

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{2nU \cdot Z \cdot e}{m}} \tag{26.5}$$

Für den Betrieb ist es technisch wünschenswert, die Frequenz der Beschleunigungsspannung nicht anzupassen sondern konstant zu halten. Dann muss man also gemäß

Gl. 26.5 die Länge der Spulen anpassen, so dass

$$\frac{L}{v} \propto \frac{L}{\sqrt{n}} \tag{26.6}$$

gilt.

ABSCHNITT 26.3

### Zyklotron

Das Zyklotron ist ein Ansatz, Ionen mit kleineren Experimenten zu beschleunigen. Dabei werden die Teilchen, wie beim HF-Beschleuniger, zwischen zwei Elektroden mit Wechselspannung beschleunigt. Nach der Beschleunigung durchlaufen die Teilchen ein Magnetfeld in einer evakuierten D-Förmigen Metalldose. Damit werden sie bei passendem Magnetfeld wieder zurück in den Spalt gelenkt um erneut beschleunigt zu werden. In den Ablenkhälften gibt es kein  $\vec{E}$ -Feld. Für die Bahnradien bei der Ablenkung gilt

$$\frac{mv^2}{r} = q \cdot v \cdot B \quad \rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB} \tag{26.7}$$

Für das Durchlaufen eines Halbkreises braucht das Teilchen die Zeit

$$t_{1/2} = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB} \tag{26.8}$$

Wir haben jetzt die Situation, dass die Teilchen stetig beschleunigt werden und deshalb die Radien kontinuierlich zunehmen. Die Umlaufzeit hängt vom Radius glücklicherweise nicht ab. Die Hochfrequenz muss "nur" so angepasst werden, dass immer wenn die Teilchen den Spalt passieren die korrekte Polarität anliegt. Dies erfordert

$$f_{\text{HF}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2t_{1/2}} = \frac{qB}{2\pi m} \tag{26.9}$$

für die Beschleunigungsspannung. Der Radius der beschleunigten Teilchen nimmt mit größer werdender Geschwindigkeit zu und wird nun wieder durch die Größe des Metallbeckers begrenzt. Die maximal mögliche Energie der Teilchen kann also nach Gl. 26.7

$$E_{\text{max}} = \frac{q^2}{2m} R^2 B^2 \tag{26.10}$$

betragen.

ABSCHNITT 26.4

### Synchrotron

Wenn die Geschwindigkeiten der Teilchen im Synchrotron zu groß werden, muss man die Prozesse relativistisch beschreiben. Dies führt dazu, dass eine konstante Frequenz nicht mehr in der Lage ist die Teilchen weiter effektiv zu beschleunigen. Wenn man ein Zyklotron betreibt, in dem die Frequenz nachgeregelt wird, so nennt man dies *Synchrotron*.

In das Synchrotron werden schon vorbeschleunigte Teilchen mit  $v \approx 0.8 \dots 0.99c$  eingeschossen. Dann werden – ähnlich zum Zyklotron – die Teilchen in Magnetfeldröhren auf eine Kreisbahn gelenkt und in den  $B = 0$ -Bereichen zwischen den Röhren durch Hochfrequenzspannung beschleunigt. Weil hier die Teilchen bei einem konstanten Radius die Kreisbewegung ausführen müssen, muss entsprechend das Magnetfeld

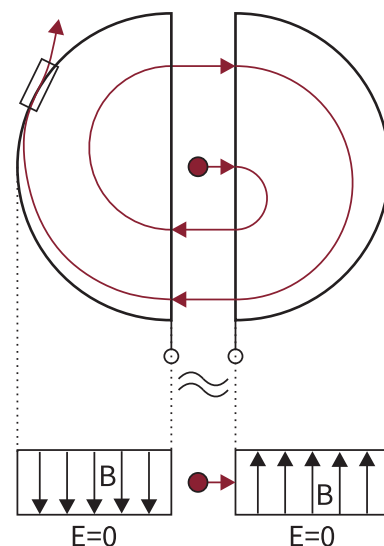
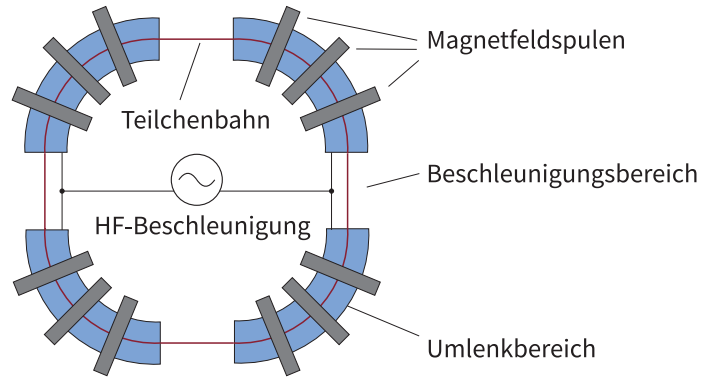


Abb. 43. Schematischer Aufbau eines Zyklotrons.



**Abb. 44.** Schematischer Aufbau eines Synchrotrons. Die Teilchen müssen durch Magnetfelder auf eine Kreisbahn gezwungen werden. Zwischen den Umlenkbereichen erfolgt die Beschleunigung ähnlich dem HF-Beschleuniger.

der Geschwindigkeit der Teilchen angepasst werden. Bei relativistischer Betrachtung muss das Magnetfeld

$$B(v) = \frac{vm}{qr_0} = \frac{v}{qr_0} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (26.11)$$

betragen. Die Beschleunigungsfrequenz muss für Geschwindigkeiten von  $v_1$  bis  $v_2 \approx c$  geeignet sein. Dies entspricht bei  $k$  Beschleunigungssegmenten

$$f_1 = \frac{k \cdot v_1}{2\pi r_0} \quad f_2 = \frac{k \cdot c}{2\pi r_0} \quad (26.12)$$

. Außerdem muss die Frequenz ständig mit der Magnetfeldstärke *synchronisiert* sein:

$$f(v) = \frac{k \cdot v}{2\pi r_0} \rightarrow f(B) = \frac{k}{2\pi \sqrt{\left(\frac{r_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_0}{qB}\right)^2}} \quad (26.13)$$

Das Synchrotrom am CERN ist ebenfalls ein Synchrotron aus 8 Teilsegmenten. In diesem können Protonen oder Bleionen gegenläufig beschleunigt und zur Kollision gebracht werden.

## Detektoren für atomare Strahlung

Ganz allgemein verwendet man Detektoren in der Kernphysik zum Teilchennachweis durch Messung von Energie bzw. Impuls. Dabei wird die Anregung bzw. Ionisation der Elektronenhüllen von Atomen oder Molekülen ausgenutzt. Man teilt Detektoren in folgende Kategorien ein:

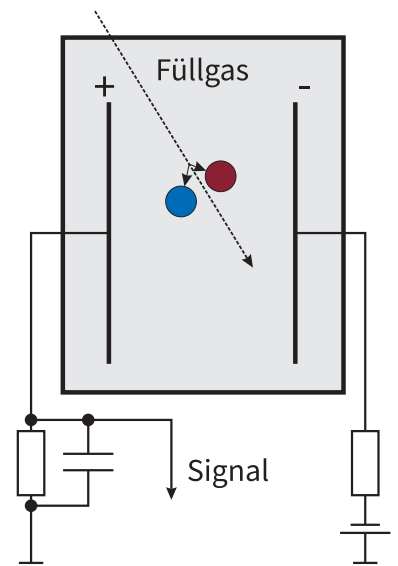
- bloße Nachweisgeräte
- Spurendetektoren
- Energieauflösende Detektoren
- Kombinationen davon

Die *Ionisationskammer* ist der älteste Detektor für atomare Strahlung. Er besteht aus zwei Elektroden, die sich in einer gasgefüllten Kammer befinden (siehe Abb. 45). Die angelegte Spannung muss dabei groß genug sein, um im Falle einer Ionisation durch die Strahlung (gestrichelter Pfeil), die Ionen so stark zu Beschleunigen dass weitere Ionisationen stattfinden. Mit einem Signalverstärker kann dann der so entstehende Strom zur Zählung des Detektorereignisses genutzt werden.

Welche Informationen man aus dem Messsignal ableiten kann, wird durch die angelegte Elektrodenspannung entschieden. Beim Geiger-Müller-Zählrohr liegt eine große Elektrodenspannung an. Unabhängig vom auslösenden Ereignis (kin. Energie oder Art) wird aus jeder Ionisation in der Kammer ein messbares Signal durch vielfach-Ionisation erzeugt. Man kann allerdings durch eine entsprechende Folie vor dem Detektor die  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Strahlung herausfiltern. Beim Zählrohr wird mit dem Strom der Ionen ein Kondensator aufgeladen, dessen Zeitkonstante  $\tau = RC$  beträgt. Bei üblichen Geräten ergibt sich daraus eine "Totzeit" der Messung von  $\approx 10^{-4}$  s, in denen der Kondensator wieder entladen wird bis zur nächsten Messung.<sup>27</sup>

Ein *Szintillationszähler* arbeitet nach einem ähnlichen Prinzip. Hier wird durch Wechselwirkung der zu messenden Strahlung ( $\gamma$  oder  $\beta$ ) ein Photon erzeugt, nachdem entsprechende Zustände im Gas angeregt wurden. In einem nachgeschalteten Photomultiplier wird aus diesem einzelnen Photon ein Lichtblitz erzeugt, der dann gemessen werden kann.

Die Spurendetektoren können die Bahnkurve der Teilchen nachvollziehbar machen. In einer *Nebelkammer* wird Dampf in einem variablen Volumen (durch Kolben) erzeugt. Mit dem Kolben stellt man nun den Druck knapp überhalb des Sättigungsdampfdruck ein. Bei einer kleinen Störung werden sich dann Kondensationskeime bilden, die in der Kammer dann entlang der Teilchenspur sichtbar sind. In einer *Blasen-kammer* ist dagegen eine Flüssigkeit etwas über ihrem Dampfdruck, aber noch knapp unterhalb des Siedepunkts, genutzt. Wenn durch Störung/Energiezufuhr der Druck etwas ansteigt bilden sich Blasen. Dies passiert entlang der Teilchenspur und macht diese so sichtbar.



**Abb. 45.** Zählrohr für ionisierende Strahlung.

<sup>27</sup> Ein Beispiel wäre  $R = 10^8 \Omega$ ,  $C = 10 \text{ pF}$  und entsprechend  $\tau = 10^{-3} \text{ s}$

## Schulversuche im Fachbereich Kernphysik

### Aufbau der Atomkerne

#### Kernbestandteile

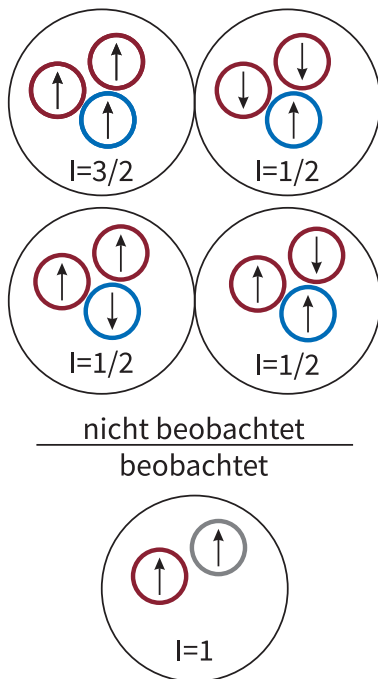
Das erste wirkliche Atommodell, das auch den Kern explizit erwähnt ist das Rutherford'sche Atommodell. Bekannte Teilchen waren bis dahin nur Protonen mit positiver Ladung und Elektronen mit negativer Ladung. Massenmessungen deuteten darauf hin, dass der Kern etwa doppelt so schwer ist wie dessen Protonenmasse. Dies wurde dann zunächst so gedeutet, dass im Kern Protonen und Elektronen zusammen existieren – jeweils doppelt so viele Protonen wie Elektronen. Mit so vielen Elektronen im Kern könnte man auch die  $\beta^-$ -Strahlung gut erklären. Dagegen sprechen aber zwei wesentliche Argumente:

<sup>28</sup> Für  $\Delta r_0 \approx 10^{-15}$  m

- Heisenberg:  $E_{\text{kin,e}} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} \geq \frac{h^2}{2m_e(\Delta r)^2} \approx 10^{11}$  eV!<sup>28</sup>

- Spin-Messungen passen nicht, z.B. Deuteron  ${}^2_1\text{H}$  hat Spin  $1\hbar$

Um zu zeigen, dass die Spinnmessung nicht durch einen Proton-Elektron-Kern erklärt werden kann, hilft die Abb. 46. In 46a sehen wir die möglichen Kombinationen der Protonenspins (jeweils  $1/2$ ) und Elektronenspins(jeweils  $1/2$ ). Beim Deuteron kann es also je nach Richtungsorientierung der Spins nur einen kombinierten Gesamtspin von  $1/2$  oder  $3/2$  geben – dies widerspricht den Messungen. Darum wurde die Masse der Atomkerns durch das Neutronenmodell besser beschrieben. Das Neutron hat in etwa die gleiche Masse wie das Proton, ist Ladungsneutral und hat ebenfalls den Spin  $1/2$ . Demnach verwendet man die folgenden Bezeichnungen in der Kernphysik: Die Kernladungszahl  $Z$  gibt die Anzahl der Protonen an, die Massenzahl  $A$  gibt die Gesamtzahl der Nukleonen an. Der Kern eines



**Abb. 46.** Aufbau der Atomkerne für den Fall 2er Protonen (a) und einem Proton und einem Neutron (b).

<sup>29</sup> Diese starke Kernkraft ist auch für die Bindungen der Quarks innerhalb der Nukleonen verantwortlich

$${}^A_Z X \tag{29.1}$$

Elements besteht also aus  $Z$  Protonen und  $A - Z$  Neutronen. Alle Kerne mit gleichem  $Z$  nennt man Isotope und alle Kerne mit gleichem  $A$  nennt man Isobare.

#### Bindungsenergien der Nukleonen

Die Nukleonen – also die Protonen und Neutronen – sind durch die sogenannte *starke Kernkraft* aneinander gebunden<sup>29</sup>. Diese Kraft hat im Gegenteil zur elektromagnetischen Kraft oder zur Gravitationskraft nur eine sehr geringe Reichweite. Durch diese Kraft besitzen die gebundenen Kerne eine gewisse potentielle (negative) Energie, wenn sie sich in einem gebundenen Atomkern befinden. Die Energie, die man benötigen würde um alle Nukleonen voneinander zu trennen wird *Bindungsenergie*  $E_B$  genannt. Da durch die kurze Reichweite der starken Kernkraft diese selbst innerhalb von größeren

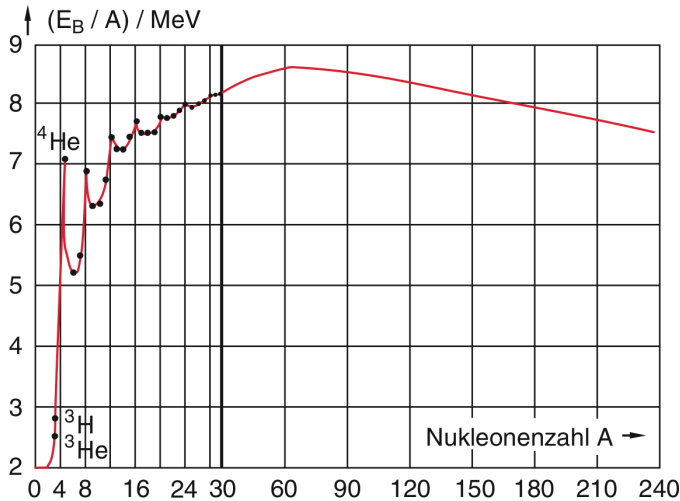


Abb. 47. Bindungsenergie pro Nukleon abhängig von der Nukleonenanzahl.

Atomkernen schon abgeschwächt sein kann, hängt die Bindungsenergie pro Nukleon also von der Gesamtgröße bzw. des Volumens des Atomkerns ab (und auch noch von anderen Faktoren). Der Verlauf von experimentell bestimmten Werten für die Bindungsenergie pro Nukleon ( $E_B/A$ ) ist in Abb. 47 gezeigt. Man sieht dort, dass der Wert zunächst zunimmt, bis er ab der Nukleonenanzahl, die in etwa Eisen/Nickel entspricht, wieder abnimmt.

Durch die Erkenntnisse aus der speziellen Relativitätstheorie, insbesondere dem Energie-Impuls-Satz, kann man nun die Bindungsenergie auch einem Masseäquivalent (oder auch Massendefekt)

$$\Delta M = \frac{E_B}{c^2} \quad (29.2)$$

zuordnen. Dies ist von entscheidender Bedeutung und nicht bloß von theoretischem Interesse! Man fand nämlich heraus, dass nach einer Kernspaltung schwerer Elemente die Summe der Tochterkernmassen  $m_{p,n}$  größer ist als die Mutterkernmasse  $M_K$ :

$$M_K < \sum m_p + \sum m_n \quad (29.3)$$

Diese "fehlende" Masse lag im Mutterkern vor der Spaltung als Masseäquivalent der Bindungsenergie vor. Damit gilt nun

$$M_K = \sum m_p + \sum m_n - \Delta M \quad (29.4)$$

Die Größenordnung dieser bei der Spaltung freiwerdenden Energie liegt im MeV-Bereich und ist damit um viele Größenordnungen größer als die Energien, die bei chemischen Reaktionen frei werden. Ob bei deiner Kernreaktion Die Energie des Massendefektes frei wird, hängt von der Position der Reaktionspartner im  $E_B/A$ -Diagramm ab. Generell kann man sagen: Energie wird frei durch die Fusion leichter Kerne oder die Spaltung schwerer Kerne.

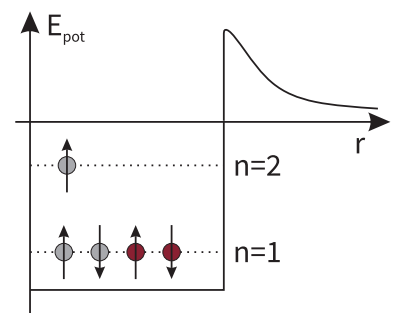


Abb. 48. Kernkraft im Modell eines Potentialkastens.

	${}^2_1\text{H}$	${}^3_1\text{H}$	${}^3_2\text{He}$	${}^4_2\text{He}$	${}^6_3\text{Li}$	${}^7_3\text{Li}$
$n = 1$	$n\uparrow p\uparrow$	$n\uparrow n\downarrow p\uparrow$	$n\uparrow n\uparrow p\downarrow$	$n\uparrow n\downarrow p\uparrow p\downarrow$	$n\uparrow n\downarrow p\uparrow p\downarrow$	$n\uparrow n\downarrow p\uparrow p\downarrow$
$n = 2$					$n\uparrow p\downarrow$	$n\uparrow n\downarrow p\downarrow$
$I =$	1	1/2	1/2	0	1	3/2

Tab. 5. Nukleonenkonfiguration für einige leichte Elemente.

ABSCHNITT 29.3

### Nukleonenstruktur im Kern

Welche Energiezustände die Protonen und Neutronen im Kern besetzen, kann man sich grundlegend durch ein Potentialtopfmodell mit Breite  $a$  klarmachen. Aus der Schrödingergleichung folgen dafür die Energieniveaus

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \tag{29.5}$$

mit der Wellenzahl  $k_n = n \cdot \frac{\pi}{a}$ , die man aus der DeBroglie-Wellenlänge für  $m_p$  und  $m_n$  bestimmen kann. Die Protonen und Neutronen sind Fermionen und haben, wie die Elektronen, einen halbzahligen Spin (+1/2 oder -1/2). Deshalb gilt auch für die Protonen und Neutronen das Pauli-Prinzip: Es dürfen also nur jeweils zwei Protonen und Neutronen das gleiche Energieniveau besetzen<sup>30</sup>. In Abb. 48 ist dies schematisch veranschaulicht. Das unterste Energieniveau ist mit jeweils 2 Protonen und 2 Neutronen mit antiparallelem Spin besetzt. Wenn noch ein Nukleon hinzukommt, muss es auf das nächsthöchste Energieniveau (hier  $n = 2$ ) ausweichen. Nachfolgend werden dann sukzessive die weiteren Niveaus aufgefüllt. In Tab. 5 sind die Nukleonenzustände für einige leichte Elemente gezeigt. In diesem vereinfachten Modell wird allerdings die Abstoßende Wechselwirkung der Protonen vernachlässigt. Die Energieniveaus der Protonen werden sich also immer etwas von denen der Neutronen unterscheiden. Deswegen findet man oft Abbildungen vor, in denen die Energieniveaus des Potentialtopfes von Protonen und Neutronen nebeneinander dargestellt werden. Dies ist in Abb. 49 gezeigt. Die Energieniveaus der Protonen sind dabei um den Betrag der Coulomb-Energie  $E_C$  angehoben.

<sup>30</sup> Dann hat jeweils eines der Teilchen Spin +1/2 und das andere Spin -1/2

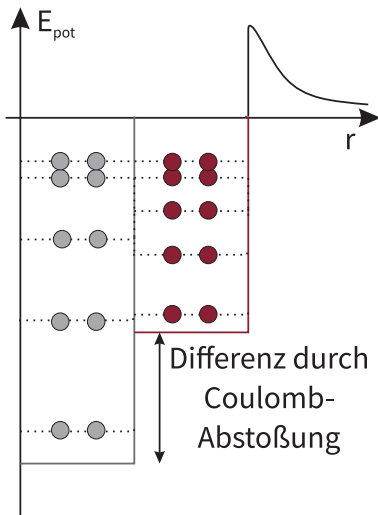


Abb. 49. Getrennter Potentialkasten für Protonen und Neutronen.

ABSCHNITT 30

### Tröpfchenmodell

Wenn man die Bindungsenergie der Nukleonen korrekt für eine große Bandbreite von Kernen modellieren will, muss man viele Kräfte und Effekte berücksichtigen. Im *Tröpfchenmodell* von Carl-Friedrich von Weizsäcker werden diese Kräfte in Analogie der Kräfte in einem Flüssigkeitstropfen modelliert. Dabei bedient sich das Modell 5 verschiedener Anteile:

**Volumenanteil** Dieser Anteil resultiert aus der kurzen Reichweite der starken Kernkraft. Wenn man davon ausgeht, dass in einem Modell aus zusammenliegenden Kugeln die Bindungsenergie nur zwischen den jeweils nächsten Nachbarn wirkt, so sollte die Bindungsenergie pro Volumen linear mit der Anzahl der Nukleonen skalieren, denn mehr Nukleonen bedeuten linear mehr vorhandene Bindungsenergie-Portionen:

$$E_{B1} = +a_V \cdot A \tag{30.1}$$

**Oberflächenenergie** Bei dem Volumenanteil wurde der Einfluss der Oberfläche unterschlagen. Die Teilchen an der Oberfläche haben nur eine kleinere Zahl nächster Nachbarn als die Teilchen im zentralen Bereich. Die Teilchen an der Oberfläche des Kerns sind also etwas weniger stark gebunden als der Rest. Die Oberfläche einer Kugel skaliert mit  $\propto R^2 \propto A^{2/3}$ . Deswegen lautet die notwendige Korrektur für den Oberflächenanteil der Energie

$$E_{B2} = -a_S \cdot A^{2/3} \quad (30.2)$$

**Asymmetrie-Energie** Die Asymmetrie-Energie berücksichtigt das Pauli-Prinzip. Dahingehend ist es energetisch besonders günstig, wenn gleiche Protonen- und Neutronenzahlen vorliegen ( $Z = N$ ). Dies kann man ausdrücken durch den Energieanteil

$$E_{B3} = -a_F \frac{(Z - N)^2}{A} \quad (30.3)$$

**Coulomb-Abstoßung** Hier wird die Coulomb-Abstoßung zwischen den Protonen berücksichtigt. Man kommt durch Auswertung des Coulomb-Potentials für eine homogene Ladungsverteilung über den Kern zur Aussage

$$E_{B4} = -a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (30.4)$$

**Paarungsanteil** Der Paarungsanteil berücksichtigt als empirischer Wert, dass die Energien systematisch für g-g und u-u-Kerne unterschiedlich sind. Ausgedrückt wird das durch den Paarungsanteil

$$E_{B5} = a_P \cdot \sqrt{A} \cdot \delta \quad \begin{cases} +1, & \text{für g-g} \\ -1, & \text{für u-u} \end{cases} \quad (30.5)$$

Damit sind alle wesentlichen potentiellen Energien aufgelistet. In Abb. 50 sind die Anteile in Abhängigkeit der Massenzahl für größere Kerne gezeigt. Die effektive Bindungsenergie (rote Linie) zeigt die bereits bekannte Bindungsenergie pro Nukleon als Bilanz der 5 Energieanteile. Die Zusammenstellung dieses Zusammenhanges wird Bethe-Weizsäcker-Formel genannt:

#### Bethe-Weizsäcker-Formel / Tröpfchenmodell

$$E_B = \Delta M \cdot c^2 = (Zm_p + Nm_n - M_K) \quad (30.6)$$

$$= a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_F (N - Z)^2}{A} - \frac{a_C Z^2}{A^{1/3}} + \frac{\delta a_P}{A^{1/2}} \quad (30.7)$$

Die freien Parameter  $a_i$  werden numerisch an die gemessenen Werte angepasst. Demnach hat die Bethe-Weizsäcker-Formel also immerhin 5 freie Parameter, die durch Curve-Fitting bestimmt werden müssen. Dann sind die Berechnungen auch für messtechnisch schwierig zugängliche Kerne möglich. Für kleine Kerne nimmt die Kurve einen komplizierteren Verlauf wie in Abb. 51. Dies liegt an der engen Abfolge unterschiedlicher g-g und u-u - Kerne.

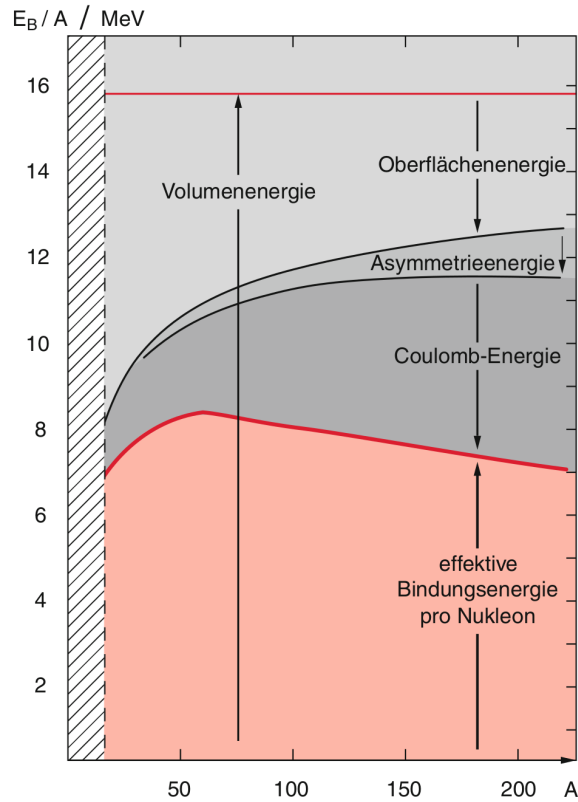


Abb. 50. Energieanteile im Tröpfchenmodell.

ABSCHNITT 31

## Kernreaktionen

Wir wollen nun eine kleine Übersicht über die möglichen Arten von Kernreaktionen erarbeiten. Bisher wurden nur Zerfallsprozesse betrachtet, es gibt aber auch noch andere Möglichkeiten. Die Reaktionsgleichungen werden in zwei gebräuchlichen Formen geschrieben:

$$a + X \rightarrow Y + b \quad (31.1)$$

, was der bisher bekannten Form entspricht. Diese Form wird auch weiterhin im Skript verwendet. In der Kernphysik ist es aber auch gebräuchlich, die Reaktion gemäß

$$X(a, b)Y \quad (31.2)$$

darzustellen. Ein Kern  $X$  geht also in den Kern  $Y$  über unter Beteiligung von  $a$  im *Eingangskanal* und  $b$  im *Ausgangskanal*.

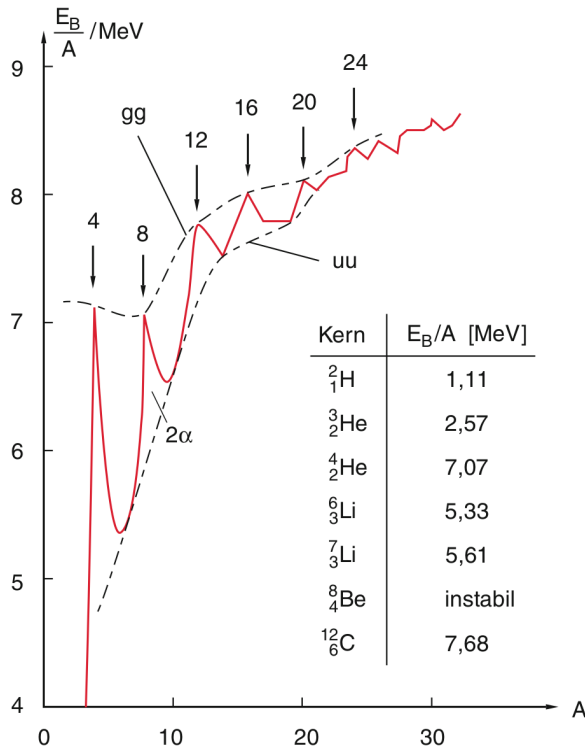


Abb. 51. Bindungsenergien pro Nukleon für leichte Kerne.

#### ABSCHNITT 31.1

### Inelastische Streuung mit Kernanregung

Hier trifft ein Reaktionspartner auf den Kern  $X$  und gibt einen Teil der Energie in einen Anregungszustand von  $X^*$  ab. Der Prozess wird in der Form



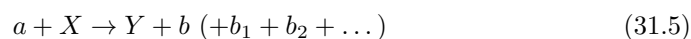
geschrieben. Der angeregte Zustand kann etwa Rotations- oder Schwingungsenergie des Kerns bedeuten. Nach einiger Zeit kann die Anregungsenergie wieder in Form von  $\alpha$ ,  $\beta^{+/-}$  oder  $\gamma$ -Strahlung abgegeben werden durch



#### ABSCHNITT 31.2

### Reaktive Streuung

Diese reaktion stellt eine Umwandlung des Kerns dar. Aus einem Kern  $X$  wird ein Kern  $Y$  mit einem oder mehreren Reaktionsprodukten:



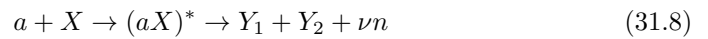
Beispiele für eine solche Umwandlung kann der Protonenbeschuss eines Lithium-Kerns sein:



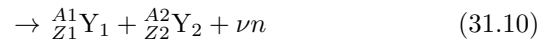
ABSCHNITT 31.3

### Stoßinduzierte Kernspaltung

Dieser Prozess ist die übliche Art, Energie aus Kernzerfällen schwerer Kerne zu gewinnen. Dieser Prozess läuft nach dem Schema



ab. Es gibt zunächst eine kurzzeitige “Verschmelzung” der Reaktionspartner die zu einem angeregten Zustand führt. Dieser zerfällt dann in Bruchstücke und  $\nu$  Neutronen. Ein wichtiges Beispiel ist der Neutronenbeschuss eines Urankerns:



Diese Reaktion lässt sich nur mit energiereichen Neutronen ( $E > 1.5 \text{ eV}$ ) induzieren. Für viele Reaktionen spielen die Energien der Ausgangspartner eine wichtige Rolle um zu entscheiden, welche Reaktion mit welcher Wahrscheinlichkeit stattfindet. Man spricht bei gegebenen Ausgangsvoraussetzungen von einem *Reaktionsquerschnitt* für die jeweilige Reaktion. In Abb. 52 sind die Reaktionsquerschnitte für zwei Prozesse gezeigt. Für den Prozess mit der roten Linie sieht man deutlich einen optimalen Punkt bei etwa 100 MeV um die Reaktion möglichst effizient ablaufen zu lassen.

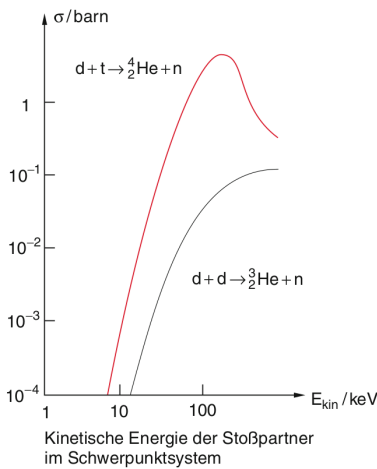


Abb. 52. Reaktionsquerschnitte für zwei Beispielprozesse.

<sup>31</sup> *Zumindest, wenn wir nicht die extremen Energien zur Schaffung neuer Nukleonen betrachten.*

ABSCHNITT 31.4

### Erhaltungssätze für Reaktionsgleichungen

Für das Aufstellen von Reaktionsgleichungen für Kernzerfälle und andere Prozesse gibt es gewisse Erhaltungssätze. So kann man sich zumindest denkbare Reaktionen vorab modellieren. Außerdem kann man so bei bekannten Ausgangspartnern die möglichen Reaktionsprodukte entsprechend einschränken. Die Erhaltungssätze der Kernphysik lauten:

**Erhaltung der Nukleonenzahl** Die Anzahl der an der Reaktionen beteiligten Nukleonen muss erhalten bleiben.<sup>31</sup> Damit gilt also

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad (31.11)$$

**Erhaltung der elektrischen Ladung** Die Anzahl der elektrischen Ladungen muss konstant bleiben. Es muss gelten, dass

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \quad (31.12)$$

**Erhaltung der Gesamtdrehimpulse** Die Gesamtdrehimpulse und auch der (gekoppelte) Bahndrehimpuls müssen erhalten bleiben:

$$J_a + J_X + L_{aX} = J_b + J_Y + L_{bY} \quad (31.13)$$

**Erhaltung der Parität** Die Parität beschreibt die Symmetrie der Wellenfunktion in Bezug auf die Spiegelung am Ursprung. Wesentlich dafür ist der Winkelanteil  $Y_l^m$ : Ist die Drehimpulsquantenzahl  $l$  gerade, so liegt eine gerade Parität vor. Ist sie ungerade, liegt ungerade Parität vor.

ABSCHNITT 32

## Altersbestimmung

---

Mit Methoden der Altersbestimmung beginnen wir nun mit den praktischen Anwendungen der Kernphysik. Durch die Kenntnis der Zerfallsraten bzw. Halbwertszeiten von verschiedenen Elementen kann man Methoden ableiten, um das Alter archäologischer oder neuzeitlicher Funde abzuleiten. Zur Wiederholung, der natürliche radioaktive Zerfall lässt sich durch eine Exponentialfunktion der Form

$$N(t) = N(t_0) \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{32.1}$$

beschreiben. Wenn man also für ein bestimmtes Element  $N$  und  $N(t_0)$  kennt, kann man die vergangene Zerfallsdauer mit

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{N(t)}{N(t_0)} \right) \tag{32.2}$$

berechnen. Für die bekannteste Datierungsmethode, die  $^{14}\text{C}$ -Methode, soll die Altersbestimmung nun erläutert werden.

Kohlenstoff liegt in überwiegendem Anteil als Isotop  $^{12}\text{C}$  vor und ist nicht radioaktiv. Das ebenso mögliche  $^{14}\text{C}$  hat dagegen eine Halbwertszeit von 5730 Jahren und sollte also nach der Entstehung der Erde nicht mehr in der Natur vorkommen. Es gibt jedoch durch Höhenstrahlung der Sonne in der oberen Atmosphäre eine ständige Neuproduktion von  $^{14}\text{C}$  durch den Prozess



Durch natürliche Einflüsse findet das meist als  $^{14}\text{CO}_2$  gebundene Kohlenstoff-Isotop seinen Weg in den natürlichen Kreislauf. Das so eingestellte relativ feste Verhältnis von natürlich vorliegendem  $^{14}\text{C}$  zu  $^{12}\text{C}$  beträgt etwa

$$\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} \approx 1.2 \cdot 10^{-12} \tag{32.4}$$

Alle Pflanzen und Tiere nehmen durch die Luft in irgendeiner Weise das  $\text{CO}_2$  in diesem Verhältnis in den Körper auf. Nach dem Tod wird nun kein neues  $\text{CO}_2$  im Gewebe eingelagert und der Anteil des  $^{14}\text{C}$ -Isotopes verringert sich mit zunehmender Zeit. Durch Messung der Aktivität kann man nun also mit Hilfe des Zerfallsgesetzes auf den Zeitpunkt des Aufnahmestopps von neuem  $\text{CO}_2$  schließen. Durch die Halbwertszeit ist diese Methode gut geeignet für zurückliegende Zeiträume von 1000-7500 Jahren.

Um ältere Objekte, etwa Gestein, datieren zu können braucht es also offenbar Strahler mit deutlich größeren Halbwertszeiten. Die üblichen Elemente hierfür sind Uran und Thorium. Diese zerfallen am Ende ihrer Zerfallsreihe zu Blei. Am Verhältnis von Plei und Uran/Thorium kann man als auch eine Altersbestimmung ableiten. Die ältesten Gesteine wurden demnach auf etwa 4.5 Mrd. Jahre datiert.

## Kernspaltung

Die Spaltung schwerer Kerne gibt es als natürlichen Effekt und man kann Sie künstlich induzieren. Für eine natürliche Kernspaltung muss der Kern in gewisser Weise deformiert (elliptisch) sein. Außerdem muss gemäß Tröpfchenmodell die Coulomb-Abstoßung die Oberflächenenergie übertreffen ( $\Delta E^C > \Delta E^S$ ). Dies ist der Fall für Kerne mit  $Z^2/A \geq 51$ , welche in der Natur nicht mehr vorhanden sind da sie spontan zerfallen.

Die Kernspaltung wie sie in der technischen Anwendung genutzt wird ist eine Form der stoßinduzierten Radioaktivität. Sie wurde 1934 von Irène Curie und Frederic Curie beim Beschuss leichter Kerne mit  $\alpha$ -Teilchen entdeckt. Die beschossene Substanz emittierte dabei auch nach dem Beschuss noch  $\beta$  und  $\gamma$ -Strahlung. Die durch Stöße erzeugten Radioaktiven Stoffe nennt man künstliche radioaktive Stoffe. Durch Neutroneneinfang werden meist  $\beta^-$ -strahlende Isotope erzeugt. Diese induzierte Spaltung leichter Kerne mit Neutronen ist besonders effektiv, da diese keine Coulomb-Barriere überwinden müssen. Solche Reaktionen können als Nachweisreaktionen oder auch zur Absorption (Neutroneneinfang) in Kernreaktoren genutzt werden. Mögliche Reaktionen sind hierbei etwa

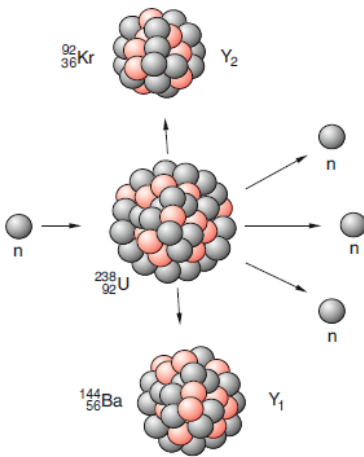
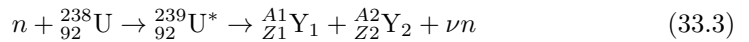
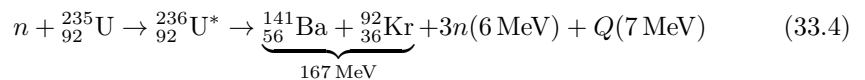


Abb. 53. Illustration der  ${}^{238}\text{U}$ -Spaltung.

Die induzierte Spaltung schwerer Atome ist es jedoch, die eine Energiegewinnung ermöglicht. 1934 wurde Urankerne mit Neutronen beschossen. Die Reaktion in Abb. 53 beruht auf der Reaktionsgleichung



Bei diesen Versuchen wurde von Otto Hahn und Fritz Straßmann unter anderem Barium als Reaktionsprodukte gefunden, welches etwa halb so schwer wie Uran ist. Lise Meitner fand heraus, dass beide Tochterkerne der Reaktion etwa gleich schwer sind. Es war also nun zweckmäßig, von der Spaltung des Atomkerns auszugehen. Diese Spaltungsreaktion setzte allerdings erst bei kinetischen Energien der Neutronen ab  $E_{kin,n} \geq 1 \text{ MeV}$  ein. Für eine kontinuierliche Energiegewinnung ist dies nicht zweckmäßig. Einen viel besseren Wirkungsquerschnitt auch bei langsamen Neutronen hat die Reaktion



Die Reaktion setzt eine Energie von 180 MeV frei, aber auch die Spaltprodukte erzeugen zeitverzögert noch selbst weiter Energie durch Freisetzung von  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung. Insgesamt wird, einschließlich der Tochterkernstrahlung die Energiemenge von 210 MeV frei. Das ist etwa  $10^7$ -mal soviel wie bei chemischen Reaktionen. Bereits früh wurde das Potential der Atomenergie für die Energiegewinnung aber auch für die militärische Nutzung erkannt.

# Kernreaktoren

Kernreaktoren nutzen üblicherweise die Reaktion aus Eq. 33.4 aus um Wärmeenergie zu erzeugen. Im Vergleich zur Verbrennung von Kohle ( $C \rightarrow CO_2 : 13 \text{ eV}$ ) wird wesentlich mehr Energie frei. Die Grundidee zur Energiegewinnung basiert auf der sogenannten Kettenreaktion: Die bei der Spaltung freiwerdenden Neutronen sollen die folgende Reaktion einleiten usw. Der Reaktionsquerschnitt ist aber für langsame Neutronen optimal obwohl bei der Reaktion schnelle Neutronen erzeugt werden. Man nutzt deshalb einen sogenannten Moderator um die Neutronen abzubremsen wie in Abb. 54 gezeigt wird. Diese Moderatoren arbeiten effizient, wenn sie aus leichtem Material wie Wasser oder Graphit bestehen. Leider werden vom Moderator die Neutronen nicht nur abgebremst sondern auch absorbiert – man muss daher einen Kompromiss zwischen Abbremsfähigkeit und Absorption eingehen. Wir wollen nun untersuchen, wieviele Neutronen aus jeder Kernreaktion wieder für eine erneute Kernreaktion nutzbar sind. Dies ist abhängig von der

- mittleren Entstehungsrate langsamer Neutronen  $\eta$
- mittleren Entstehungsrate schneller Neutronen  $\epsilon$
- Wahrscheinlichkeit, dass die Neutronen ungenutzt entweichen  $p$
- Wahrscheinlichkeit, dass die Moderation korrekt wirkt  $f$

Zusammenfassend gilt dann für die verfügbaren Neutronen  $N_{n+1}$ :

$$N_{n+1} = \eta \cdot \epsilon \cdot p \cdot f \cdot N_n = k_\infty N_n \tag{34.1}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist offenbar eine Exponentialfunktion

$$N = N_0 e^{\frac{(k_\infty - 1) \cdot t}{T}} \tag{34.2}$$

mit der sogenannten Zykluszeit  $T$ . Damit ein stabiler Prozess abläuft, muss offenbar  $k_\infty = 1$  gelten. In der Praxis arbeitet man mit einem etwas angewandelten Parameter, der Reaktivität  $\sigma$  mit

$$\sigma = \frac{k - 1}{k} \tag{34.3}$$

Dieser Parameter soll nun für den stabilen Betrieb eines Kernreaktors, also eine konstante Anzahl an Spaltreaktionen, möglichst Null sein.

## ABSCHNITT 34.1

### Anreicherung

Für den Betrieb eines Kernreaktors möchte man mit der Spaltung von  $^{235}_{92}\text{U}$  nach Reaktion 33.4 arbeiten, da sich diese Reaktion mit einem Moderator kontrollieren lässt in Bezug auf die Neutronenvervielfältigung. Dafür braucht man allerdings künstlich aufbereitetes Uran, da in natürlich vorkommendem Uran der Anteil des  $^{235}_{92}\text{U}$ -Isotopes nur 0.7% beträgt. Für eine Nutzung in Kernreaktoren ist ein Anreicherungsgrad von 2 – 3% nötig – bei kernwaffenfähigem Spaltmaterial muss der Anteil bei fast 100% liegen.

Um gezielt den Anteil von  $^{235}_{92}\text{U}$  zu erhöhen, nutzt man meist Gaszentrifugen. Dabei wird ausgenutzt, dass die Isotopen eine geringfügig unterschiedliche Masse  $M(^{238}\text{U}) > M(^{235}\text{U})$  besitzen. Das als  $\text{UF}_6$  gasförmig vorliegende Uran kann man mit

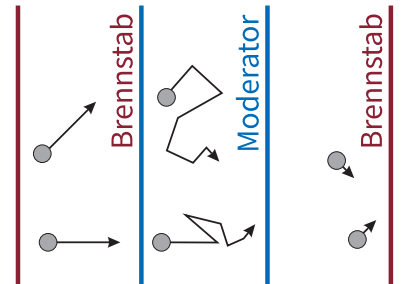


Abb. 54. Moderator-Prinzip zur Kontrollierten Kernspaltung.

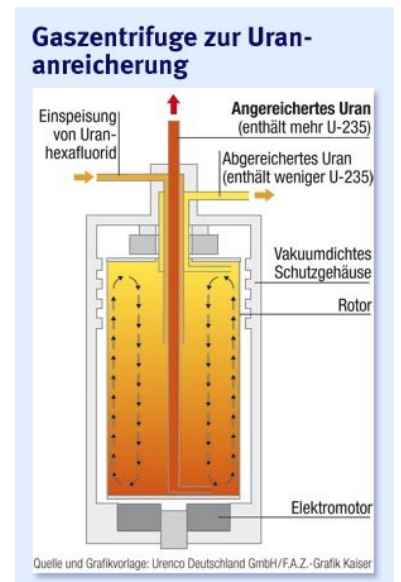


Abb. 55. Gaszentrifuge zur Urananreicherung.

einer Zentrifuge wie in Abb. 55 dann in seine Isotopenbestandteile zerlegen. Wenn die Bestandteile getrennt sind, entnimmt man aus dem zentralen Bereich der Zentrifuge die "leichteren" Anteile und wiederholt den Prozess bis zum gewünschten Anreicherungsgrad. Durch einen Temperaturgradienten wird die Trennung noch unterstützt. Dieses einfach klingende Prinzip ist technisch extrem schwierig umzusetzen und damit gleichzeitig der Grund, warum nicht einfach jedes Land atomwaffenfähiges Material herstellen kann. Die Zentrifugen müssen sich mit etwa 60000 U/min drehen, was eine extreme Belastung für die Werkstoffe bedeutet. Nur bei hochfesten Werkstoffen und perfekter Fertigung sind solche Gaszentrifugen funktionsfähig.

Als Nebenprodukt der Anreicherung entsteht auch abgereichertes Uran mit einem Anteil von 0.3% von Uran-235. Dieses Material ist nur sehr schwach radioaktiv und kann als Wertstoff betrachtet werden. Wegen seiner hohen Masse (doppelt so schwer wie Blei!) und Festigkeit wird es beispielsweise als Gegengewicht in Flugzeugtragflächen oder aber auch für Uranmunition verwendet.

#### ABSCHNITT 34.2

### Aufbau und Funktion eines Kernreaktors

---

#### 34.2.1 Reaktorkern

Wenn durch Anreicherung eine Material mit ausreichendem Anteil an reaktorfähigem Material vorliegt, kann dies für Brennelemente genutzt werden. In Abb. 56 sind diese gezeigt. Das Uranoxid wird in Tablettenform gepresst und in einem Zirkon-Stab eingeschweißt. Entstehende Gase des Spaltprozesses sollen die Brennstäbe nicht verlassen können und es soll auch kein Wasser eindringen und sich mit dem Uranoxid vermischen. Mehrere Brennstäbe werden nun zu einem Brennstab vereinigt, der von Wasser durchflossen werden kann. Dieses durchfließende Wasser nimmt die produzierte Wärmemenge des Brennelementes auf, die später in elektrische Energie umgewandelt werden kann. Mehrere dieser Brennelemente sind dann nebeneinander zum Reaktorkern zusammengefasst. Zwischen den Brennelementen befinden sich dabei sogenannte Steuerstäbe. Diese können in ihrer Eintauchtiefe zwischen den Brennelementen reguliert werden. Die Steuerstäbe absorbieren und bremsen Neutronen und können so die Kettenreaktion, im Zusammenspiel mit dem Moderator, regulieren. Ein völliges Eintauchen der Steuerstäbe stoppt die Kettenreaktion. Es gibt zwei mögliche Varianten, den Spaltstoff mit dem Moderator zu kontrollieren. Der *homogene* Ansatz sieht vor, dass Spaltstoff und moderator miteinander vermischt im Brennstab platziert werden. Der *heterogene* Ansatz, der heute überwiegend genutzt wird, sieht vor dass Spaltstoff und Moderator voneinander getrennt platziert werden.

#### 34.2.2 Reaktoraufbau

Der zentrale und wesentlichste Bereich eines Kernreaktors ist der Reaktorkern. In Abbildung 57 befindet sich dieser links im Reaktordruckbehälter. Als Moderator kommt heutzutage im Wesentlichen Wasser zum Einsatz. Ältere Reaktoren sowjetischer Bauart (z.Bsp. Tschernobyl) nutzen Graphit als Moderator. Wassermodierte Reaktoren unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl ihrer Wasserkreisläufe: Bei nur einem Kreislauf (*Siedewasserreaktor*) wird das Wasser am Reaktorkern erwärmt und zur Wärmeabgabe an die Turbine weitergeleitet. *Druckwasserreaktoren* (siehe Abb. 57) dagegen haben einen Hochdruckwasserbereich um die Wärmemenge vom Reaktorkern aufzunehmen. In einem Dampferzeuger wird die Wärme an einen zweiten Wasserkreislauf übertragen der zur Energieerzeugung genutzt wird. Wegen der enormen Wärmemenge die produziert wird ist es zweckmäßig mit Wasser runter hohem Druck zu arbeiten. Bei 150 bar ist das Wasser bis zu einer Temperatur von 330°C noch flüssig. Um die produzierte Wärmemenge von 3 GW abzutransportieren muss man 70000 t Wasser

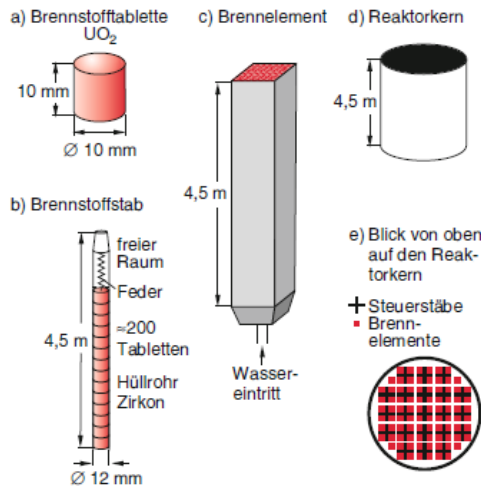


Abb. 56. Zusammensetzung eines Reaktorkerns für kontrollierte Kernspaltung.

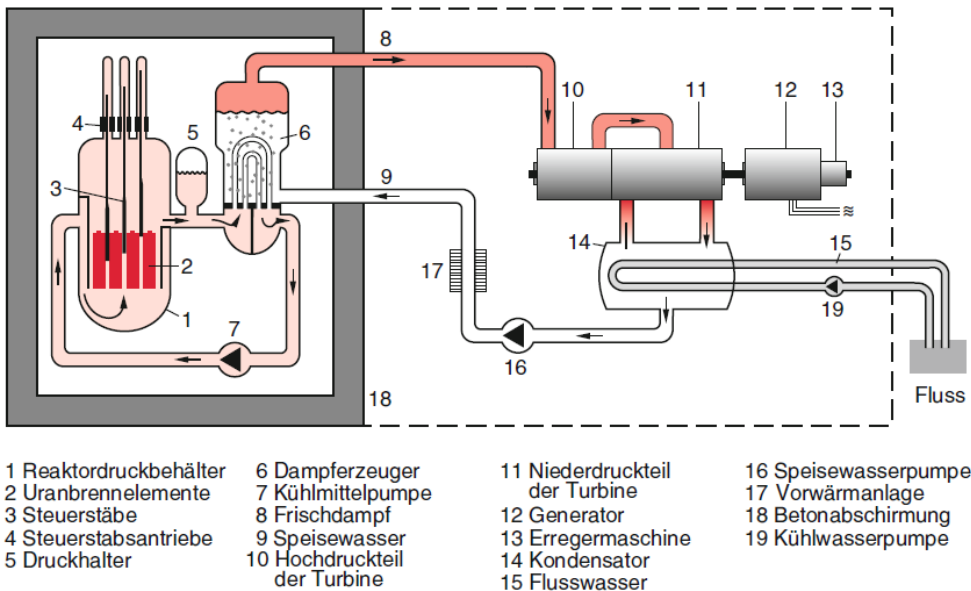
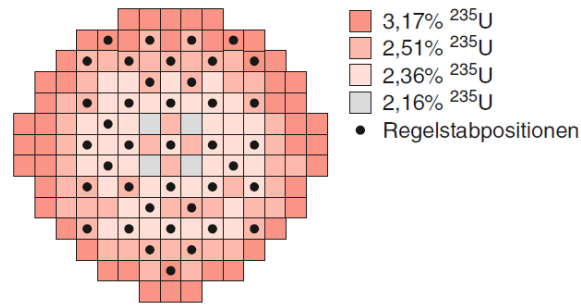


Abb. 57. Schematischer Aufbau eines Kernreaktors.

pro Stunde durch den Reaktorkern pumpen. Im Sekundärkreislauf beträgt der Druck dann noch 66 bar. Die getrennten Kreisläufe haben den Vorteil, dass das Reaktorkühlwasser nicht direkt mit der Turbine und dem Kondensator in Kontakt kommt und so eine Kontaminierung gering gehalten wird.

### 34.2.3 Steuerung eines Kernreaktors

Um im Reaktorkern die Kettenreaktion erstmalig in Gang zu setzen, muss mit einer externen Neutronenquelle eine ausreichende Menge an Spaltungsprozessen erzwungen werden. Während des Hochfahrens ist also  $\sigma > 0$ . Dann wird durch das Wasser als Moderator die passende Menge an langsamen Neutronen durch Abbremsung er-



**Abb. 58.** Reaktorkern im Betrieb mit gebrauchten Brennelementen. Ein Sukzessiver Tausch der Brennelemente nutzt die Kapazitäten bestmöglich aus.

zeugt um den Prozess selbstständig laufen zu lassen. Um eine Regelungsmöglichkeit zu haben werden die Steuerstäbe aus neutronenabsorbierendem Material (z.B. Bor) zwischen die Brennstäbe gesenkt oder herausgehoben. Die thermische Leistung im Betrieb liegt bei etwa 40kW pro kg Uran. Pro Jahr werden in einem Reaktorkern etwa 30 t Uran-Dioxid verbraucht - es ist also ein Austausch des Brennmaterials nötig. Dies geschieht sukzessive, in dem wie in Abb. 58 die verbrauchten Brennstäbe aus dem Zentrum entfernt werden. Die äußeren Brennstäbe sind geringerer Neutronenbelastung ausgesetzt und es gibt dort also noch eine größere <sup>235</sup>-U Konzentration. Diese Brennstäbe werden mehr und mehr in den zentralen Bereich getauscht.

Natürlich spielen die Sicherheitsaspekte beim Betrieb eine zentrale Rolle, da bei Fehlern im Ablauf katastrophale Unfälle auftreten können. Die wesentlichen Punkte dabei sind:

- Die Kettenreaktion/Neutronenzahl muss kontrollierbar bleiben.
- Wärmeabfuhr vom Kern muss gesichert sein, damit es nicht zu einer Überhitzung kommt.
- Entstehende ionisierende Strahlung muss von der Außenwelt abgeschirmt werden.
- Das radioaktive Material beim Betrieb/Transport/Abfall darf nicht in die Biosphäre gelangen.

#### 34.2.4 Kontrolle der Kettenreaktion

Wie bereits erwähnt ist die Reaktivität  $\sigma$  hier der ausschlaggebende Parameter. Er bilanziert die Neutronenverarmung und Neutronenvermehrung durch Spaltprozesse. Problematischerweise hängt diese Reaktivität  $\sigma = \sigma(T)$  von der Temperatur ab. Dies wird bedingt durch zwei wesentliche Einflüsse:

- Wenn durch erhöhte Temperatur ein Teil des moderierenden Wassers verdampft, sinkt die Effektivität der Neutronenabbremung. Dies wird auch "Dampfblaseneffekt" genannt. Die Reaktivität sinkt.
- Wenn durch erhöhte Temperatur ein Teil des moderierenden Wassers verdampft, werden weniger Neutronen absorbiert. Die Reaktivität steigt.

Insgesamt wird der erste Effekt aber dominant, so dass  $\frac{\partial \sigma(T)}{\partial T} < 0$  gilt. Dies bedeutet, dass die Kettenreaktion beim Verdampfen des Kühlwassers zum Erliegen kommt – was einen sehr wichtigen Sicherheitsaspekt darstellt.<sup>32</sup> Die Reaktivität des Tschernobyl-Reaktors hatte einen positiven Reaktivitäts-Gradienten  $\frac{\partial \sigma(T)}{\partial T} < 0$ .<sup>33</sup>

<sup>32</sup> Dies schließt allerdings keine Kernschmelze aus!

<sup>33</sup> Auch der Tschernobyl-Reaktor konnte "sicher" betrieben werden. Vielfache Bedienfehler waren für den Unfall verantwortlich.

### 34.2.5 Kontrolle der Wärmeabfuhr

Selbst wenn die Kettenreaktion im Falle einer Havarie kontrolliert werden kann, bleibt es wichtig die entstehende Wärme anzuführen. Die Spaltprodukte zerfallen selbst etwas zeitverzögert und geben dabei auch nach dem Ende der Kettenreaktion noch enorme Abwärme frei. Dies bedeutet etwa 5 – 8% der regulären Betriebswärme, bei einem 3 GW-Reaktor sind dies also noch 240 MW Abwärme. Dieser Effekt wird auch als *Nachwärme* bezeichnet. Diese Wärmemenge muss noch stundenlang nach dem Abschalten des Reaktors abgeführt werden damit der Reaktorkern nicht überhitzt und schmilzt. In Fukushima waren die Kühlmittelpumpen durch den Tsunami zerstört worden, so dass es trotz heruntergefahrenem Reaktor zur Kernschmelze kam.

### 34.2.6 Strahlenschutz

Während des Betriebes ist der Reaktorkern eine intensive Strahlungsquelle. Einerseits entstehen viele Neutronen, die den Reaktorkern verlassen können, andererseits sind die Spaltprodukte selbst künstlich erzeugte  $\beta/\gamma$ -Strahler. Durch die Neutronen werden alle Wände und Rohre die in Kontakt mit radioaktivem Material stehen aktiviert und so zu instabilen Isotopen. Deswegen ist also auch der Reaktor und viel Material nach der Nutzung radioaktiv und muss entsprechend gelagert/entsorgt werden. Einziges Mittel die Umwelt und Menschen vor dieser Strahlung zu schützen, besteht in der Verwendung von mehreren Schutzbarrieren:

- verschweißte Zirkonrohre um die  $\text{UO}_2$ -Tabletten
- Reaktordruckgefäß aus 17 cm dickem Stahl. Druckfestigkeit bis über 150 bar
- Sicherheitsbehälter aus Beton mit Dichthaut
- Rückhaltebecken für flüssige Stoffe

ABSCHNITT 35

## Kernfusion

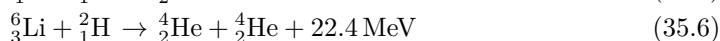
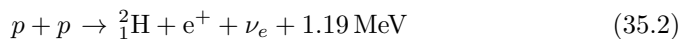
---

Neben der Kernspaltung gibt es noch einen anderen thermonuklearen Prozess, der (sehr wahrscheinlich) zur Energiegewinnung genutzt werden kann. Dabei wird durch das Verschmelzen zweier leichter Kerne zu einem schwereren Bindungsenergie freigesetzt. Die Bedingung für diese Verschmelzung ist, dass die Coulomb-Barriere – Atomkerne sind immer positiv geladen – überwunden werden muss. Eine grober Schätzwert wäre dafür eine Annäherung bis zum Einsetzen der anziehenden Kernkräfte der Kerne 1 und 2 bei den Abständen  $r_1$  und  $r_2$ :

$$E_{\text{kin}} \geq \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0(a_1 + a_2)} \quad (35.1)$$

Tatsächlich müssen wir hier auch den Tunneleffekt berücksichtigen und dies führt bei bereits etwas geringeren Energien zu Fusionsreaktionen. Für eine technische Realisierung ist bereits an Gl. 35.1 zu erkennen, dass sich sehr leichte Kerne am besten eignen, da die Coulomb-Barriere mit zunehmender Kernladungszahl zunimmt. Außerdem ist nur bei einer Fusion zu einem Kern mit  $A < 56$  ein Energiegewinn möglich (siehe Abb. 47). Kernfusion ist der Prozess, der natürlich im Inneren der Sonne abläuft und deren Energiequelle darstellt. Beim dort herrschenden extremen Druck und

Temperatur laufen die folgenden Reaktionen ab:



Man darf sich durch die zur Kernspaltung vergleichsweise geringen Energien der Fusionsreaktionen nicht täuschen lassen. Die Massen der genutzten Elemente sind deutlich geringer als bei den schweren Elementen die man zur Kernspaltung nutzt. Die Energie pro kg Brennstoff sind hier wesentlich größer! Der schwerwiegende Nachteil der technischen Kernfusion sind allerdings die schwierigen Reaktionsbedingungen. Zuerst konnte die Kernfusion, wie auch die Kernspaltung, im militärischen Bereich realisiert werden: Durch eine bestimmte Menge Wasserstoff im Inneren einer Atombombe konnte deren Wirkung um ein Vielfaches gesteigert werden – man spricht hier dann von einer Wasserstoffbombe. Die Kernspaltungsreaktion bewirkt hierbei die nötigen Temperaturen und den hohen Druck der für die Fusion nötig ist und dient damit als Zünder.

#### ABSCHNITT 36

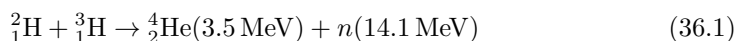
## Kontrollierte Kernfusion

---

Seit bereits 70 Jahren wird an der Realisierung der technisch genutzten Kernfusion gearbeitet. Diese dauerhafte und teure Anstrengung hat mehrere Gründe:

- das Energieausbeute/Masse - Verhältnis ist nochmals größer als bei der Kernspaltung
- Die Ausgangsstoffe (Wasser, "geringe Mengen" Lithium) sind nahezu unbegrenzt verfügbar
- Reaktionsprodukte sind Helium und Reaktorteile mit sehr kurzlebiger Radioaktivität<sup>34</sup>
- Die Reaktion kann niemals selbstständig ablaufen, sondern muss ständig aktiv unterstützt werden. Eine "Fusionsexplosion" ist sogar theoretisch unmöglich.

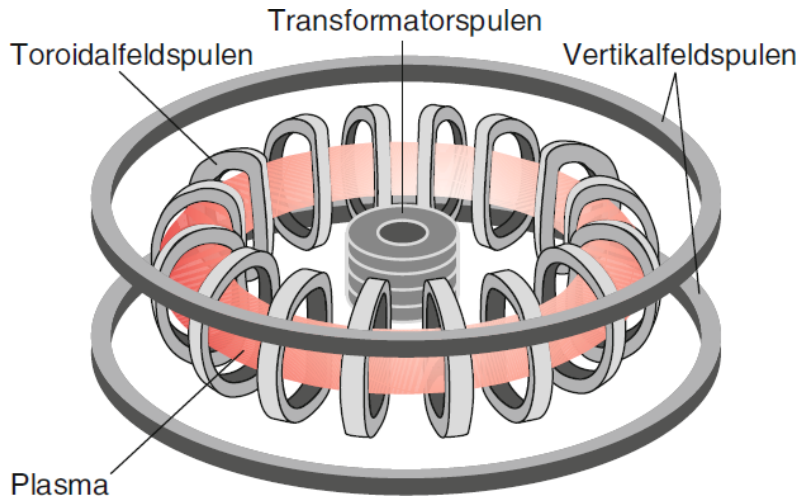
Damit ist also die Kernfusion die perfekte Energiequelle für die Zukunft! Einziges Problem ist die überaus schwierige Realisierbarkeit. Die Brennstoff-Kerne müssen über relativ lange Zeit bei hoher Temperatur zusammengebracht werden um genügend Fusionsreaktionen zu erzwingen. Als aussichtsreichster Kandidat für einen Fusionsreaktorbetrieb gilt die Fusion von Deuterium und Tritium gemäß



Diese Reaktion hat den günstigsten Wirkungsquerschnitt bei verhältnismäßig großer nutzbare Energieausbeute. Im Folgenden sollen nun die gegenwärtigen Konzepte zur Nutzung dieser Reaktion dargestellt werden:

**Magnetischer Einschluss** Das Deuterium und Tritium wird in geeigneten Magnetfeldern eingeschlossen und erhitzt.

<sup>34</sup> *Einen außer Betrieb gesetzten Fusionsreaktor könnte man nach wenigen Jahren Wartezeit ganz regulär abreißen.*



**Abb. 59.** Tokamak-Reaktor. Alle Spulen Zusammen erzeugen das Magnetfeld und den Heizstrom.

**Trägheitsfusion** DT-Pellets werden mit leistungsstarken Lasern beschossen und so zur Fusion gebracht.

**Myonenkatalysierte Fusion/“Kalte Fusion”** Durch Myonen als Katalysator findet die Fusion unter Umgebungsbedingungen statt. Durch den Energieaufwand zur Erzeugung der Myonen gibt es keinen Netto-Energiegewinn!

#### ABSCHNITT 36.1

### Magnetischer Einschluss

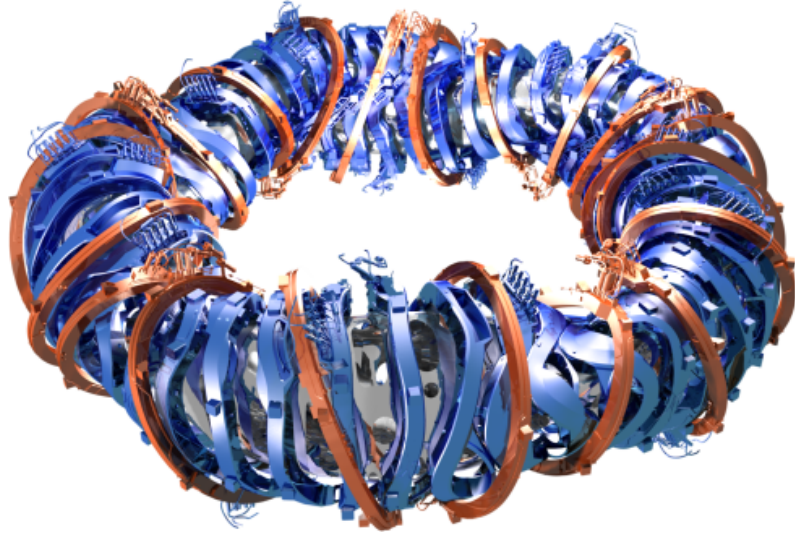
Der magnetische Einschluss ist das mit großem Abstand das erfolgsversprechendste Konzept um Kernfusion kraftwerkstauglich zu nutzen. Es gibt auch hier verschiedene Möglichkeiten, das erhitzte DT-Plasma einzuschließen und zu erhitzen.

#### 36.1.1 TOKAMAK

Der TOKAMAK-Reaktor ist das wohl älteste Konzept für ein Fusionskraftwerk. Bereits 1952 wurde die Idee von Tamun/Sacharov in der Sowjetunion entwickelt. Als Bedingung für die Zündung eines Fusionsplasmas nutzt man das sogenannte Triple-Produkt  $F$  aus Teilchendichte  $n$ , mittlerer Einschlusszeit  $\tau_e$  und Temperatur gemäß

$$F = n \cdot \tau_e \cdot T \quad (36.2)$$

Für eine positive Leistungsbilanz muss man etwa ein Triple-Produkt von  $F > 6 \cdot 10^{28} \text{ sKm}^{-3}$  erreichen. Das Tokamak-Prinzip zielt primär auf eine lange Einschlusszeit und hohe Temperatur bei relativ niedriger Dichte ab. Die wesentlichen Aspekte des Tokamak sind in Abb. 59 gezeigt. Durch die zentralen Transformatorschichten wird ein großer Stromgradient  $\frac{dI}{dt}$  geleitet. Das dadurch induzierte Magnetfeld bewirkt eine Lorentz-Kraft auf die geladenen Teilchen des Plasmas und erzeugt dadurch einen großen Stromfluss des im Bild rot gezeichneten Plasmabereiches. Dieser Stromfluss heizt durch Stöße das Plasma schnell auf. Die toroidalen und vertikalen Spulen sorgen für den nötigen Einschluss der strömenden Teilchen auf der Kreisbahn. Der Einschluss ist absolut kritisch, da bei Berührung des Plasmas und der Wand die eingeleitete Leistung sofort dissipiert wird und die Fusionsbedingungen nicht mehr erreicht werden.



**Abb. 60.** Stellarator zum magnetischen Einfluss eines Fusionsplasmas. Durch die komplizierte Spulengeometrie ist ein dauerhafter Einschluss möglich.

Es gibt beim Betrieb eine große Zahl an Instabilitäten, die den Einschluss bei hohen Temperaturen behindern. Nur durch intensive Forschung über Jahrzehnte konnten diese Schritt- für Schritt in den Griff bekommen werden. Mittlerweile wurde am JET (Joint European Torus) eine Fusionsleistung von etwa 10 MW über eine Zeitdauer von 5 Sekunden erzeugt. Aufgrund dieser Ergebnisse ist die Leistungsfähigkeit des Tokamak-Konzepts bestätigt und auch der ITER-Reaktor wird auf diesem Prinzip basieren und ist auf eine 10-fache Energieausbeute im Vergleich zur eingesetzten Energie ausgelegt. Als Nachteil dieses Einschlussprinzips muss man den gepulsten Betrieb nennen. Der Stromgradient, der den Plasmastrom antreibt, kann natürlich nicht grenzenlos ansteigen. Es werden hierfür bisher große schwere Walzen genutzt, mit denen man beim Abbremsvorgang wie bei einer Wirbelstrombremse einen großen Stromfluss erzeugen kann.

### 36.1.2 Stellarator

Den Nachteil des gepulsten Betriebs soll die Stellarator-Magnetfeldanordnung nicht aufweisen. In dieser Anordnung, die in den 90er Jahren numerisch berechnet wurde, sind die Flussflächen geschlossen. Es ist also kein Stromfluss im Plasma nötig um einen Einschluss zu gewährleisten. Die komplizierten Magnetfeldspulen sind in Abb. 60 gezeigt. Es gibt sowohl planare Spulen, als auch geometrisch sehr komplex geformte Spulen. Sie allein sollen für den magnetischen Einschluss sorgen. Zur Heizung des Plasmas auf die nötige Temperatur wird der Beschuss mit Neutralteilchen, Hochfrequenzstrahlung und Mikrowellenheizung verwendet. Aus technischer Sicht ist besonders die Mikrowellenheizung hervorzuheben. Durch die besonderen Eigenschaften eines Plasmas, können sich nicht alle Elektromagnetischen Wellen darin ausbreiten – Mikrowellen jedoch schon. Außerdem haben Mikrowellen den Vorteil, dass man sie sehr gerichtet in den gewünschten Bereich abstrahlen kann. Damit kann eine leistungsfähige Mikrowellenquelle auch entfernt vom Plasma erzeugt werden und dann am gewünschten Bereich zum Heizen genutzt werden.

Das Fusionsexperiment "Wendelstein-7X" in Greifswald ist derzeit der wohl technisch fortschrittlichste Stellarator im Betrieb. Die erreichten Einschlusszeiten übertreffen bisher die Erwartungen der Wissenschaftler. Der Stellarator ist die wohl aus-

sichtsreichste Möglichkeit mit Deuterium und Tritium einen Dauerbetrieb zu ermöglichen. Die Kraftwerkstauglichkeit ist bei diesem Ansatz definitiv gegeben. Als Nachteil muss die komplizierte Fertigung der Magnetfeldspulen genannt werden. Dies hat sich jedoch mit dem Betrieb des Wendelstein-7X als technisch machbar erwiesen.

### 36.1.3 Z-Pinch

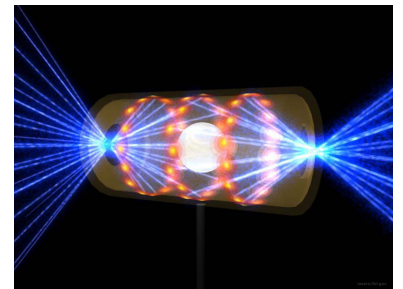
In den Medien wird der Z-Pinch als ein mögliches und zeitnah zu erreichendes Fusionskonzept angesehen. Viele große Firmen (u.a. Lockheed-Martin, USA[8]) haben prognostiziert in wenigen Jahren funktionierende und kompakte Fusionsenergie erzeugen zu können. Das Basiskonzept dafür ist der sogenannte Z-Pinch. Dieses Prinzip ist sogar noch älter als das des Tokamaks. Der Strom in einem Plasma erzeugt ein Magnetfeld, das das Plasma entlang der Z-Achse (daher der Name) komprimiert und so auch die nötigen Dichten bringen kann. Leider ist diese Verdichtung extrem anfällig für Instabilitäten, weswegen das Konzept bereits früh verworfen wurde. Neue Forschungen sollen diese Instabilitäten allerdings verringern können. Bisher hat sich noch keine der Vorhersagen aus der Privatwirtschaft bestätigt - dennoch wäre natürlich auch hier ein technischer Durchbruch absolut wünschenswert für die Energieversorgung der Welt.

## ABSCHNITT 36.2

### Trägheitsfusion

Die Trägheitsfusion ist ein weiterer Ansatz, um auf der Erde die Fusionsbedingungen des Tripelproduktes in Gl. 36.2 zu erfüllen. Diesmal wird eine kurze Einschlusszeit, dafür aber eine sehr hohe Dichte und Temperatur zur Fusion genutzt. Erneut ist der eingesetzte Brennstoff Deuterium und Tritium. Die Trägheitsfusion beruht auf folgendem Prinzip: Der Brennstoff wird, in fester Form vorliegend, als kompakte Brennstoffkapseln mit einem extrem leistungsstarken Laser beschossen. Das darauf basierende Experiment der National Ignition Facility (NIF) ist hierbei hervorzuheben. Es ist hier bereits gelungen, einen Energiegewinn im Vergleich zur eingesetzten Laserleistung bei einzelnen Experimenten zu realisieren [10]. Für das Erreichen der Reaktionsbedingungen ist die Verteilung der Laserstrahlen und die Geometrie des Brennstoffpellets entscheidend. In Abb. 61 ist die Darstellung einer solchen Geometrie zu sehen: Ein zylindrischer Hohlraum wird genutzt um die Laserstrahlung zu reflektieren, damit sie schlussendlich korrekt am Ziel platziert auftrifft.

Dieser Fusionsmethode – obwohl bereits bei einzelnen Schüssen Energiegewinne erreicht werden – wird unter Experten kaum eine Kraftwerkstauglichkeit eingeräumt. Die Gründe hierfür sind, dass für eine Energieproduktion in relevantem Maßstab viele solcher Fusionsprozesse pro Sekunde durchgeführt werden müssen. Dies ist (in absehbarer Zeit) nicht mit der langwierigen Kalibrierung der Laser und der hochpräzisen Pellet-Positionierung vereinbar. Gegenwärtig sind einige Hundert “shots” pro Jahr möglich [11].



**Abb. 61.** Darstellung eines Brennstoffpellets bei Beschuss mit Laserstrahlen [9].







# Teilchenphysik

TEIL

VII

Das Standardmodell ist jedoch weit mehr als ein theoretisches Modell der elementaren Teilchen und ihrer Wechselwirkungen. Es beansprucht für sich den Rang einer in sich geschlossene Theorie aller in der Welt der elementaren Teilchen beobachteten Phänomene. Für den Eingeweihten lässt sich die Theorie auf wenigen Zeilen darstellen, bildet also eine Art Weltformel, nach der in der Vergangenheit vom theoretischen Physikern wie Albert Einstein oder Werner Heisenberg ohne Erfolg gesucht wurde.

*Harald Fritzsch*

- 37. Standardmodell
- 38. Antiteilchen
- 39. Leptonen und Hadronen
- ?? . Erhaltungssätze
- 40. Austauschteilchen
- 40. Feynman-Graphen

ABSCHNITT 37

## Allgemeines zum Standardmodell

Die Teilchenphysik ist einer der aktuellsten Teilbereiche der Physik. Hier bewegt sich die theoretische Physik sehr nah mit der experimentelle Physik zusammen um beständig neue Vorhersagen und Entdeckungen zu machen. Das Standardmodell ist kein vollständig abgeschlossenes Modell mit fertigen Vorhersagen, sondern es lässt Raum für neue Teilchen oder Entdeckungen. Im Kern ist das Standardmodell ein ausgefeilter Formalismus, der zusammen mit einigen (experimentell bestimmten) Parametern die beobachtete Teilchenwelt extrem exakt wiedergibt. Ein Analogon hierfür wäre beispielsweise die Quantenmechanik, mit der man zwar die Energieniveaus für Wasserstoff exakt ausrechnen kann – für die Angabe der Niveaus selber wird aber eine experimentelle Messung für den Wert der Elementarladung und Elektronenmasse benötigt.

In der Teilchenphysik gibt es auch aktuell von Zeit zu Zeit wichtige Entdeckungen oder Experimente in den Medien, die es rechtfertigen dieses Thema im Lehramtsstudium zu behandeln. Außerdem ist der Forschungsauftrag der Teilchenphysik extrem spannend: Sie soll nichts weniger klären als die Frage, woraus das Universum besteht und wie es sich entwickelt hat. Wir werden in diesem Abschnitt die Grundlagen der Teilchenphysik kennenlernen um in der Schule auf hoffentlich viele Fragen eine fachkundige Antwort parat zu haben. Das Problem ist leider, dass die zentrale Frage “Warum?” nicht mit den Standardmodell beantwortet werden kann. Das Modell liefert genaueste Vorhersagen und Berechnungen, ohne aber die zu Grunde liegenden Parameter erklären zu können. Warum hat das Elektron die Ladung  $q = e_0$ ? Warum hat es die Masse  $m_e$ ? Darauf hat auch das Standardmodell bisher keine Antwort.

In den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts waren die Teilchenarten Proton, Neutron, Elektron und auch der Prozess des Alpha-Zerfalls bereits bekannt. Zusammen mit der Quantenmechanik konnten die beobachteten Prozesse in Atomen und Kernen gut erklärt werden. Es wurden aber in den folgenden Jahren neue Teilchen entdeckt:

- Myon ( $\mu$ ), Pion ( $\pi$ ); 1936/1937 in der Höhenstrahlung entdeckt
- Kaon ( $K$ ) ; 1948 in der Höhenstrahlung entdeckt

- Sigma ( $\Sigma$ ) ; frühe Teilchenbeschleunigerexperimente in der Mitte des 20. Jahrhunderts;

Diese und andere neu gefundene Teilchen waren alle sehr kurzlebig mit Zerfallszeiten im Bereich von  $10^{-6} \dots 10^{-23}$  s. Außerdem ist es nun nötig eine sinnvolle Kategorisierung für all diese neuen Teilchen vorzunehmen. Im bisherigen Verlauf sind wir mit nur wenigen, alle als elementar angenommenen, Teilchensorten ausgekommen: Elektron, Proton, Neutron und Neutrinos (Betazerfall). Offenbar ist es aber nun nicht mehr haltbar, sich Vorzustellen das Universum wäre nur aus diesen Bausteinen aufgebaut. Wir werden uns nicht in korrekter historischer Reihenfolge, sondern meist auf einem möglichst verständlichen Weg dieser Kategorisierung nähern.

ABSCHNITT 38

## Teilchen und Antiteilchen

---

Die Entdeckung der Antiteilchen und ihre theoretische Vorhersage ist eine sehr interessante Angelegenheit. Sie beginnt damit, dass Paul Dirac versucht die schon sehr erfolgreiche Schrödingergleichung auch mit der speziellen Relativitätstheorie von Einstein kompatibel zu machen. Da Elektronen in vielen Prozessen relativistisch relevante Geschwindigkeiten haben können, ist dies ein logischer Schritt. Am Ende seiner Herleitung steht schließlich die *Dirac-Gleichung* als die relativistische Form der Schrödingergleichung. Diese erfüllt den gewollten Zweck und beschreibt nun auch relativistische Elektronen, bietet jedoch einige schwer zu ertragende Aussagen. Eine davon ist der Elektronenspin. Da es schon experimentelle Hinweise auf den Spin gab, wurde diese Aussage entsprechend akzeptiert. Die zweite Aussage ist schon problematischer: Der relativistische Hamiltonoperator für ein ruhendes Elektron liefert sowohl die korrekte relativistische Energie  $E = m_e c^2$  als Eigenwert, als auch  $E = -m_e c^2$ . Eine negative Energie. Und wie man in [12] nachlesen kann, ist das auch kein mathematisches Artefakt wie etwa das negative Ergebnis einer Wurzel bei  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ . Die negative Energie gehört offenbar in irgendeiner Form zur quantenmechanischen Beschreibung des Elektrons dazu. Die Zustände konnten auch nicht einfach ignoriert werden, weil sie in den Rechnungen nötig waren um etwa den Compton-Effekt im Rahmen der Dirac-Gleichung richtig zu beschreiben. Warum aber sind dann nicht alle Elektronen in diesen negativen (also günstigeren) Energiezuständen? Dirac hat dazu postuliert, dass alle negativen Energieniveaus bereits besetzt sein<sup>35</sup>. Gemäß Pauli-Prinzip können die Elektron also garnicht anders, als die positiven Niveaus zu besetzen. Der Abstand des Dirac-Sees zu den "normalen" Niveaus beträgt dann für ruhende Elektronen  $\Delta E = m_e c^2 - (-m_e c^2) = 2m_e c^2$ . Diese Energie muss man aufbringen um ein Teilchen aus dem Dirac-See in einen positiven Zustand zu bringen - das wäre dann ein Anti-Elektron. Diese Sichtweise ist aber etwas problematisch: Es müssen ja unendlich viele Elektronen die Zustände bis  $E = -\infty$  auffüllen damit der Dirac-See auch wirklich gefüllt ist. Das ist zumindest unplausibel.

Der zögerliche Ausweg aus der Misere: Die Postulierung eines neuen Teilchens mit negativer Energie. Die Idee scheint allerdings zunächst praxisfern und erfährt nicht viel Unterstützung. Zumindest bis 1931 genau diese Teilchen in der Höhenstrahlung entdeckt werden. Diese *Positronen* reagieren im Kontakt mit Elektronen zu, vereinfacht gesagt, ... nichts<sup>36</sup>. Man kann also in gewisser Weise argumentieren, dass das Teilchen mit negativer Energie und das Teilchen mit positiver Energie sich gegenseitig vernichten gemäß

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

unter Aussendung zweier Gamma-Quanten<sup>37</sup>. Die Dirac-Gleichung ist seitdem die

<sup>35</sup> Diese Sichtweise wird oft auch als Dirac-See bezeichnet.

<sup>36</sup> Dieser Prozess wird auch *An-nihilierung* genannt.

<sup>37</sup> Zwei Gammaquanten sind nötig um Energie- und Impulserhaltungssätze zu erfüllen.

akzeptierte Grundgleichung der relativistischen Quantenmechanik.

Es stellt sich im Laufe der Zeit heraus, dass es zu jedem Teilchen<sup>38</sup> auch ein Antiteilchen gibt. Die Eigenschaften lassen sich wie folgt zusammenfassen:

<sup>38</sup> Genauer wäre hier: zu jedem Fermion

### Antiteilchen - Eigenschaften

- gleiche Masse wie das Teilchen
- gleicher Spin wie das Teilchen
- entgegengesetzte Ladung, falls geladen
- entgegengesetzte andere Quantenzahlen (Baryonenzahl, Leptonenzahl, Strangeness)

Diese Anti-Teilchen mit ihren Eigenschaften sind heute fester Bestandteil des Standardmodells der Elementarteilchen. Im folgenden kennzeichnet ein Balken über dem Teilchensymbol die Tatsache, dass es sich um ein Antiteilchen handelt – ein Antiproton wird dann mit  $\bar{p}$  bezeichnet.

#### ABSCHNITT 38.1

### Gibt es natürlich vorkommende Antiteilchen?

Wenn nun die Eigenschaften von Teilchen und Antiteilchen identisch sind, so sind es auch die daraus gebildeten Atome. Tatsächlich gelang am CERN 1995 die Herstellung von Antiwasserstoff - also ein Atom aus einem Antiproton und einem Positron [13]. Die Versuche daran zeigten in der Tat identisches Verhalten im Vergleich zum bekannten Wasserstoffatom. Jetzt wollen wir folgenden Gedankengang wagen: Beim Urknall sind aus Energie in gleichem Maße Materie- und Antimaterieteilchen entstanden. Wie können wir dann wissen, dass nicht andere Sternensysteme oder gar ganze Galaxien aus Antimaterie bestehen? Unsere Beobachtungen beruhen auf elektromagnetischer Strahlung/Absorption und der gravitativen Wechselwirkung. Mit beidem ist es nicht möglich zwischen Materie und Antimaterie zu unterscheiden.

Mittlerweile wurden experimentell bestätigt, dass die Zerfallszeiten von einigen Anti-Leptonen und Anti-Baryonen kürzer als die ihrer "normalen" Gegenspieler sind [14]. Dies würde dann in kurzer Zeit nach dem Urknall zu folgendem Szenario führen:

- Der Großteil der Teilchen und Antiteilchen vernichtet sich gegenseitig.
- Die etwas geringere Lebensdauer einiger Antiteilchen führt dazu, dass nach dem Annihilierungsprozess ein gewisser "Rest" an normaler Materie übrigbleibt. Das ist die Materie, aus der unser heutiges Universum entsteht.
- Antiteilchen sind nun nicht mehr vorhanden, da sie jeweils genügend Reaktionspartner finden konnten.

Als Konsequenz geht man also davon aus, dass das beobachtbare Universum aus Materie – und nicht aus Antimaterie – besteht. Kurzlebige Teilchen, die etwa bei Kernreaktionen entstehen, können aber natürlich auch Antiteilchen sein. Wir haben dies bei der  $\beta$ -Strahlung schon kennengelernt<sup>39</sup>.

<sup>39</sup> Hier kann ein Positron bzw. Antineutrino entstehen.

**Tab. 6.** Leptonenfamilien und deren Eigenschaften

Name	Symbol	Antiteilchen	Ladung	Masse
Elektron	$e^-$	$e^+$	$-1e$	$m_e$
Elektron-Neutrino	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	0	$\approx 0$
Myon	$\mu^-$	$\mu^+$	$-1e$	$\approx 207 m_e$
Myon-Neutrino	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	$\approx 0$
Tauon	$\tau^-$	$\tau^+$	$-1e$	$\approx 3477 m_e$
Tauon-Neutrino	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	$\approx 0$

## ABSCHNITT 39

**Leptonen und Hadronen**

Nun wollen wir näher auf die Kategorisierung der Elementarteilchen eingehen. Wegen ihrer großen Anzahl und teils enorm unterschiedlichen Eigenschaften spricht man oft auch von einem *Elementarteilchenzoo*. Die Unterteilung in Fermionen und Bosonen anhand ihres Spins haben wir bereits kennengelernt. Wir wollen nun weitere Klassen einführen - abhängig von den auf die Teilchen wirksamen Wechselwirkungen. Jetzt stellt sich zunächst die Frage, wie und warum denn eine physikalische Wechselwirkung NICHT für bestimmte Teilchen gelten soll? Unsere Erfahrung zeigt: Für jedes geladene Teilchen ist die Coulomb-Wechselwirkung vorhanden, für jedes Teilchen mit Masse wirkt die Gravitation usw. Es gibt aber fundamentale Wechselwirkungen im Standardmodell die nicht auf jede Teilchenklasse wirken. Wir müssen hier teilweise etwas vorgreifen, da eine sinnvolle Zusammenstellung der Grundkräfte erst mit Kenntnis der Teilchenkategorien in Abschnitt 40 erfolgen kann.

## ABSCHNITT 39.1

**Leptonen – eine Familienangelegenheit**<sup>40</sup> griech. leptos = schwach<sup>41</sup> z.B. Protonen und Neutronen

Zu den Leptonen<sup>40</sup> werden alle Teilchen gezählt, die nicht der sogenannten starken Wechselwirkung unterliegen. Diese Wechselwirkung ist es, die die Nukleonen im Kern<sup>41</sup> zusammenhält. Es ist nun so, dass unser bekanntes Elektron nicht in einem Atomkern eingefangen wird, wie wir in einer Diskussion über die Unschärferelation in Abschnitt 25.2.1 sehen konnten. Wir können dies nun zwar nicht als Beweis, aber als Hinweis betrachten dass die Kernkräfte auf das Elektron nicht wirksam sind. Für alle folgenden Teilchen und deren Antiteilchen in Tab. 6 gilt dies gleichermaßen. Die dort aufgelisteten Teilchen und Antiteilchen werden in drei "Familien" unterteilt: Die Elektron-, Myon- und Tauonfamilie. Alle Leptonen haben die Eigenschaft, dass sie die Spinquantenzahl  $s = 1/2$  besitzen und keine messbare Ausdehnung besitzen. Desweiteren bringt die Kategorisierung in Familien einen Vorteil: Teilchenprozesse finden grundsätzlich nur innerhalb einer Familie statt. Wenn also bei einer Reaktion ein Tauon beteiligt ist und ein Neutrino entsteht, so muss es sich hierbei um ein Tauon-Neutrino handeln. Weiterhin zeigen theoretische Überlegungen und Experimente, dass diese drei Leptonengruppen bereits vollständig sind und es keine weiteren Leptonen bzw. Leptonenfamilien geben kann.

## ABSCHNITT 39.2

**Hadronen**<sup>42</sup> griech. hadros = schwer, stabil

Die Hadronen<sup>42</sup> sind nun die zweite große Klasse der Elementarteilchen. Wir werden

**Tab. 7.** Einige Baryonen und Mesonen

Name	Symbol	Ladung	Masse
Proton	p	+1e	$m_p$
Neutron	n	0	$1.0014 m_p$
Sigma	$\Sigma^+$	+1e	$1.268 m_p$
Sigma	$\Sigma^0$	0	$1.270 m_p$
Sigma	$\Sigma^-$	-1e	$1.276 m_p$
Lambda	$\Lambda$	0	$1.189 m_p$
Pion	$\pi^+$	+1e	$0.149 m_p$
Pion	$\pi^0$	0	$0.144 m_p$
Pion	$\pi^-$	-1e	$0.144 m_p$
Kaon	$K^+$	+1e	$0.526 m_p$
Kaon	$K^0$	0	$0.530 m_p$
Kaon	$K^-$	-1e	$0.526 m_p$

sehen, dass hier sowohl Fermionen als auch Bosonen vertreten sind. Alle Hadronen unterliegen nun – im Gegensatz zu den Leptonen – auch der starken Wechselwirkung. Die uns bereits bekannten Vertreter dieser Gruppe sind Protonen und Neutronen. Dabei sind nun das Proton p und das Antiproton  $\bar{p}$  die einzig stabilen Vertreter dieser Gruppe. Alle anderen Hadronen sind instabil und zerfallen in kürzester Zeit in andere Teilchen. In Tabelle 7 sind einige Hadronen aufgelistet. Auffällig dabei ist, dass es einige augenscheinliche Unterteilung in schwere und leichte Hadronen zu geben scheint. Auch wenn die Masse eigentlich nicht das richtige Kriterium ist, wollen wir dennoch kurzerhand die Hadronen in die Untergruppen Baryonen (=schwer) und Mesonen (=mittelschwer) einteilen. Wir werden später sehen, dass diese Unterteilung gerechtfertigt ist.

Die bereits genannten Teilchen in den Tabellen 6 und 7 geben bereits einen Eindruck von den vielfältigen Reaktionsmöglichkeiten die es zu beobachten gilt. Zum Glück können wir aber durch die Nutzung von Erhaltungssätzen viele solcher zunächst denkbaren Reaktionen ausschließen. Im Folgenden werden wir die Erhaltungssätze der Teilchenphysik besprechen und mit Beispielen anwenden.

### ABSCHNITT 39.3

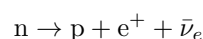
## Erhaltung der Ladung

Dieser Erhaltungssatz ist uns bereits aus der Elektrizitätslehre bekannt.

### Erhaltung der Ladungszahl

Die Ladungszahl bleibt bei Teilchenprozessen erhalten.

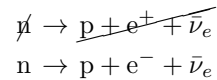
In der Anwendung bedeutet dies, dass im Zuge einer beliebigen Teilchenreaktion die Summe der Ladungszahlen der Ausgangsstoffe gleich der Summe der Ladungszahlen der Reaktionsprodukte sein muss. Wir untersuchen nun beispielhaft folgenden hypothetischen Neutronenzerfall:



Wenn wir diese Reaktion auf die Erhaltung der Ladungszahl testen, erhalten wir als Bilanz

$$0 = 1 + 1 + 0$$

und damit einen Widerspruch. Diese Reaktion kann also nicht ablaufen, da sie im Widerspruch zur Erhaltung der Ladungszahl steht. Stattdessen zerfällt ein Neutron gemäß

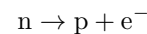


in ein Proton, ein Elektron und ein Anti-Elektronneutrino, wobei die Ladungszahlen auf beiden Seiten gleich sind ( $0 = 1 - 1 + 0$ ). Es muss sich übrigens um ein Elektronneutrino handeln, da die Reaktion innerhalb einer Leptonenfamilie stattfinden muss.

#### ABSCHNITT 39.4

### Drehimpulserhaltung

Wie in der klassischen Mechanik muss auch bei Teilchenprozessen der (quantenmechanische) Drehimpuls erhalten sein. Wir können dies wieder am einfachsten mit einem Beispiel illustrieren. Erneut soll der Zerfallsprozess eines Neutrons in ein Proton untersucht werden: Eventuell ist ein Neutrino hier gar nicht nötig? Der Nachweis ist sowieso nahezu unmöglich, also ist die einfachste Lösung vielleicht die plausibelste:



Die Ladungszahl ist hier erhalten. Wenn wir uns aber die Drehimpulsbilanz ansehen, stellen wir einen Widerspruch fest. Zur Erinnerung, sowohl Neutron, Proton als auch das Elektron sind Spin-1/2-Teilchen. Die Drehimpulsaddition ist nun mit verschiedenen Vorzeichen möglich:

$$\pm \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Wir sehen aber schnell, dass es nicht möglich ist eine Kombination von + bzw. - in dieser Gleichung zu finden die zu einem halbzahligen Spin führt. Die rechte Seite der Gleichung wird entweder -1, 0 oder 1. Wir brauchen also zwingend noch ein Spin-1/2-Teilchen in diesem Prozess um die Drehimpulserhaltung zu gewährleisten. Diese Aufgabe übernimmt das Antineutrino:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  ermöglicht die Drehimpulsbilanz  $1/2 = 1/2 - 1/2 + 1/2$  und ist damit nun eine potentiell mögliche Reaktion.

#### Erhaltung des Drehimpulses

Der Drehimpuls bleibt bei Teilchenprozessen erhalten.

#### ABSCHNITT 39.5

### Energie/Massenbilanz

Die Energie für einen eigenständigen Zerfall muss aus dem zerfallenden Teilchen bzw. den Reaktionspartnern selbst kommen. Die Reaktionsprodukte können nicht mehr Energie als die Ausgangsstoffe enthalten, sondern es muss natürlich Energieerhaltung gelten. Daraus wollen wir nun ein weitere Bedingung für Teilchenprozesse ableiten. Man kann die Reaktionspartner (oder das zerfallende Teilchen) immer in einen Koordinatenursprung legen um die kinetische Energie verschwinden zu lassen. Daraus

ergibt sich mit  $E_0$  als Ruhemasse

$$\begin{aligned} E_{0,\text{vorher}} &= E_{0,\text{nachher}} + E_{\text{kin,nachher}} \\ &\rightarrow E_{0,\text{vorher}} \geq E_{0,\text{nachher}} \end{aligned}$$

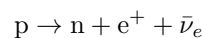
Die Ruhemasse(-Energie) der Reaktionspartner muss also gleich oder größer sein als die der Reaktionsprodukte.

### Energieerhaltung bei Teilchenprozessen

Die Ausgangsenergie der Reaktionspartner muss gleich oder größer als die der Reaktionsprodukte sein.

$$E_{0,\text{vorher}} \geq E_{0,\text{nachher}}$$

Als Beispiel für eine Verletzung dieses Energiesatzes schauen wir uns nun mal den Zerfall eines Protons in ein Neutron genauer an. Als Ausgangsthese soll hier



betrachtet werden. Es sind sowohl die Ladungszahl ( $+1 = 0 + 1 + 0$ ) als auch der Drehimpuls ( $1/2 = -1/2 + 1/2 + 1/2$ ) erhalten. Wenn wir nun aber auf die Ruhemassen der beteiligten Teilchen schauen, wird das Problem sichtbar:

$$\underbrace{m_{0,p}c^2}_{938.3 \text{ MeV}} \geq \underbrace{m_{0,n}c^2}_{939.6 \text{ MeV}} + \underbrace{m_{0,e}c^2}_{0.511 \text{ MeV}} + \underbrace{m_{0,p}c^2}_{\approx 0} + \underbrace{E_{\text{kin}}}_{\geq 0}$$

Diese Gleichung kann nicht erfüllt sein und Protonen zerfallen – zu unser aller Glück – nicht eigenständig in Neutronen. Für den real beobachteten Zerfall von Neutronen in Protonen fällt die Energiebilanz dagegen positiv aus.

## ABSCHNITT 39.6

### Leptonenzahl

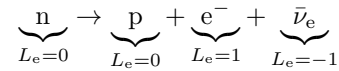
Es gibt nun mit den bereits genannten Erhaltungssätzen bereits die Möglichkeit, einige denkbaren Reaktionen oder Zerfälle beurteilen zu können. Es ist aber so, dass es viele Reaktionen gibt, die zwar nie beobachtet werden, aber keinem oben genannten Erhaltungssatz widersprechen. Man hat für diese Fälle eigene Quantenzahlen eingeführt um damit ebenfalls Erhaltungssätze formulieren zu können. Diese Zuordnung ist sehr einfach: Jedem Lepton wird die Leptonenzahl  $L = 1$  zugeordnet, den Antiteilchen der Leptonen wird  $L = -1$  zugeordnet. Hadronen sind keine Leptonen und haben deswegen  $L = 0$ . Es wurden bisher nur Reaktionen beobachtet, bei denen die Leptonenzahl erhalten bleibt. Diese Leptonenzahlerhaltung gilt für jede Leptonenfamilie individuell. Der Erhaltungssatz lautet demnach:

#### Leptonenzahlerhaltung

Die Leptonenzahl muss bei Reaktionen erhalten bleiben:

$$\begin{aligned} \sum L_{e,\text{vorher}} &= \sum L_{e,\text{nachher}} \\ \sum L_{\mu,\text{vorher}} &= \sum L_{\mu,\text{nachher}} \\ \sum L_{\tau,\text{vorher}} &= \sum L_{\tau,\text{nachher}} \end{aligned}$$

Die Leptonenzahlerhaltung kann uns beispielsweise voraussagen, welches Neutrino beim Neutronenzerfall emittiert wird. Für Drehimpuls, Ruhemasse und Ladung wären dem nach sowohl ein Elektron-Neutrino  $\nu_e$  als auch ein Anti-Elektron-Neutrino  $\bar{\nu}_e$  möglich. Um die Leptonenzahlbilanz aber einzuhalten, müssen wir gemäß

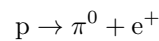


ein Anti-Elektron-Neutrino bei diesem Zerfall erwarten.

#### ABSCHNITT 39.7

### Baryonenzahl

Auch für die Baryonen ist es nötig eine Quantenzahl einzuführen um nicht-beobachtete Reaktionen auszuschließen. Ein häufiges Beispiel hierfür ist der Zerfall eines Protons in ein  $\pi^0$ -Meson. In der Reaktion



sind Drehimpuls ( $1/2 = 0 + 1/2$ ), Ladung ( $1 = 0 + 1$ ) und die Leptonenzahl ( $0 = 0 + 0$ ) erhalten. Außerdem ist das Proton schwerer als das Pion und es gibt genügend Ruhemasse für einen Zerfall. Trotzdem wird diese Reaktion nicht beobachtet. Um dies zu berücksichtigen, wird die Baryonenzahl nun analog zur Leptonenzahl definiert: Jedem Baryon wird  $B = 1$  zugeordnet, jedem Anti-Baryon  $B = -1$  und allen anderen Teilchen  $B = 0$ . Der Erhaltungssatz lautet dann:

#### Erhaltung der Baryonenzahl

Bei Teilchenprozessen bleibt die Baryonenzahl erhalten.

$$\sum B_{\text{vorher}} = \sum B_{\text{nachher}}$$

#### ABSCHNITT 39.8

### Strangeness

Bei diesem Überschwang an Quantenzahlen sollen auch die Mesonen nicht zu kurz kommen. Wie schon vorher ist hier bei manchen Reaktionen nicht klar, warum gerade diese und nicht andere Prozesse beobachtet werden. So wurden Teilchen beobachtet, die auffällig lange Zerfallszeiten (*bis*  $\approx 10^{-9}$  s) im Vergleich zu anderen instabilen Hadronen haben. Dieses Verhalten wurde *strange* und die entsprechende Quantenzahl Strangeness  $S$  genannt. So sind demnach die Sigmateilchen und die Kaonen ( $K^0, K^+$ ) *strange* ( $S = 1$ ) und das Lambda-Teilchen hat die Strangeness  $S = -1$ . Der Erhaltungssatz ist in diesem Fall jedoch nicht ganz so leicht aufzustellen, da zwischen den beteiligten Wechselwirkungen unterschieden werden muss:

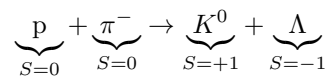
#### Strangeness-Bilanz

- Beteiligung von starker oder elektromagnetischer WW:  $\sum S = \text{const.}$
- Beteiligung von schwacher WW:  $\Delta S = -1$

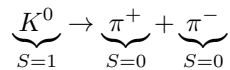
**Tab. 8.** Quarks und einige Eigenschaften

Name	Symbol	Ladung	Baryonenzahl	Strangeness	Charm
Up	u	+2/3e	+1/3	0	0
Anti-Up	$\bar{u}$	-2/3e	-1/3	0	0
Down	d	-1/3e	+1/3	0	0
Anti-Down	$\bar{d}$	+1/3e	-1/3	0	0
Strange	s	-1/3e	+1/3	-1	0
Anti-Strange	$\bar{s}$	+1/3e	-1/3	+1	0
Charm	c	+2/3e	+1/3	0	+1
Anti-Charm	$\bar{c}$	-2/3e	-1/3	0	-1

Um diese Sätze an Beispielen zu demonstrieren, folgen wir der Auswahl von Demtröder [15]. Zunächst betrachten wir die Erzeugung eines Kaons und Lambda-Teilchens durch einen Prozess der starken Wechselwirkung. Es muss also  $\Delta S = 0$  gelten:



Der Zerfall eines Kaons wird nun durch die schwache Wechselwirkung verursacht und wir erwarten in der Bilanz  $\Delta S = -1$ :



#### ABSCHNITT 39.9

### Quarks als Grundbausteine der Materie

Die bisher betrachteten Teilchen wurden nach recht einfachen Kriterien geordnet. Leptonen sind "eher leicht" und zeigen keine Wechselwirkung mit den starken aber kurzreichweitigen Kernkräften. Die Mesonen sind "mittelschwer" und werden durch die starke Kernkraft beeinflusst. Die Baryonen sind "schwer" und ebenfalls empfänglich für die starke Kernkraft. Zusammen mit der Leptonenzahl und Baryonenzahl ergibt sich ein recht guter Überblick über die meisten Prozesse. Eine Frage, die wir bisher umgangen haben, ist die folgende: Gibt es eine grundlegende Ordnung, die die sehr vielfältigen Eigenschaften und Quantenzahlen irgendwie auf eine leichter verständliche Basis stellt? Das Neutron führte die Forscher auf die richtige Spur, denn es besitzt zwar keine Ladung aber ein magnetisches Moment. Dies deutet eigentlich darauf hin, dass es aus mehreren Bestandteilen mit magnetischem Moment besteht, deren Ladung sich kompensiert. Murray Gell-Mann und George Zweig postulierten *Quarks* als die wirklichen elementaren Bausteine der Hadronen. Damit man ein konsistentes Modell erhält, stellt sich heraus welche Arten von Quarks mit welchen Eigenschaften nötig sind um die Eigenschaften der Hadronen nachzuvollziehen. Es sind schließlich 4 Quarks und deren Anti-Quarks, die ausreichen um alle bekannten Hadronen mit ihren Eigenschaften zu konstruieren. In Tabelle 8 sind diese mit einigen Eigenschaften aufgelistet. Wenn dies die Grundbausteine sind, brauchen wir nun noch die Bauanleitung für die Hadronen. An der Ladung der Quarks erkennt man leicht, dass jeweils mindestens 2 davon kombiniert werden müssen um Ladungen von  $1e$  oder  $0e$  zu erhalten. An der Baryonenzahl erkennt man wiederum, dass mindestens drei Quarks nötig sind, um ein Baryon mit einer ganzzahligen Baryonenzahl zu ergeben. Mesonen mit Baryonenzahl  $B = 0$  müssen dementsprechend aus einem Quark ( $B = +1/3$ ) und einem Anti-Quark ( $B = -1/3$ ) bestehen. Tatsächlich zeigt sich, dass dies auch der richtige Weg ist um die Baryonen und Mesonen aus elementaren Quarks zu konstruieren.

**Quark-Modell der Hadronen**

- Baryonen bestehen aus jeweils 3 Quarks mit  $\sum B = \pm 1$ .
- Mesonen bestehen aus 2 Quarks mit  $\sum B = 0$ .

Auch hier wollen wir Beispiele für Vertreter aus allen Gruppen diskutieren. Als prominente Baryonen wollen wir uns die Zusammensetzung des Protons und Neutrons ansehen. Das Proton besteht dabei aus zwei Up-Quarks und einem Down-Quark. Es ergeben sich dann richtigerweise die Eigenschaften des Protons:

$$\begin{aligned}
 &u + u + d \rightarrow p \\
 \text{Ladung :} & \quad 1e = \frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e \\
 \text{Baryonenzahl :} & \quad 1 = \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e \\
 \text{Drehimpuls (z.B.) :} & \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ebenso ergeben sich die Eigenschaften des Neutrons, wenn es aus einem Up-Quark und zwei Down-Quarks besteht:

$$\begin{aligned}
 &u + d + d \rightarrow n \\
 \text{Ladung :} & \quad 0e = \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e \\
 \text{Baryonenzahl :} & \quad 1 = \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e \\
 \text{Drehimpuls (z.B.) :} & \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Nun soll auch noch auf das  $\pi^+$ -Meson eingegangen werden. Nach Tabelle 7 muss durch die Quark-Kombinationen eine Ladung von  $1e$  und – weil ein Meson – die Baryonenzahl  $B = 0$  erreicht werden. Dies erreichen wir beispielsweise durch die Kombination eines Up-Quarks und eines Anti-Down-Quarks:

$$\begin{aligned}
 &u + \bar{d} \rightarrow \pi^+ \\
 \text{Ladung :} & \quad 1e = \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e \\
 \text{Baryonenzahl :} & \quad 0 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e \\
 \text{Drehimpuls (z.B.) :} & \quad 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bei den oben angeführten Beispielen mag man nun auf die Idee kommen, dass diese Eigenschaften auch durch andere Kombinationen der Quarks realisierbar wären. Tatsächlich ist dies nicht der Fall, da die Quarks noch eine bis jetzt nicht erwähnte Eigenschaft besitzen, die ‘Farbe’ genannt wird. Nur bestimmte Farbkombinationen sind demnach zugelassen und führen damit auf eine eindeutige Zusammensetzung der Baryonen und Mesonen. Mit diesem Thema würden wir aber vollends den sinnvollen Bereich des Lehrstoffes für ein Lehramtsstudium verlassen. Wer an weiteren Details hierzu interessiert ist, muss sich an das übergeordnete Stichwort der *Quantenchromodynamik* halten.

## Austauschteilchen und Grundkräfte der Physik

Das Thema der Austauschteilchen und das Verständnis der Grundkräfte der Physik ist extrem anspruchsvoll und wir können es hier nur sehr oberflächlich behandeln. Glücklicherweise ist dies aber relativ problemlos möglich, solange wir nicht beabsichtigen quantitative Aussagen über Teilchenprozesse zu treffen. Das tatsächliche “Rechnen” werden wir uns hier also ganz elegant beiseite lassen (müssen).

### Elektromagnetische Wechselwirkung

Die Effekte und Berechnungen zur elektrischen und magnetischen Wechselwirkung wurden in der Vorlesung zur Elektrizitätslehre bzw. Elektrodynamik behandelt. Wir wollen uns jetzt mit dem Zustandekommen dieser Wechselwirkung beschäftigen. Dafür stellen wir uns die recht naheliegende Frage: Woher weiß denn ein geladenes Teilchen, welche Ladung das andere Teilchen hat, mit dem es nun wechselwirken soll? Soll es nun mit Anziehung oder Abstoßung reagieren? Die erste naheliegende Erklärung wäre, sich stattdessen auf den Feldbegriff zu berufen. Demnach muss das Teilchen nichts über seinen Partner wissen, es reagiert einfach auf dessen elektrisches Feld. Bei näherem Hinsehen ist hierdurch aber nichts gewonnen und die ursprüngliche Frage verschiebt sich zu: Wie erkennt das Teilchen die Richtung des elektrischen Feldes? Im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik wird dieses “Wissen” durch Austauschteilchen transportiert. Das Austauschteilchen für die elektromagnetische Wechselwirkung ist das uns bereits bekannte Photon mit den folgenden Eigenschaften

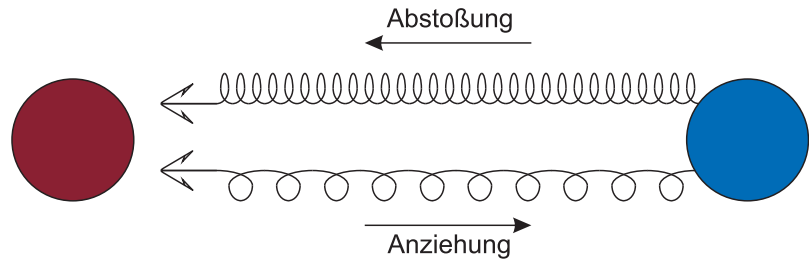
#### Photon als Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung

- Spin:  $1 \hbar$  (Boson)
- Ruhemasse: keine
- Ladung: keine
- Reichweite: unendlich
- Wechselwirkungen: keine

Das Photon  $\gamma$  ist übrigens zuständig für die abstoßende und anziehende Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen. Dies ist nun schwer mit einem Beispiel aus der makroskopischen Welt zu beschreiben. Eine Bildsprache hierfür zu finden ist allerdings besonders im Schulkontext wichtig, auch wenn die natürlich nur mit Einschränkungen anschlussfähig ist. Eine Variante der Illustration ist in Abb. 62 gezeigt. Hier befinden sich zwei Ladungen in Wechselwirkungsreichweite und eines der beiden geladenen Teilchen sendet ein Photon aus. Das Photon ist hierbei als Enterhaken dargestellt, der mit hoher Geschwindigkeit und einer Feder statt Seil auf das zweite Teilchen trifft. Nun wurde mit dem Auftreffen<sup>43</sup> also eine Feder zwischen den beiden Teilchen gespannt. Die Ladungsvorzeichen entscheiden nun darüber, ob die Feder:

- gedehnt ist – dann gibt es anziehende Wechselwirkung.
- gestaucht ist – dann gibt es eine abstoßende Wechselwirkung.

<sup>43</sup> Der Enterhaken bleibt natürlich zunächst stecken! Das ist immer so bei Enterhaken.



**Abb. 62.** Analogie für ein Austauschteilchen. Das Teilchen führt eine Feder mit sich die beim Auftreffen im Zielteilchen verankert wird. Je nach Vorspannung der Feder ist so eine abstoßende (oben) oder anziehende (unten) Wechselwirkung möglich.

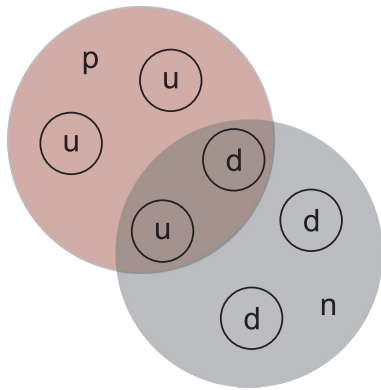
Der (unangenehme) Enterhaken wird nach kurzer Zeit wieder abgelöst und die Wechselwirkung ist damit vermittelt worden. Der Vorgang wiederholt sich nun ständig, so dass man davon sprechen kann, dass es zu jedem Zeitpunkt eine Wechselwirkung gibt.

ABSCHNITT 40.2

**Starke Wechselwirkung**

Als starke Wechselwirkung wird die Anziehung zwischen sogenannten Farbladungen der Quarks bezeichnet. Die Farbladungen sind dabei natürlich nicht wörtlich als Farbe im Alltagsgebrauch zu verstehen. Vielmehr nutzt man hierbei die bekannten (additiven) Farbmischungen um verschiedene Farben (Ladungen) einander zuzuordnen. Diese Anziehung der Farbladungen wirkt nun einerseits auf Quarks untereinander und andererseits auch auf die Quarks benachbarter Nukleonen<sup>44</sup>. In Abb. 63 sieht man, wie die Reichweite der starken Wechselwirkung sowohl die Quarks als auch teilweise die Nukleonenabstände umfasst. Die starke Wechselwirkung wird im Standardmodell ebenfalls durch ein Austauschteilchen vermittelt – das Gluon. Die Eigenschaften dieses Bosons sind hier zusammengefasst:

<sup>44</sup> Proton und Neutron werden etwa durch die starke Wechselwirkung aneinander gebunden.



**Abb. 63.** Die starke Kernkraft wirkt auf benachbarte Quarks und auf andere Nukleonen.

**Gluonen als Austauschteilchen der starken Wechselwirkung**

- Spin:  $1 \hbar$  (Boson)
- Ruhemasse: keine
- Ladung: keine
- schwacher Isospin: keiner
- Farbladung: jeweils Farbe und Anti-Farbe
- Reichweite:  $\approx 10^{-15}$  m
- Wechselwirkungen: starke WW

Besonders spannend ist das Reichweitenverhalten der Quarks. Die Reichweite von ca.  $10^{-15}$  m nimmt ab einer Entfernung von etwa  $10^{-16}$  m einen konstanten Wert an. Die Kraftwirkung wird dort also nicht mehr geringer, obwohl der Abstand zunimmt. Der Versuch, dies im Feldlinienbild darzustellen muss offensichtlich scheitern – die Dichte soll konstant bei größer werdendem Abstand sein? Das ist wohl nicht möglich.

Die Modellierung dieses Verhaltens ist aber recht simpel. Wenn man zwei Gluonen voneinander entfernt, muss man eine gewisse potentielle Energie zuführen. Beim Abstand von etwa  $10^{-16}$  m wird diese Energie so groß, dass Sie bereits ausreicht um ein neues Gluon/Anti-Gluon - Paar zu erzeugen. Diese sind nun die Quelle neuer Feldlinien, die es möglich machen die Feldliniendichte auch bei zunehmendem Abstand konstant zu halten. Außerdem muss betont werden, dass die starke Wechselwirkung die elektromagnetische Wechselwirkung dominiert: So werden also beispielsweise zwei Quarks mit negativer Ladung  $-2/3e$  eventuell trotzdem aneinander gebunden vorgefunden.

## ABSCHNITT 40.3

**Schwache Wechselwirkung**

Hier können wir erneut das Beispiel des Neutronenzerfalls

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

bemühen. Hierbei entsteht ein ungeladenes Elementarteilchen ( $\bar{\nu}_e$ ), hierfür kann die elektromagnetische Wechselwirkung also nicht verantwortlich sein. Die starke Wechselwirkung kann den Prozess auch nicht verantworten, da mit dem Positron und Neutrino zwei Teilchen ohne Farbladung/Quarks entstehen. Die noch fehlende fundamentale Wechselwirkung nennt man nun *Schwache Wechselwirkung*. Sie wirkt auf alle Teilchen mit einer sogenannten schwachen Ladung, dem (schwachen) Isospin. Weil wir hierauf nicht genauer eingehen wollen, sei nur gesagt dass alle Quarks und Leptonen einen halbzahligen "schwachen Isospin" besitzen. Die schwache Wechselwirkung ist also wirksam für alle Materieteilchen – im Gegensatz etwa zur starken Wechselwirkung. Diese wirkt nicht auf Leptonen.. Wenn mehrere Quarks zu einem größeren Teilchen zusammengesetzt werden, so ergibt sich der Isospin aus der Summe der einzelnen Isospins. Das Proton besteht etwa aus zwei Up und einem Down-Quark. Der schwache Isospin des Protons lautet dann also

$$I_u + I_u + I_d = I_p$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

und ist damit wieder halbzahlig.

Die Botenteilchen der schwachen Wechselwirkung, das  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $W^0$  und das  $Z$ -Boson, besitzen den schwachen Isospin  $+1$ ,  $-1$  und  $0$ .

**W/Z-Bosonen als Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung**

Name	Spin	Ladung	Reichweite	Isospin	WW
$W^+$	$1 \hbar$	$+1e$	$\approx 10^{-18}$ m	$+1$	EM, Schwach
$W^-$	$1 \hbar$	$-1e$	$\approx 10^{-18}$ m	$-1$	EM, Schwach
$Z^0$	$1 \hbar$	$0e$	$\approx 10^{-18}$ m	$0$	Schwach

In der Tabelle fällt besonders die extrem geringe Reichweite dieser Wechselwirkung auf. Im Modell der Austausch-/Botenteilchen wird dies durch nun massebehaftete Teilchen realisiert. Die effektive Reichweite kann man mit der deBroglie-Wellenlänge  $r_{WW} \approx \lambda = \frac{\hbar \cdot c}{m \cdot c^2}$  abschätzen. Die Massen der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen wurden im CERN 1983 in einem Bereich von etwa  $m_{W,Z} \approx 90$  GeV gemessen, was einer Reichweite von nur etwa  $r_{WW} \approx 2 \cdot 10^{-18}$  m entspricht. Diese kurze Reichweite ist

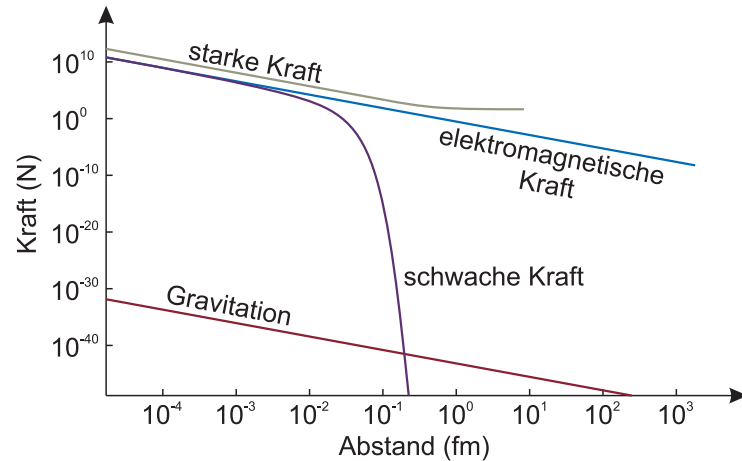


Abb. 64. Abstandsverhalten der 4 fundamentalen Wechselwirkungen. Nach [16].

beispielsweise bei der Wechselwirkung der Neutrinos relevant. Ein Proton mit Isospin  $1/2$  wechselwirkt mit einem Neutrino, das ebenfalls einen halbzahligen Isospin hat über die schwache Wechselwirkung. Weder über die starke, noch die elektromagnetische, noch die gravitative Wechselwirkung findet eine Wechselwirkung statt. Nun ist es aber extrem unwahrscheinlich, dass ein Neutrino sich auf seinem Weg so nah an einen Wechselwirkungspartner bewegt. Zusammen mit der hohen Geschwindigkeit ist damit der Wirkungsquerschnitt sehr klein, und Reaktionen finden extrem selten statt.

#### ABSCHNITT 40.4

### Gravitation

Die Gravitation ist hier nur der Vollständigkeit halber mit aufgenommen. Im Rahmen des Standardmodells lässt sich die Gravitation nämlich noch nicht beschreiben. Die Reichweite der Gravitation ist unendlich groß, was auf ein masseloses Austauschteilchen schließen lässt. Dieses *Graviton* wurde aber bis heute nicht entdeckt. Außerdem ist die Ladung (im Sinne des Standardmodells) für die Gravitation noch völlig unbekannt. Die uns bekannte träge/schwere Masse kann diese Rolle nicht übernehmen, denn die Antiteilchen müssten dann eine entgegengesetzte (negative!) Masse haben. In diesem Fachgebiet der Physik sind also noch viele spannende Ideen und Entdeckungen verborgen.

<sup>45</sup> Im astronomischen Maßstab sind die Massen jedoch so groß, dass die Gravitation die dominante Kraft wird.

Abschließend sind in Abbildung 64 die vier fundamentalen Kräfte skizziert. Die elektromagnetische Kraft und die Gravitation zeigen in der doppelt-logarithmischen Darstellung die gleiche konstante Steigung wegen der  $1/r^2$ -Abhängigkeit. Die Gravitation ist jedoch um viele Größenordnungen schwächer, wenn wir uns mit Massen aus dem Bereich der Teilchenphysik beschäftigen <sup>45</sup>. Die starke Kernkraft ist die stärkste fundamentale Wechselwirkung, ist jedoch nur bis in den Femtometer-Bereich hin wirksam. Die schwache Kraft zeigt bereits bei noch kleineren Abständen eine deutliche Abschwächung.

ABSCHNITT 40.5

Feynman-Graphen

Feynman-Diagramme können genutzt werden um Reaktionsabläufe und Teilchenprozesse zu illustrieren. In diesen Diagrammen gibt es verschiedene Linientypen um die Teilchen darzustellen. In Abbildung 65 sind die wesentlichen Teilchen dargestellt:

- Fermionen werden durch eine gerade Linie dargestellt. Der Pfeil zeigt in Richtung der Zeitachse. Das konkrete Teilchensymbol (hier e bzw. p) wird neben der Linie platziert.
- Anti-Fermionen werden ebenfalls durch eine gerade Linie dargestellt, deren Pfeil allerdings entgegen der Zeitrichtung gerichtet ist.
- Austauschteilchen der (elektro-)schwachen Wechselwirkung werden durch eine Wellenlinie dargestellt. Teils wird für die schwache Wechselwirkung in der Literatur auch eine gestrichelte Linie verwendet.
- Die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung (Gluonen) werden durch eine Spirallinie dargestellt.

Die Achsen der Feynman-Diagramme sind – ähnlich den Minkowski-Diagrammen – aus einer Zeitachse und einer Ortsachse aufgebaut. Wir wollen hierfür direkt ein einfaches Beispiel betrachten: Den Prozess der sogenannten Paarerzeugung. In Abbildung 66 ist dieser Prozess in einem Feynman-Diagramm dargestellt. Als Reaktionsgleichung würden wir den Prozess durch

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

beschreiben. Im Diagramm betrachten wir den Prozess folgendermaßen. Das Photon ist ein Austauschteilchen der elektroschwachen Wechselwirkung und wird daher als Wellenlinie dargestellt. Durch die leichte Neigung wird angedeutet, dass das Photon sich fortbewegt. Ohne Achseneinteilung ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v = \Delta X/\Delta t$  allerdings nicht quantitativ ablesbar. Dann wird durch den Punkt ganz allgemein eine Wechselwirkung – auch Vertex genannt – gekennzeichnet. Da es in diesem Diagramm nur einen Punkt gibt, handelt es sich hierbei um einen Teilchenprozess erster Ordnung. Nach diesem Prozess bewegen sich ein Elektron und ein Positron voneinander weg. Das Positron ist ein Antiteilchen/Fermion und wird durch eine Linie mit Pfeil in  $-t$ -Richtung gezeichnet. Das Elektron ist ein Fermion und die Pfeilrichtung zeigt in  $t$ -Richtung.

Was wäre nun, wenn das entstehende Elektron-Positron-Paar sich kurz nach der Erzeugung wieder annihiliert? Dieses Szenario ist in Abb. 66 dargestellt. Hier sehen wir zwei Wechselwirkungen, es handelt sich also um einen Teilchenprozess zweiter Ordnung. Erneut liegt hier zunächst ein (energiereiches) Photon vor. Nach der Paarerzeugung bewegen sich die entstandenen Teilchen aber nun wieder aufeinander zu. Die Pfeilrichtungen geben auch hier wieder die eigenschaft Teilchen/Antiteilchen an. Wenn sich das Elektron und das Positron wieder an einem gemeinsamen Ort zur gleichen Zeit befinden, zerstrahlen Sie wieder in ein Photon. In diesem Prozess zweiter Ordnung gibt es nun noch eine neue Anmerkung. Wenn Teilchen “nur” zwischen zwei Wechselwirkungsknoten existieren, nennt man Sie auch *virtuelle Teilchen*. Diese virtuellen Teilchen sind nicht beobachtbar. Lediglich die Ein- und Ausgehenden Teilchen in einem Feynman-Diagramm sind beobachtbar. Jedes Photon könnte als auf seinem Weg ständig virtuelle Teilchen erzeugen, die sich aber sofort wieder gegenseitig auslöschen.

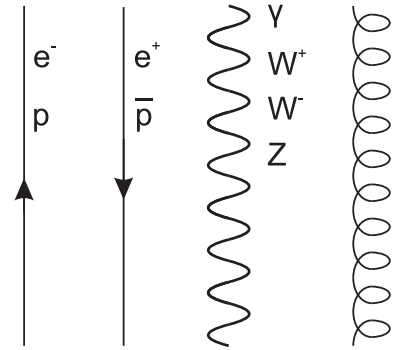


Abb. 65. Grafische Darstellung verschiedener Teilchen in einem Feynman-Diagramm. (v.l.n.r.) Fermionen, Anti-Fermionen, Botenteilchen EM und schw. WW, Gluonen.

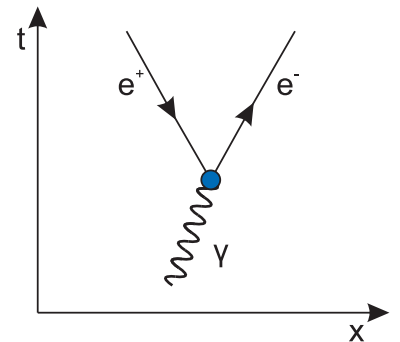


Abb. 66. Teilchenprozess erster Ordnung. Ein Photon erzeugt ein Elektron und ein Positron (“Paarerzeugung”).

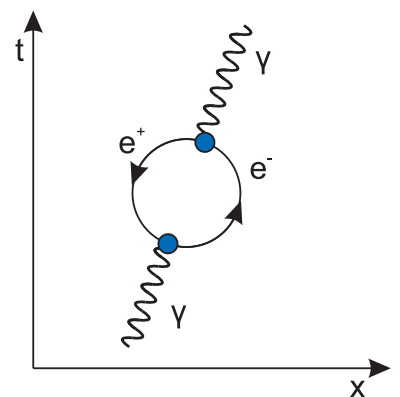
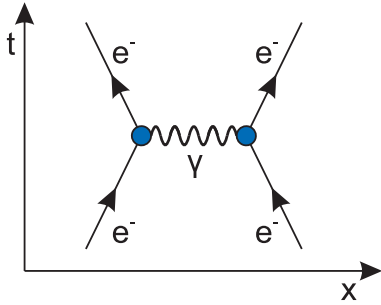


Abb. 67. Zwei virtuelle Teilchen zwischen zwei Knoten.

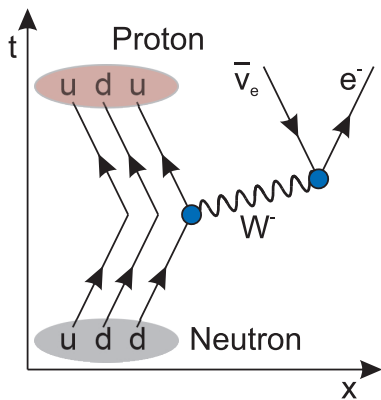


**Abb. 68.** Abstoßung zweier Elektronen mit einem Photon als Austauschteilchen.

<sup>46</sup> Es existiert nur zwischen zwei Knoten!

Nun wollen wir uns einen sehr einfachen und grundlegenden Prozess auf Basis eines Feynman-Diagramms anschauen: Zwei Elektronen kommen sich Nahe und stoßen sich gegenseitig ab. Wir haben es hier also mit einem vermeintlich einfachen und längst bekanntem Verhalten aus dem Bereich der Elektrizitätslehre zu tun. Nun soll dieser Prozess allerdings mit dem Photon als Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung betrachtet werden. Im Diagramm in Abbildung 68 ist die Ausgangssituation, dass sich zwei Elektronen aufeinander zubewegen. Es kommt nun im Sinne des Modells von Austauschteilchen zu einer Art Kommunikation der elektrostatischen Abstoßung durch ein Photon wie in Abbildung 62. Es stellt sich nun also die Frage, welches Elektron das Photon aussendet. Da es sich um ein virtuelles Photon handelt<sup>46</sup> können wir das nicht entscheiden. Es ist also möglich, dass das "linke" Elektron das Photon aussendet – das würde man darstellen, indem das rechte Elektron auf der Zeitachse etwas nach oben geschoben wird um die Kausalität zu zeigen. Andererseits ist es aber auch möglich, dass das rechte Elektron das Photon aussendet – man würde dann das linke Elektron etwas auf der Zeitachse nach oben schieben. In der hier gezeigten Variante liegen beide Knoten exakt auf einer Höhe. Dies ist eigentlich unphysikalisch, da das Photon so zur gleichen Zeit an zwei Orten existiert. Trotzdem ist es eine übliche Art der Darstellung um zu symbolisieren, dass man sich nicht auf eine konkrete Ursache und Wirkung festlegen möchte bzw. dass dies einfach nicht relevant ist.

Als letztes Beispiel eines Feynman-Diagrammes wird nun der Neutronenzerfall auf Quark-Ebene dargestellt. In Abbildung 69 ist die bereits bekannte Reaktionsgleichung  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  an den Reaktionsprodukten (oben) und dem Ausgangsneutron (unten) zu erkennen. Nun sind hier sowohl das Neutron als auch das Proton durch ihre Quarks dargestellt. Das Neutron besteht demnach aus einem Up-Quark und zwei Down-Quarks, das Proton aus zwei Up-Quarks und einem Down-Quark. Der Neutrinozerfall ist also in diesem Sinne die Umwandlung eines Down-Quarks in ein Up-Quark – die anderen beiden Quarks werden durch den Prozess nicht beeinflusst. Die Umwandlung des Down-Quarks muss nun unter Einhaltung aller uns bekannten Erhaltungssätze befinden. Dies muss gewissermaßen für jeden einzelnen Knoten und die beteiligten Teilchen gelten. Wenn das Down-Quark in ein Up-Quark umgewandelt wird, dann ändert sich sowohl die elektrische Ladung als auch der schwache Isospin. Beide Änderungen muss das  $W^-$ -Boson sozusagen kompensieren. Diese Kompensation läuft wie folgt ab:



**Abb. 69.** Neutronenzerfall

	d	→	u	+W <sup>-</sup>
Ladungen:	-1/3e	=	+2/3e	-1e
Isospin:	-1/2	=	+1/2	-1
Baryonenzahl:	+1/3	=	+1/3	+0

Das  $W^-$ -Boson mit seiner Ladung von  $-1e$  und dem Isospin  $-1$  ist also genau geeignet um hier die Erhaltungssätze zu erfüllen. Gleiches gilt für den zweiten Knoten, an dem das  $W^-$ -Boson in ein Elektron und ein Antineutrino zerfällt:

	W <sup>-</sup>	→	$\bar{\nu}_e$	+e <sup>-</sup>
Ladungen:	-1e	=	0	-1e
Isospin:	-1	=	-1/2	-1/2
Leptonenzahl:	0	=	-1	1

Da das Austauschteilchen hier nur eine Lebensdauer hat, die für das Zurücklegen der Strecke im Bereich  $10^{-18}$  m reicht erscheint es so, als wenn der Zerfall direkt im Atomkern stattfindet und ein Elektron<sup>47</sup> dort abgestrahlt wird.

<sup>47</sup> Bekannt als Betastrahlung...





# Literaturverzeichnis

- [1] I. Griffin. *Periodensystem der Elemente*, 01 2010. URL <https://texample.net/tikz/examples/periodic-table-of-chemical-elements/>.
- [2] P. Hofmann. *Einführung in die Festkörperphysik*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2013. ISBN 978-3-527-41226-6.
- [3] T. HALES, M. ADAMS, G. BAUER, T. D. DANG, J. HARRISON, L. T. HOANG, C. KALISZYK, V. MAGRON, S. MCLAUGHLIN, T. T. NGUYEN, and et al. A formal proof of the kepler conjecture. *Forum of Mathematics, Pi*, 5:e2, 2017. doi: 10.1017/fmp.2017.1.
- [4] J. Krause and J. Grehn. *Metzler Physik*. Westermann Schulbuchverlag GmbH, 2021. ISBN 978-3-14-100100-6.
- [5] D. Brockmann-Behnsen. *Dorn Bader Physik II Gesamtband Gymnasium*. Westermann Schulbuchverlag GmbH, 2023. ISBN 978-3-14-152376-8.
- [6] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 5. aufl. 2016 edition, 2016. ISBN 9783662490945. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-49094-5>.
- [7] R. Gross and A. Marx. *Festkörperphysik*. De Gruyter Oldenbourg, München, 2014. ISBN 9783110358704. doi: doi:10.1524/9783110358704. URL <https://doi.org/10.1524/9783110358704>.
- [8] L. M. Corporation, 2025. URL <https://www.lockheedmartin.com/en-us/products/compact-fusion.html>.
- [9] L. L. N. Laboratory, 2025. URL <https://lasers.llnl.gov/multimedia/photo-gallery>.
- [10] A. B. Zylstra, A. L. Kritcher, O. A. Hurricane, D. A. Callahan, K. Baker, T. Braun, D. T. Casey, D. Clark, K. Clark, T. Döppner, L. Divol, D. E. Hinkel, M. Hohenberger, C. Kong, O. L. Landen, A. Nikroo, A. Pak, P. Patel, J. E. Ralph, N. Rice, R. Tommasini, M. Schoff, M. Stadermann, D. Strozzi, C. Weber, C. Young, C. Wild, R. P. J. Town, and M. J. Edwards. Record energetics for an inertial fusion implosion at nif. *Phys. Rev. Lett.*, 126:025001, Jan 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.126.025001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.025001>.
- [11] G. Brunton, G. A. Bowers, A. D. Conder, J. M. D. Nicola, P. D. Nicola, M. Fedorov, B. Fishler, R. Fleming, D. H. Kalantar, G. Lau, D. G. Mathisen, V. M. Kamm, V. Pacheu, M. Paul, R. K. Reed, J. Rouse, R. J. Sanchez, M. J. Shaw, E. A. Stout, S. Weaver, and E. F. Wilson. Shot rate improvement strive for the national ignition facility (nif). 2015. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:114685548>.
- [12] J. Bleck-Neuhaus. *Elementare Teilchen*, volume 2. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2013.
- [13] G. Baur, G. Boero, A. Brauksiepe, A. Buzzo, W. Eyrich, R. Geyer, D. Grzonka, J. Hauffe, K. Kilian, M. LoVetere, M. Macri, M. Moosburger, R. Nellen, W. Oelert, S. Passaggio, A. Pozzo, K. Röhrich, K. Sachs, G. Schepers,

- T. Sefzick, R. Simon, R. Stratmann, F. Stinzinger, and M. Wolke. Production of antihydrogen. *Physics Letters B*, 368(3):251–258, 1996. ISSN 0370-2693. doi: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(96\)00005-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00005-6). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269396000056>.
- [14] R. Aaij, A. S. W. Abdelmotteleb, C. A. Beteta, F. Abudinén, T. Ackernley, A. A. Adefisoye, B. Adeva, M. Adinolfi, P. Adlarson, C. Agapopoulou, C. A. Aidala, Z. Ajaltouni, S. Akar, K. Akiba, P. Albicocco, J. Albrecht, F. Alessio, M. Alexander, Z. Aliouche, P. A. Cartelle, R. Amalric, S. Amato, J. L. Amey, Y. Amhis, L. An, L. Anderlini, M. Andersson, A. Andreianov, P. Andreola, M. Andreotti, D. Andreou, A. Anelli, D. Ao, F. Archilli, M. Argenton, S. A. Cuendis, A. Artamonov, M. Artuso, E. Aslanides, R. A. Da Silva, M. Atzeni, B. Audurier, D. Bacher, I. B. Perea, S. Bachmann, M. Bachmayer, J. J. Back, P. B. Rodriguez, V. Balagura, A. Balboni, W. Baldini, L. Balzani, H. Bao, J. B. de Souza Leite, C. B. Pretel, M. Barbetti, I. R. Barbosa, R. J. Barlow, M. Barnyakov, S. Barsuk, W. Barter, J. Bartz, J. M. Basels, S. Bashir, B. Batsukh, P. B. Battista, A. Bay, A. Beck, M. Becker, F. Bedeschi, I. B. Bediaga, N. A. Behling, S. Belin, K. Belous, I. Belov, I. Belyaev, G. Benane, G. Bencivenni, E. Ben-Haim, A. Berezhnoy, R. Bernet, S. B. Andres, A. Bertolin, C. Betancourt, F. Betti, J. Bex, I. Bezshyiko, O. Bezshyyko, J. Bhom, M. S. Bieker, N. V. Biesuz, P. Billoir, A. Biolchini, M. Birch, F. C. R. Bishop, A. Bitadze, A. Bizzeti, T. Blake, F. Blanc, J. E. Blank, S. Blusk, V. Bocharnikov, J. A. Boelhauve, O. B. Garcia, T. Boettcher, A. Bohare, A. Boldyrev, C. S. Bolognani, R. Bolzonella, R. B. Bonacci, N. Bondar, A. Bordellius, F. Borgato, S. Borghi, M. Borsato, J. T. Borsuk, E. Bottalico, S. A. Bouchiba, M. Bovill, T. J. V. Bowcock, A. Boyer, C. Bozzi, J. D. Brandenburg, A. B. Rodriguez, N. Breer, J. Brodzicka, A. B. Gonzalo, J. Brown, D. Brundu, E. Buchanan, L. Buonincontri, M. B. Marcos, A. T. Burke, C. Burr, J. S. Butter, J. Buytaert, W. Byczynski, S. Cadeddu, H. Cai, A. Caillet, R. Calabrese, S. C. Ramirez, L. Calefice, S. Cali, M. Calvi, M. C. Gomez, P. C. Magalhaes, J. I. Cambon Bouzas, P. Campana, D. H. Campora Perez, A. F. C. Quezada, S. Capelli, L. Capriotti, R. Caravaca-Mora, A. Carbone, L. C. Salgado, R. Cardinale, A. Cardini, P. Carniti, L. Carus, A. Casais Vidal, R. Caspary, G. Casse, M. Cattaneo, G. Cavallero, V. Cavallini, S. Celani, S. Cesare, A. J. Chadwick, I. Chahrour, H. Chang, M. Charles, P. Charpentier, E. Chatzianagnostou, M. Chefdeville, C. Chen, S. Chen, Z. Chen, A. Chernov, S. Chernyshenko, X. Chiotopoulos, V. Chobanova, M. Chruszcz, A. Chubykin, V. Chulikov, P. Ciambone, X. C. Vidal, G. Ciezarek, P. Cifra, P. E. L. Clarke, M. Clemencic, H. V. Cliff, J. Closier, C. C. Toapaxi, V. Coco, J. Cogan, E. Cogneras, L. Cojocariu, S. Collaviti, P. Collins, T. Colombo, M. Colonna, A. Comerma-Montells, L. Congedo, A. Contu, N. Cooke, C. Coronel, I. Corredoira, A. Correia, G. Corti, J. C. Meldrum, B. Couturier, D. C. Craik, M. C. Torres, E. C. Rivera, R. Currie, C. L. Da Silva, S. Dadabaev, L. Dai, X. Dai, E. Dall’Occo, J. Dalseno, C. D’Ambrosio, J. Daniel, A. Danilina, P. d’Argent, G. Darze, A. Davidson, J. E. Davies, O. De Aguiar Francisco, C. De Angelis, F. De Benedetti, J. de Boer, K. De Bruyn, S. De Capua, M. De Cian, U. De Freitas Carneiro Da Graca, E. De Lucia, J. M. De Miranda, L. De Paula, M. De Serio, P. De Simone, F. De Vellis, J. A. de Vries, F. Debernardis, D. Decamp, V. Dedu, S. Dekkers, L. Del Buono, B. Delaney, H.-P. Dembinski, J. Deng, V. Denysenko, O. Deschamps, F. Dettori, B. Dey, P. Di Nezza, I. Diachkov, S. Didenko, S. Ding, L. Dittmann, V. Dobishuk, A. D. Docheva, C. Dong, A. M. Donohoe, F. Dordei, A. C. dos Reis, A. D. Dowling, W. Duan, P. Duda, M. W. Dudek, L. Dufour, V. Duk, P. Durante, M. M. Duras, J. M. Durham, O. D. Durmus, A. Dziurda, A. Dzyuba, S. Easo, E. Eckstein, U. Egede, A. Egorychev, V. Egorychev, S. Eisenhardt, E. Ejopu, L. Eklund, M. Elashri, J. Ellbracht, S. Ely, A. Ene, J. Eschle, S. Esen, T. Evans, F. Fabiano,

- S. Faghih, L. N. Falcao, Y. Fan, B. Fang, and L. Collaboration. Observation of charge–parity symmetry breaking in baryon decays. *Nature*, 643(8074): 1223–1228, Jul 2025. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/s41586-025-09119-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-025-09119-3>.
- [15] W. Demtröder. *Experimentalphysik 4: Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 5. Aufl. edition, 2017. ISBN 978-3-662-52883-9. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52884-6>.
- [16] M. Kobel, U. Bilow, P. Lindenau, and B. Schorn. Ladungen, Wechselwirkungen und Teilchen. URL <https://www.teilchenwelt.de/materialien/vierbaendiges-unterrichtsmaterial/>.