UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

Experimentelle Physik 3
Relativität und Quantenphysik

Lehramt für Gymnasien

— Nur für den universitätsinternen Gebrauch, nicht zur Weitergabe bestimmt —

Michael Himpel
Universität Greifswald
https://physik.uni-greifswald.de/lehramt-exphy/
himpel@physik.uni-greifswald.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Abschnitt 1

Vorwort

Dieses Buch enthält die wesentlichen Inhalte der Vorlesung über Experimentelle Physik 3 (Relativität und Quantenphysik) für das Lehramt Physik, wie sie an der Universität Greifswald stattfindet. Es soll als semesterbegleitende Ergänzung zur Vorlesung für alle Studierenden des Lehramts Physik dienen. An den meisten Universitäten besuchen die angehenden PhysiklehrerInnen die gleichen Vorlesungen wie die Fachphysiker. Weil das Zeitpensum der Studiengänge sich jedoch deutlich unterscheidet, sollte man dies auch in der Behandlung des Stoffes berücksichtigen. Mir ist bewusst, dass Lehramtsstudierenden weniger Übungszeit als Studierenden der Fachphysik zur Verfügung steht. Deswegen hoffe ich, dass zumindest das Lesen der Rechenwege eine gewisse Gewöhnung an die mathematische Formulierung hervorruft. Ich gebe mir Mühe, die Rechenwege so ausführlich wie möglich darzustellen. Die Rechnungen sollten also für alle mit grundlegendem Mathematikwissen aus den Einführungsveranstaltungen nachvollziehbar sein, obwohl der Detailgrad an sich nicht verringert wurde.

> Mit schwarzer Linie hervorgehobene Textbereiche stellen Ergänzungen, Zahlenbeispiele oder praktische Anwendungen des Lehrstoffes dar.

> Blaue Textbereiche enthalten zentrale Aussagen, die unbedingt bekannt sein sollen.

Der Teil zur Relativitätstheorie ist etwas ausführlicher als wohl in vielen Vorlesungsreihen zur Thematik üblich. Dies wurde bewusst so umgesetzt, um vornehmlich auf Interessen der SchülerInnen eingehen zu können. Es zeigt sich, dass die SuS ein großes Interesse an Begriffen wie Raumkrümmung, Schwarzen Löchern, oder gar Phänomenen wie Wurmlöchern und Zeitreisen haben. Die zukünftigen LehrerInnen sollen wenigstens grundlegend in die Lage versetzt werden, zu solchen Thematiken fundierte Aussagen zu treffen.

Dieses Buch wird voraussichtlich noch erweitert und ergänzt werden. Ich freue mich sehr über Meldungen von Rechen- oder Rechtschreibfehlern an mich!

Abschnitt 2

Mathematische Grundlagen

Es zeigt sich immer wieder, dass oft die fehlenden mathematischen Kenntnisse ein deutliches Hindernis darstellen, um die physikalischen Inhalte tatsächlich zu verstehen. Während des Studiums sollte man bei jeder Rechnung, die man nicht nachvollziehen kann, sofort das entsprechende Thema nacharbeiten um nicht wichtige “Aha”-Effekte zu verpassen. Um dieses Nacharbeiten, was natürlich sehr zeitintensiv ist, so weit wie möglich zu reduzieren, habe ich eine Sammlung von Rechnungen zusammengestellt, die hoffentlich die mathematischen Vorkenntnisse abdecken – eine Art Selbsttest. Kursteilnehmer, die bei diesen Aufgaben Probleme haben, müssen so schnell wie möglich diese Wissenslücken schließen! Dazu gehört nicht nur das Lesen der Beispiele in diesem Text, sondern unbedingt auch das eigenständige Lösen entsprechender Aufgaben. Es gibt also zu jedem Problem eine Aufgabe mit vollständiger Lösung und Lösungsweg und noch einige Übungsaufgaben ohne Lösungsweg.

Abschnitt 2.1
Trigonometrische Funktionen

Grundlagen:

- $\sin(\pi/4) = ?$
- $\sin(\pi/2) = ?$
- $\cos(\pi/4) = ?$
- $\cos(\pi/2) = ?$
- ...
- $\frac{\partial}{\partial x}\sin(x)$, $\frac{\partial}{\partial x}\cos(x)$
- geläufige Umformungen: $\sin^2(x) = ?$, $\cos^2(x) = ?$, $\tan^2(x) = ?$, $\sin(x)\cdot\cos(x) = ?$

Abschnitt 2.2
Komplexe Zahlen

Wir benötigen komplexe Zahlen in diesem Semester zur Darstellung von Wellenfunktionen in der Quantenphysik. Zentraler Punkt, um mit den komplexen Zahlen arbeiten zu können ist das Verständnis der eulerschen Formel:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{2.1}$$

Diese kann man nutzen, um die Darstellung komplexer Zahlen zu transformieren ($a+ib$ in $A\cdot e^{i\varphi}$ und umgekehrt). Dabei ist der Betrag A gegeben durch $A = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ und der Phasenwinkel φ kann durch $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ bestimmt werden. Für die Phasenwinkel sollte man immer das Bogenmaß nutzen.

Exponentialform von $c = 12 + i\sqrt{2}$ bestimmen:

$$A = \sqrt{12^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{146}$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right) \approx 0.1173$$

Damit gilt: $c = 12 + i\sqrt{2} = \sqrt{146}\cdot e^{i\cdot 0.1173}$

Realteil von $y = 10\cdot e^{-\frac{i}{2}\pi}$ bestimmen.

Radialteil/Betrag von $\Psi = 32\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 10i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ bestimmen.

Bestimmen sie die komplex-konjugierte Zahl C_1^* zu: $C_1 = 3 - i \cdot \sqrt{2}$

Bestimmen sie die komplex-konjugierte Zahl C_2^* zu: $C_2 = 3e^{-i\cdot\sqrt{2}}$

Abschnitt 2.3

Differentialrechnung

Das Ableiten von Funktionen muss wegen seinem häufigen Auftreten zum Handwerkszeug gehören. Die Produktregel, Kettenregel und partielles Ableiten sollten geübt werden bis es leicht anwendbare Formalismen sind. Hier ein paar Übungen komplexerer Beispiele um wieder alles aufzufrischen:

$\frac{dg}{dx}$ von $g(x) = e^{3x-3} \cdot \ln\left(x^2\right)$ bestimmen.
Das Vorgehen ist immer das gleiche: Man analysiert zuerst die “äußeren” Strukturen und geht Schritt für Schritt weiter in die “inneren” Strukturen. Als äußerste Struktur sieht man hier ein Produkt zweier Funktionen die von der gesuchten Variable x abhängen. Also muss man zuerst die Produktregel anwenden:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d(e^{3x-3})}{dx} \cdot \ln\left(x^2\right) + (e^{3x-3}) \cdot \frac{d(\ln\left(x^2\right))}{dx}$$

Jede der Funktionen, die nun abgeleitet werden müssen, sind selbst wieder “irgendwelche” Funktionen von x. Also muss man mit der Kettenregel weiter zur Variable vordringen. Die Ableitung von e^x ist e^x, die Ableitung des Logarithmus $\ln(x)$ ist $1/x$.

$$\frac{dg}{dx} = e^{3x-3} \cdot \frac{d(3x-3)}{dx} \cdot \ln\left(x^2\right) + (e^{3x-3}) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}x^2$$

Diese Schritte führen wir jetzt aus und sehen, dass danach keine Verkettungen mehr übrig sind. Das Ergebnis lautet dann nach Kürzen und Ausklammern:

$$\frac{dg}{dx} = e^{3x-3} \cdot 3 \cdot \ln\left(x^2\right) + (e^{3x-3}) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = e^{3x-3} \cdot \left(3\ln\left(x^2\right) + \frac{2}{x}\right)$$

$\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ von $\zeta(x) = \frac{\left(1-e^{3x-3}\right)}{3\sqrt{y}\cdot e^{x^2}}$ bestimmen.

$\frac{d\omega}{dk}$ von $\omega(k) = \cos\left(kx - \varphi\right) \cdot \sqrt{\sin\left(kx - \varphi\right)}$ bestimmen.

Abschnitt 2.4

Integralrechnung

Die Integralrechnung ist prinzipiell schwieriger als die rein formale Differentiation. Man ist zum Teil nicht in der Lage, analytische Lösungen für Integrale zu finden und muss numerische Methoden anwenden. In dieser Vorlesung sind aber nur grundlegende Integrale nötig um den Themen zu folgen. Oft haben wir es mit kugelsymmetrischen Problemen zu tun (wie schon in der Vorlesung zur Mechanik oder Elektrodynamik). Deswegen führen die Aussagen oft zu Integralen der Form $\int_{r=r_0}^{\infty} f(r)dr$. Es sollten die Methoden der Substitution und der partiellen Integration bekannt sein.

Bestimmen Sie $\int\limits_{r=r_0}^{\infty} e^{-3r+2}dr$.

Hier können wir die Substitution anwenden. Ziel ist es dabei, die “komplizierte” Funktion in eine bekannte Form (e^x) zu bringen. Es bietet sich also die Substitution $x = -3r + 2$ an. Man muss aber neben dem Exponenten auch das Differential dr mit der neuen Variable x beschreiben. Dafür erhält man einen Ausdruck durch Ableiten und Umstellen:

$$\frac{dx}{dr} = -3 \rightarrow dr = -\frac{1}{3}dx$$

Nun kann man alles Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{r=r_0}^{\infty} e^{-3r+2}dr &= \int\limits_{x_0=(-3r_0+2)}^{-\infty} e^x \left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= \left[-\frac{1}{3}e^x\right]_{-3r_0+2}^{-\infty} dx = \left[\left(e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{3}e^{-3r_0+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}e^{-3r_0+2}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\int\limits_{r=r_0}^{\infty} x \cdot e^{-2r}dr$ durch partielle Integration.

Bestimmen Sie $\int\limits_{r=0}^{\pi} cos^2(r \cdot t)dr$.

Abschnitt 2.5

Differentialgleichungen

Wir werden in diesem Semester viel mit Differentialgleichungen arbeiten. Das kreative Lösen komplizierter Gleichungen geht jedoch über den Rahmen der Vorlesung für Lehramtsstudierende hinaus. Dennoch ist es nötig, einfache Differentialgleichungen durch Einsetzen von gegebenen Lösungen oder Ansätzen (Heißer Tipp: e-Funktion!) zu analysieren:

Was lernen wir über die Funktion $\omega(k)$ wenn man in die Schwingungsdifferentialgleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$ einen harmonischen Lösungsansatz

$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$ **einsetzt?** Zunächst bilden wir die geforderte Ableitung der linken Seite der DGL:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= x_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \cdot \omega \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= x_0 \omega \cdot (-1) \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \cdot \omega = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) \end{aligned}$$

Nun kann man x und $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ in die DGL einsetzen:

$$-x_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

Jetzt kann man durch Kürzen und Umstellen die gesuchte Beziehung zwischen ω und k finden:

$$\begin{aligned} -\cancel{x_0} \omega^2 \cancel{\sin(\omega t - \varphi_0)} + \frac{k}{m} \cdot \cancel{x_0} \cancel{\sin(\omega t - \varphi_0)} &= 0 \\ \omega(k) &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + E \cdot \Psi(x) = 0$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(r) = e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$ **diese DGL löst. Was ergibt sich für eine Bedingung an** E**?**

Diese Aufgaben sollten, mit Ausnahme der komplexen Zahlen, mit dem Leistungskurswissen zu Lösen sein. Falls sich gezeigt hat, dass dieses Wissen nicht abrufbar ist muss es mit hoher Priorität nachgeholt werden.

Relativität

> Meine Herren! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.
>
> *Hermann Minkowski (1908)*

Abschnitt 3

Einführung

Dem Begriff der *modernen Physik* werden die Themenbereiche Quantenphysik/Quantenmechanik und Relativitätstheorie zugeordnet. Zunächst soll hier die spezielle Relativitätstheorie (kurz: SRT) und danach die allgemeine Relativitätstheorie (kurz: ART) betrachtet werden. Ebenso wie in der Quantenphysik haben wir es hier mit einem mathematisch sehr anspruchsvollen Gebiet der Physik zu tun – die Sprache der Relativitätstheorie ist die Differentialgeometrie, Tensoralgebra und komplizierte Systeme aus partiellen Differentialgleichungen. Es ist wohl klar, dass wir ein solches Themenfeld niemals “angemessen” bearbeiten können. Mein Ziel ist bei der Ausarbeitung dieser Thematik ist es, den Teilnehmern die wichtigsten Werkzeuge in die Hand zu geben um die relativistischen Effekte nachvollziehen zu können. Anders als in vielen Einführungsveranstaltungen werde ich aber die Rechnungen stets kompatibel zur allgemeinen Relativitätstheorie halten. Damit das nicht zu schwer wird, werden gezielt einige Beweise und Techniken ausgelassen die nicht unbedingt nötig sind für die hier betrachteten Effekte. Wir bekommen es also nur mit Tensoren zu tun, die wie Vektoren oder Matrizen aussehen. Für die Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie in der Schule genügen dann einfache und handliche Gleichungen – für deren Herleitung und ein tieferes Verständnis der Ursachen müssen wir aber dann doch die Mathematik etwas weiter ausführen.

Für die folgenden Kapitel habe ich oft auf das Standardwerk zur Einführung in die Relativitätstheorie von Torsten Fließbach [1] zurückgegriffen. Die konkreten Beispiele stammen dann oft aus dem Buch von Alexandra Stillert [2]. Einige Teile des Vorlesungsskriptes von Thomas Filk [3] habe ich für die Aufarbeitung der mathematischen Grundlagen verwendet.

Abschnitt 3.1

Ätherhypothese

Im 19. und im frühen 20. Jahrhundert war die Ätherhypothese vorherrschende Erklärung für die Fortbewegung elektromagnetischer Wellen. Man kann sich diesen Äther als

Pendant zur Schallausbreitung vorstellen, die auf ein Medium zur Fortbewegung angewiesen ist, weil nur so die Rückstellkräfte des Mediums die Druckwellen übertragen können. Der Äther soll demnach das Medium sein, in dem sich Fluktuationen des elektrischen und magnetischen Feldes ausbreiten. Die gängige Vorstellung also war, dass es einen ruhenden Äther als Medium allgegenwärtig gibt, und sich elektromagnetische Wellen relativ zu diesem Äther mit der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s ausbreiten. Die Erde bewegt sich dabei auf ihrer Bahn durch diesen Äther. Es müsste also eine relative Geschwindigkeit der Erde zum Äther geben – den sogenannten Ätherwind. Um die Geschwindigkeit des Ätherwindes zu bestimmen, unternahmen Michelson und Morley 1887 ihr berühmtes Experiment [4]: Sie haben die Geschwindigkeit der Lichtausbreitung mit einem Interferometer einmal parallel zur Erdbewegung und einmal senkrecht dazu gemessen. Das Experiment wurde oft und unter vielen Bedingungen wiederholt. Das Ergebnis aber war stets: Die Lichtgeschwindigkeit war immer gleich. Die Erde scheint sich nicht relativ zum Äther zu bewegen. Weil es damals keinen Zweifel an der Existenz eines Äthers gab, wurden zwei Konzepte entwickelt um dessen Existenz gewissermaßen zu retten:

- Die Erde führt den Äther vollständig mit sich. Dies würde aber nur durch Reibung funktionieren, der Äther an sich muss aber aus anderen Gründen nahezu vollständig reibungsfrei für Materie sein. Hierin haben viele Physiker einen Widerspruch gesehen.
- Hendrik Antoon Lorentz schlug vor, dass sich Abstände relativ zum Äther um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzen könnten – die sogenannte Lorentz-Kontraktion.

Gerade das zweite Konzept könnte die Ätherhypothese retten. Es gab aber Probleme mit der Ursache und Interpretation dieses Ansatzes.

Im Zuge dieser Diskussionen veröffentlichte Albert Einstein im Jahr 1905 im Alter von 26 Jahren den Artikel "Über die Elektrodynamik bewegter Körper" [5]. Dieser Artikel enthält bereits alle Aussagen der speziellen Relativitätstheorie! [1] Die zentralen Postulate waren

Einsteinsche Postulate

- Absolute, gleichförmige Bewegung kann man nicht messen.
- Die Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Die erste Aussage beinhaltet im Wesentlichen die Erweiterung der Newtonschen Relativität auf alle Phänomene, nicht nur die mechanischen. Demnach sollen nun auch die Maxwell-Gleichungen in allen Inertialsystemen gelten.

Die zweite Aussage ist eine übliche Eigenschaft für Wellen: Die Schallwellen, die von einer Krankenwagensirene ausgehen, breiten sich relativ zur Luft immer mit der gleichen Geschwindigkeit aus, egal ob sich der Krankenwagen relativ zur Luft bewegt oder nicht. Die Geschwindigkeit der Schallwellen hängt einzig und allein von den Eigenschaften der Luft ab.

Abschnitt 3.2
Lorentz-Transformation

Der Weg zu den Erkenntnissen der Relativitätstheorie führt nun über das Verständnis von Bezugssystemen. Man kann die Einsteinschen Postulate verwenden, um eine

[1] Im selben Jahr hatte er übrigens auch die Quantenhypothese zum Photoeffekt veröffentlicht.

Transformationsbeziehung zwischen einem unbewegten und einem gleichförmig bewegten Bezugssystem (Inertialsystem) herzuleiten. Dafür legen wir nun zunächst die mathematischen Grundlagen, die zwar zunächst übertrieben scheinen, aber dafür später nahtlos in der allgemeinen Relativitätstheorie anknüpfen. Wir beschreiben im Folgenden die sogenannte *Raumzeit* als 4er Vektoren der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Das 0-te Element dieses Vektors ist also die Strecke $s = c \cdot t$ die ein Lichtstrahl in der Zeit t zurücklegt. Diese Koordinate ist also Ausdruck für die Zeit, aber in den Einheiten eines Weges. Die anderen Komponenten sind dann in einem kartesischen Koordinatensystem die x, y und z-Koordinaten. In Abb. 1 ist ein beispielhaftes Minkowski-Diagramm mit der Zeitachse und einer Raumkomponente x gezeigt. In der Relativitätstheorie schreibt man diese Art von Vektoren statt als Vektor $\vec{x}$ günstigerweise nur als Komponenten x^μ. Dabei ist x der Name des Vektors und μ ist eine hochgestellte griechische Zählvariable (manchmal also auch ν oder $\alpha, \beta, \dots$), die von $0 \dots 3$ läuft. Hinweis: Man muss stets aufpassen und deutlich kennzeichnen, wenn ein solcher Komponentenvektor potenziert wird, beispielsweise durch Klammersetzung: $(x^\mu)^2$. Wir werden auch tiefgestellten Komponenten begegnen (x_μ). Man nennt diese Größen ko- und kontravariante Tensoren bzw. Vektoren. Im Rahmen dieses Lehrbuches sind die Details hierzu nicht unbedingt notwendig und es wird nicht näher darauf eingegangen.

Es werden im Laufe der Rechnungen sehr häufig Summen der Komponenteneinträge von Vektoren zustandekommen. Es ist daher zweckmäßig eine Konvention einzuführen um sich das ständige Benutzen des Summenzeichens zu ersparen:

Einsteinsche Summenkonvention
Über doppelt auftretende Indizes auf einer Seite einer Gleichung wird summiert, wenn ein Index oben und der andere unten steht.

$$x_\mu x^\mu = \sum_\mu x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3$$

Wir nutzen diese Summenkonvention nun testweise, um die Wegelemente für bekannte Koordinatensysteme darzustellen. Im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (x, y) berechnet man das Wegelement ds bekanntlich durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 1 \cdot (dx^1)^2 + 1 \cdot (dx^2)^2 \tag{3.2}$$

In der Formulierung mit der Summenkonvention geht es uns um den Vektor x mit den Komponenten $x^\mu = (x^1, x^2) = (x, y)$. Die Differentiale lauten dann also $dx^\mu = (dx^1, dx^2)$. Wie kann man diese Summe aus zwei Summanden nun durch die Summenkonvention beschreiben? Bei unserem erwünschten Ausdruck stehen beide Indizes oben. Der erste offensichtliche Versuch $dx_\mu dx^\mu$ ergibt leider $dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2$, dass ist nicht genau das was wir wollen. Man kann durch einen kleinen Umweg[2] mit einer Hilfsfunktion $g_{\mu\nu}$ arbeiten. Mit der Summenkonvention berechnet man damit ds^2 durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dies sieht erstmal sehr ungewohnt aus. Es stellt sich hier jetzt die Frage, welche Werte der $g_{\mu\nu}$-Term haben muss, damit auch das erwünschte Wegelement herauskommt. Auf

[2] ...der sich später noch als Abkürzung herausstellen wird...

der rechten Seite der Gleichung stehen die Indizes μ und ν jeweils einmal unten und oben, hier haben wir es also mit einer Summe gemäß Konvention zu tun und lösen diese nun auf:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_\mu \left(\sum_\nu g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right) = \sum_\mu \left(g_{\mu 0} dx^\mu dx^0 + g_{\mu 1} dx^\mu dx^1 \right) \\ &= g_{00} dx^0 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1 + g_{10} dx^1 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 \\ &= g_{00} (dx^0)^2 + g_{01} dx^0 dx^1 + g_{10} dx^1 dx^0 + g_{11} (dx^1)^2 \end{aligned}$$

Übrigens ist das Ergebnis identisch, wenn man zunächst über μ und dann über ν summiert. Durch Vergleich mit Gl. 3.2 können wir nun die entsprechenden Elemente für $g_{\mu\nu}$ ermitteln:

$$g_{00} = 1 \qquad g_{01} = 0 \qquad g_{10} = 0 \qquad g_{11} = 1$$

Mit diesen Werten erhalten wir also für $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ nach dem Berechnen der Summe $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Die Größe g bestimmt also, was wir als Wegelement für unsere Koordinaten erhalten. Man nennt $g_{\mu\nu}$ dementsprechend den "metrischen Tensor" oder auch "die Metrik". Für dreidimensionale kartesische Koordinaten $x^\mu = (x^1, x^2, x^3)$ kann man sich nun leicht denken, dass die Metrik dann lauten muss:

$$g_{00} = g_{11} = g_{22} = 1 \qquad \text{sonst } g_{\mu\nu} = 0$$

Die Einträge der Metrik kann man auch in Matrix-Form darstellen, falls dies der Übersichtlichkeit hilft. Dann sehen die beiden Beispiele also wie folgt aus:

$$g_{\mu\nu}^{\text{2D-kart}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\nu}^{\text{3D-kart}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass die Metrik stets nur konstante Werte, 0 oder 1, enthält. Eine solche Metrik nennt man flach. Es sind aber, ohne das wohl näher darauf eingegangen wurde, auch schon nicht-flache (gekrümmte!) Metriken bekannt. Aus der Mechanik-Vorlesung sollten noch die Polarkoordinaten und die Sphärischen Koordinaten bekannt sein. Für diese gelten die Wegelemente

$$\begin{aligned} (ds^2)^{\text{polar}} &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\ (ds^2)^{\text{kugel}} &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 (\sin\theta)^2 d\varphi^2 \end{aligned}$$

und deshalb lauten diesmal die Einträge für die Metrik

$$g_{\mu\nu}^{\text{polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\nu}^{\text{kugel}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2(\sin\theta)^2 \end{pmatrix}$$

, wie man direkt durch Vergleich der Koeffizienten vor den $(dx^\mu)^2$-Einträgen ablesen kann. In der speziellen Relativitätstheorie betrachten wir eine flache Geometrie wie in den Fällen der kartesischen Koordinaten. Durch die Einführung der Zeit als zusätzliche Komponente gibt es nun aber eine Besonderheit für die Berechnung des Wegelementes. Der Abstand zwischen zwei *Ereignissen*, [3] $x_1^\mu = (ct_1, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ und $x_2^\mu(ct_2, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ ist etwas anderes als allein der räumliche Abstand zweier Vektoren. Im Minkowski-Diagramm Abb. 1 ist der Abstand zweier Ereignisse eingezeichnet. Wir definieren diesen

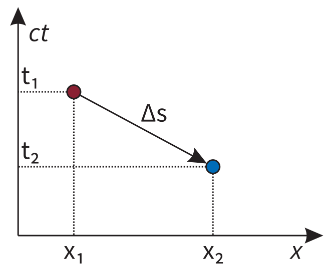

Abb. 1. Ein Minkowski-Diagramm für 2 Ereignisse und der raumzeitliche Abstand zwischen ihnen.

[3] Man spricht von Punkten in der Raumzeit allgemein als "Ereignis".

Abstand (und damit auch zwangsweise das Wegelement) als

$$\Delta s^2 = \underbrace{c^2(t_2 - t_1)^2}_{\text{zeitl. Abstand}} \underbrace{-(x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2}_{\text{minus räuml.Abstand}}$$

Die wesentliche Neuerung hierbei ist das Minuszeichen vor den Raumkomponenten. Wir werden sehen, dass diese ungewohnte Definition des Abstandes die Formulierung der speziellen Relativitätstheorie sehr angenehm macht. Mit der Summenkonvention und einer Metrik lautet dieser Abstand

Wegelement in Minkowski-Raumzeit

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (c \cdot dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 \tag{3.3}$$

Hierbei wird $\eta_{\mu\nu}$ als Minkowski-Metrik bezeichnet und wegen der Wichtigkeit in der speziellen Relativitätstheorie mit einem eigenen Formelzeichen η statt g bedacht. Die Elemente der Metrik lauten nun [4]

Minkowski Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Um etwas Übung im Umgang mit dieser Formulierung zu bekommen, nutzen wir nun die Minkowski Metrik, um das Wegelement in der 4-dimensionalen Raumzeit für die Koordinaten $x^\mu = (ct, x^1, x^2 x^3)$ zu bestimmen. Zur Erinnerung: Im dreidimensionalen kartesischen System würde man das Wegelement berechnen gemäß $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Dies entspricht dem Satz des Pythagoras in einem kartesischen Koordinatensystem. In der Minkowski-Raumzeit erhält man das Wegelement durch Aufsummieren von $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Hier soll zur Übung ganz ausführlich vorgegangen werden:

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_\mu \sum_\nu \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.5}$$

$$= \sum_\mu \left(\eta_{\mu 0} dx^\mu dx^0 + \eta_{\mu 1} dx^\mu dx^1 + \eta_{\mu 2} dx^\mu dx^2 + \eta_{\mu 3} dx^\mu dx^3 \right) \tag{3.6}$$

$$= \sum_\mu \left(\eta_{\mu 0} dx^\mu dx^0 \right) + \sum_\mu \left(\eta_{\mu 1} dx^\mu dx^1 \right) + \sum_\mu \left(\eta_{\mu 2} dx^\mu dx^2 \right) + \sum_\mu \left(\eta_{\mu 3} dx^\mu dx^3 \right) \tag{3.7}$$

Bevor die zweite Summe über μ berechnet wird, schauen wir uns $\eta_{\mu\nu}$ genauer an. Es gibt nur Elemente in der Hauptdiagonalen – alle anderen Elemente mit $\mu \neq \nu$ werden zu Null. Bei der Summe über $\mu = 0 \ldots 3$ werden nun alle Elemente mit $\mu \neq \nu$ direkt weggelassen und es bleibt nur:

$$(ds)^2 = \underbrace{\eta_{00}}_{=1} dx^0 dx^0 + \underbrace{\eta_{11}}_{=-1} dx^1 dx^1 + \underbrace{\eta_{22}}_{=-1} dx^2 dx^2 + \underbrace{\eta_{33}}_{=-1} dx^3 dx^3$$

Dies entspricht dem vorher definierten Wegelement in Gl. 3.3 für die Minkowski-Raumzeit.

[4] Die Minkowski-Metrik kann auch mit umgekehrten Vorzeichen definiert werden. Dies ist Konventiossache und muss bedacht werden wenn man sich verschiedenen Literaturvorlagen bedient!

Wir haben jetzt alle Mittel zur Verfügung um die Lorentz-Transformation, das zentrale Element der speziellen Relativitätstheorie, herzuleiten. Die Einsteinschen Postulate besagen, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich sein soll. Das heißt die Lichtgeschwindigkeit ist einerseits $\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = c$, und muss andererseits auch in einem anderen Inertialsystem (mit ' gekennzeichnet) $\frac{\Delta\vec{x}'}{\Delta t'} = c$ sein. Das führt uns wegen $(c\Delta t)^2 = (\Delta\vec{x})^2$ zu

$$\underbrace{(c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2}_{(ds)^2} = 0 = \underbrace{(c\Delta t')^2 - (\Delta\vec{x}')^2}_{(ds')^2}$$

Wir können also das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit miteinander in der Aussage kombinieren, dass

- Das Wegelement $(ds)^2$ konstant ist

- Eine Transformation in ein anderes Inertialsystem das Wegelement $(ds)^2$ nicht ändern darf ($(ds)^2 = (ds')^2$).

Wir suchen also genau diese Transformationen, die das Wegelement nicht verändern wenn man sich gedanklich in ein anderes Inertialsystem begibt. Wir erinnern uns: Ein Inertialsystem darf sich nur durch eine konstante Geschwindigkeit im Vergleich zum Ursprungssystem unterscheiden. Daher suchen wir eine Transformation $\Lambda(\vec{v})$ der Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \Lambda(\vec{v}) \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Koordinaten transformieren sich dann gemäß

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^\mu_0 x^0 + \Lambda^\mu_1 x^1 + \Lambda^\mu_2 x^2 + \Lambda^\mu_3 x^3$$

oder ausgeschrieben für den allgemeinsten Fall:

$$\begin{aligned}
(x^0)' = \Lambda^0_\nu x^\nu &= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \\
(x^1)' = \Lambda^1_\nu x^\nu &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3 \\
(x^2)' = \Lambda^2_\nu x^\nu &= \Lambda^2_0 x^0 + \Lambda^2_1 x^1 + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3 \\
(x^3)' = \Lambda^3_\nu x^\nu &= \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3
\end{aligned}$$

Jetzt geht es daran, die einzelnen Einträge dieser Matrix Λ, die von $\vec{v}$ abhängen darf, zu bestimmen. Der Einfachheit halber gehen wir von einer Bewegung nur in x-Richtung aus. Die Komponenten $x^2 = (x^2)'$ und $x^3 = (x^3)'$ bleiben also von der Transformation unangetastet und die Geschwindigkeit v hat nur eine Komponente v_x in x-Richtung. Durch die Annahme, dass $x^2 = (x^2)'$ und $x^3 = (x^3)'$ gilt, lassen sich bereits viele Einträge bestimmen. Damit die beiden letzten Gleichungen diese Forderung erfüllen, muss gelten:

$$\Lambda^2_0 = \Lambda^2_1 = \Lambda^2_3 = \Lambda^3_0 = \Lambda^3_1 = \Lambda^3_2 = 0 \qquad \Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = 1$$

Außerdem dürfen dann die Komponenten x^2 und x^3 auch für die Transformation von x^0 und x^1 keinen Einfluss haben, weil sie ja auch auch beliebig $x^2 = x^3 = 0$ gesetzt werden können. Also entfallen vier weitere Elemente von Λ:

$$\Lambda^0_2 = \Lambda^0_3 = \Lambda^1_2 = \Lambda^1_3 = 0$$

Nach der Elimination von vielen Einträgen bleiben nur vier gesuchte Elemente von Λ übrig die nicht 0 oder 1 sind:

$$\begin{aligned}(x^0)' &= \Lambda^0_\nu x^\nu &&= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1\\ (x^1)' &= \Lambda^1_\nu x^\nu &&= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1\\ (x^2)' &= \Lambda^2_\nu x^\nu &&= x^2\\ (x^3)' &= \Lambda^3_\nu x^\nu &&= x^3\end{aligned}$$

Das transformierte Wegelement wird in Komponentenschreibweise wie folgt geschrieben:

$$(ds')^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu)'(dx^\nu)'$$

Jedes Differential $(dx^\mu)'$ wird nun durch die transformierte Koordinate $(dx^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$ ersetzt. Bei dieser Ersetzung von Termen muss man allerdings vorsichtig sein. Wir müssen hier explizit die Reihenfolge der Summation vorgeben: Es muss zuerst die Koordinate transformiert werden ($\sum \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$) und dann soll über die Metrik summiert werden. Damit diese Summe also auch das bedeutet, was wir beabsichtigen, nutzen wir neue Zählindices α und β. Das ergibt

$$\eta_{\mu\nu}(dx^\mu)'(dx^\nu)' = \eta_{\mu\nu}\cdot\Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha\cdot\Lambda^\nu_\beta dx^\beta = \eta_{\mu\nu}\cdot\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta dx^\alpha dx^\beta$$

, was gemäß $(ds')^2 = (ds)^2$ zu

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

führt. Aus dieser Gleichung kann man direkt ablesen, dass

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

gelten muss. Dies ergibt einige Gleichungen zur Bestimmung der Einträge von λ. Weil wir uns hier auf die x-Richtung beschränkt haben (y und z-Richtung werden also nicht transformiert), kann man sich wie oben gezeigt auf wenige Komponenten von Λ beschränken:

$$\Lambda = \left(\Lambda^\alpha_\beta\right) = \begin{pmatrix}\Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0\\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hierfür wurde der obere Index von Λ als Zeilenindex einer Matrix, der untere Index als Spaltenindex geschrieben. Um weniger schreiben zu müssen, beschränken wir uns auf den relevanten Teil dieser Matrix – also die obere linke Ecke. Die Bestimmung der einzelnen Einträge dieser Komponenten ist nun eng an die Vorgehensweise in [6] angelegt. Wir haben es also für die Gleichung 3.8 zu tun mit den Tensoren

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix}\Lambda^0_0 & \Lambda^0_1\\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Damit kann man nun aus $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$ für die möglichen Kombinationen von α und β Gleichungen für die jeweiligen Komponenten aufstellen. Als Beispiel soll das nun für die erste Kombination $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ gezeigt werden:

$$\eta_{00} = \Lambda^{\mu}_{0}\Lambda^{\nu}_{0}\eta_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \Lambda^{\mu}_{0} \left(\sum_{\nu} \Lambda^{\nu}_{0}\eta_{\mu\nu} \right) \tag{3.10}$$

$$= \sum_{\mu} \Lambda^{\mu}_{0} \left(\Lambda^{0}_{0}\eta_{\mu 0} + \Lambda^{1}_{0}\eta_{\mu 1} \right) \tag{3.11}$$

$$= \Lambda^{0}_{0} \left(\Lambda^{0}_{0} \underbrace{\eta_{00}}_{=1} + \Lambda^{1}_{0} \underbrace{\eta_{01}}_{=0} \right) + \Lambda^{1}_{0} \left(\Lambda^{0}_{0} \underbrace{\eta_{10}}_{=0} + \Lambda^{1}_{0} \underbrace{\eta_{11}}_{=-1} \right) \tag{3.12}$$

$$1 = \left(\Lambda^{0}_{0}\right)^2 - \left(\Lambda^{1}_{0}\right)^2 \tag{3.13}$$

Für die anderen 3 Kombinationen von α und β ergeben sich ganz ähnliche Gleichungen. Davon sind zwei identisch – es bleiben also insgesamt 3 nutzbare Gleichungen übrig:

$$\left(\Lambda^{0}_{0}\right)^2 - \left(\Lambda^{1}_{0}\right)^2 = 1 \qquad -\left(\Lambda^{1}_{1}\right)^2 + \left(\Lambda^{0}_{1}\right)^2 = -1$$

$$\Lambda^{0}_{0}\Lambda^{0}_{1} - \Lambda^{1}_{0}\Lambda^{1}_{1} = 0$$

Diese Gleichungen (klarer Hinweis für die Kenner durch die $a^2 - b^2 = 1$-Form) lassen sich durch hyperbolische Funktionen lösen. Es folgt daher für die Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} \Lambda^{0}_{0} & \Lambda^{0}_{1} \\ \Lambda^{1}_{0} & \Lambda^{1}_{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

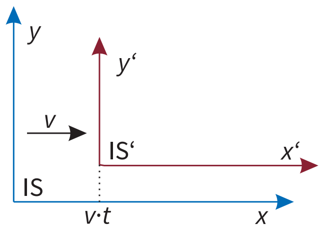

Abb. 2. Ein Inertialsystem IS' bewegt sich relativ zum System IS mit einer konstanten Geschwindigkeit v.

Wie transformiert sich jetzt also konkret die x-Koordinate für ein mit Geschwindigkeit v bewegtes Bezugssystem (siehe auch Abb. 2)? In dem ruhenden System gilt wie üblich $x^1 = v \cdot t$. Für die $(x^1)'$-Komponente ergibt sich

$$(x^1)' = 0 = \Lambda^{1}_{0}ct + \Lambda^{1}_{1}x^1 = \Lambda^{1}_{0}ct + \Lambda^{1}_{1}vt$$

Wir wollen hier den Koordinatenursprung (deswegen $(x^1)' = 0$) betrachten. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Umstellen

$$-\frac{\Lambda^{1}_{0}}{\Lambda^{1}_{1}} = \frac{v}{c} = \frac{-\sinh\psi}{\cosh\psi} = -\tanh\psi$$

Daraus kann man nun einen Ausdruck für $\psi = \operatorname{arctanh}(\frac{v}{c})$ erhalten und durch Nutzung der Definitionen der Hyperbolischen Funktionen die folgenden Ausdrücke finden:

$$\sinh\Big(\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\Big) = \frac{(\frac{v}{c})}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \tag{3.14}$$

$$\cosh\Big(\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\Big) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \tag{3.15}$$

Damit können wir nun endlich die Komponenten der Lorentz-Transformation konkret angeben. Zur Vereinfachung wird nun der Term γ statt $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ [1]

[1] *Mit dieser Abkürzung muss man vorsichtig sein. In verschiedenen Lehrbüchern wird γ unterschiedlich genutzt. Manchmal gilt auch $\gamma = \sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$ oder $\gamma = (\frac{v}{c})^2$*

Lorentz-Transformation

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & -\frac{(\frac{v}{c})}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{(\frac{v}{c})}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\cdot\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\cdot\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Abschnitt 4

Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie folgt nun ausschließlich aus den Bereits gefundenen Zusammenhängen. Wir werden also für die folgenden Effekte nur die gefundene Lorentz-Transformation auf verschiedenen Wege anwenden. Zur Einführung wollen wir versuchen, zwei Geschwindigkeiten im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie zu addieren.

Abschnitt 4.1

Addition von Geschwindigkeiten

In der klassischen Mechanik wird oft die Vorstellung eines fahrenden Zuges verwendet. Wenn man von einem fahrenden Zug (v_{Zug}) aus eine Pistolenkugel abfeuert ($v_{\text{Projektil}}$) wird die Geschwindigkeit für den ruhenden Beobachter $v = 0$ selbstverständlich einfach $v_{\text{Zug}} + v_{\text{Projektil}}$ sein. So einfach ist es nun in der Relativitätstheorie nicht mehr, den sonst könnte man ja leicht auf Geschwindigkeiten größer als c addieren.

Für die korrekte relativistische Addition zweier Geschwindigkeiten muss man zweimal hintereinander eine Lorentz-Transformation durchführen. Die Transformationsmatrizen Λ multiplizieren sich dann also zu

$$\Lambda\Big|_{v_1+v_2} = \Lambda\Big|_{v_1} \cdot \Lambda\Big|_{v_2} = \begin{pmatrix} \cosh\psi_1 & -\sinh\psi_1 \\ -\sinh\psi_1 & \cosh\psi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh\psi_2 & -\sinh\psi_2 \\ -\sinh\psi_2 & \cosh\psi_2 \end{pmatrix}$$

Wenn man diese Matrixmultiplikation ausführt, kann man noch Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen anwenden und erhält

$$\Lambda\Big|_{v_1+v_2} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1+\psi 2) & -\sinh(\psi_1+\psi 2) \\ -\sinh(\psi_1+\psi 2) & \cosh(\psi_1+\psi 2) \end{pmatrix}$$

Wenn man das ψ wieder durch die Ausdrücke mit v/c ersetzt, erhält man

relativistische Addition von Geschwindigkeiten

$$v_{1+2} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1\cdot v_2}{c^2}}$$

Wie man gut an Abb. 3 sehen kann, ist es auch bei der Addition einer bereits sehr großen Geschwindigkeit von $v_1 = 0.9c$ nicht möglich, den Wert c zu erreichen. Selbst bei der Addition von $0.9c + 0.9c$ erhält man nur $v_{1+2} \approx 0.98c$.

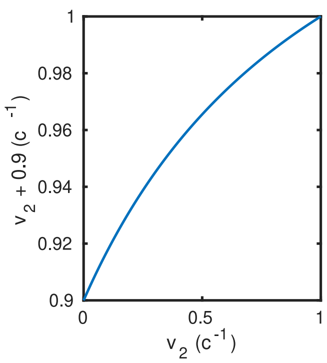

Abb. 3. Addition von Geschwindigkeiten für das Beispiel $v_1 = 0.9c$.

Abschnitt 4.2
Zeitdilatation

Den Effekt, der Zeitdilatation genannt wird, kann man "leicht" durch die Bedingung der Invarianz des Wegelemntes beschreiben. Es geht dabei um die Entwicklung der Zeitkoordinate dt (also einer Uhr) in einem bewegten Bezugssystem. Die Zeitkoordinate τ im Inertialsystem IS' ist die Zeit, die eine ruhende Uhr im System IS anzeigen würde. Jetzt wollen wir wissen, welche Zeit τ eine Uhr anzeigt, die sich in IS mit einer Geschwindigkeit v bewegt. Diese Zeit τ haben wir bisher auch mit t' bezeichnet. Hierfür versetzen wir uns zunächst in den Standpunkt des sich bewegenden Bezugssystems. Wir definieren unsere Ortskoordinaten als Nullpunkt ($x' = y' = z' = 0$). Wir selbst ruhen in unserem Bezugssystem (also zum Beispiel im Raumschiff) und setzen deshalb auch die Differentiale der Ortskoordinaten $dx' = dy' = dz' = 0$ auf Null. Es folgt daher für unser Wegelement

$$ds' = c \cdot d\tau - 0 - 0 - 0 \tag{4.1}$$

Dieses Wegelement muss nun für alle Inertialsysteme die gleiche Größe haben. Im anderen Inertialsystem sieht es so aus, als wenn sich das Raumschiff/Inertialsystem mit Geschwindigkeit v von uns wegbewegt. Deswegen schreiben wir als ruhende Beobachter

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^3 - dz^3}$$

Jetzt wird dt ausgeklammert:

$$ds = dt\sqrt{c^2 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^3}{dt^2} - \frac{dz^3}{dt^2}} = dt\sqrt{c^2 - v^2} = c \cdot dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Zusammen mit Gleichung 4.1 ergibt sich nun ein Ausdruck für die Eigenzeit τ

$$\begin{aligned} ds\Big|_{\text{Erde}} &= ds'\Big|_{\text{Raumschiff}} \\ \cancel{c} \cdot dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= = \cancel{c} d\tau \end{aligned}$$

und damit ein Ausdruck für die Zeitkoordinate eines bewegten Bezugssystems.

Eigenzeit im bewegten Inertialsystem, Zeitdilatation

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.2}$$

Was für Schlussfolgerungen kann man hieraus nun ziehen? Aus dem trivialen Fall $v = 0$ folgt, dass die Zeitspanne im System IS' (mit $v = 0$ bewegt) dann $t_2 - t_1 = \tau$ beträgt. Die Uhren gehen also synchron.

Falls aber eine Geschwindigkeit $v > 0$ in G. 4.2 eingeht, wird der Wurzelterm kleiner als 1 und es folgt damit $\tau < t_2 - t_1$. Bewegte Uhren gehen also langsammer als ruhende Uhren! Trotzdem geht aber natürlich jede Uhr in seinem Inertialsystem "richtig". Die Anzeige der Uhr kann ja schließlich nicht vom Inertialsystem abhängen. Nur wenn eine ruhende und eine bewegte Uhr nach gewisser Zeit verglichen werden, gibt es eine Diskrepanz.

Einen experimentellen Nachweis kann man durch die Höhenstrahlung realisieren (siehe Abb. 4). In der Atmosphäre entstehen durch energiereiche Strahlung Myonen, die nur eine sehr kurze Lebenszeit von durchschnittlich $T_{1/2} = 2.2\,\mu\text{s}$ haben. Diese

Lebenszeit wurde in einem "ruhenden" Labor gemessen. Die Myonen haben bei ihrer Entstehung eine Geschwindigkeit von etwa $v_\mu = 0.9994c$. Dennoch reicht diese große Geschwindigkeit eigentlich nicht, damit nach der Strecke $s \approx 10\,\text{km}$ viele Myonen die Erdoberfläche erreichen. Es wäre nur mit der Strecke $s = v_\mu \cdot T_{1/2} \approx 660\,\text{m}$ zu rechnen. Dennoch kann man viele Myonen an der Erdoberfläche nachweisen – dies ist nur mit den Effekten der speziellen Relativitätstheorie zu erklären: Im bewegten IS' des Myons gehen die Uhren einfach etwas langsamer und das Myon schafft also mehr Strecke bevor dessen Zerfallszeit abgelaufen ist. Wir schätzen also ab:

$$\Delta t_{\text{Erde}} = \sqrt{1 - \frac{0.9994c}{c}} \cdot \Delta t_\mu \approx 0.0245 \Delta t_\mu$$

Für uns ruhende Beobachter hat das Myon also offenbar $\Delta t_\mu = \frac{1}{0.0245} \cdot 2.2\,\mu\text{s} = 90\,\mu\text{s}$ Zeit bevor es zerfällt. Damit wäre die zurückgelegte Strecke groß genug um eine Myon-Detektion auf der Erdoberfläche zu erklären. Die Zeitdilatation kann man auch messen, indem zwei zunächst synchrone Atomuhren in unterschiedlichen Bezugssystemen unterwegs sind. Es gab dazu ein Experiment, in dem eine der Uhren in einem Flugzeug unterwegs war. Nach der Landung, waren die Uhren nicht mehr synchron. Die Zeitdifferenz entsprach genau den Vorhersagen der Relativitätstheorie.

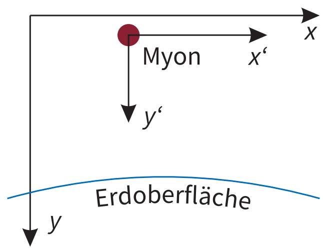

Abb. 4. Längenkontraktion vs. Zeitdilatation. Das Myon legt in seinem IS' einen wesentlich kürzeren Weg zurück, als wir im ruhenden IS messen.

Abschnitt 4.3

Längenkontraktion

Der Effekt der Längenkontraktion, der jetzt behandelt wird, ist eng verwandt mit der Zeitdilatation. Man kann ihn direkt auf eine Längenmessung mit Stoppuhren (inklusive Zeitdilatation) zurückführen. In Abb. 5 sind die entsprechenden Bedingungen für die Längenmessung gezeigt. Das ruhende System wird IS genannt, das bewegte System (in dem der Stab ruht), wird IS' genannt. Im System IS' des Stabes, beträgt seine Ausdehnung $x_2' - x_1' = l_{\text{eigen}}$. Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Länge des Stabes von IS aus gesehen gemessen wird. In der Abbildung sieht man, dass die gesuchte Länge $l_{IS} = x_2 - x_1$ ist. Die Transformationen dieser Ortskoordinaten lauten nun

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (x_2 - v' t_2) \tag{4.3}$$

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (x_1 - v' t_1) \tag{4.4}$$

Die Messungen müssen nun aber gleichzeitig stattfinden, also ist $t_2 = t_1$. Damit kann man die Differenz der beiden Ortskoordinaten bestimmen zu:

$$x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (x_2 - x_1) \tag{4.5}$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} (x_2' - x_1') \tag{4.6}$$

Damit haben wir einen Ausdruck für die Längenkontraktion gefunden:

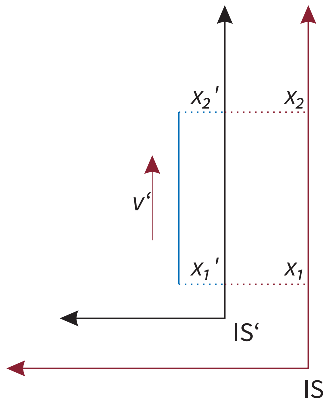

Abb. 5. Die Länge eines Stabes, der im System IS' ruht, wird gemessen. Einmal relativ zum Inertialsystem IS und einmal im bewegten System IS'.

Längenkontraktion

$$l = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \cdot l_{\text{eigen}} \tag{4.7}$$

Für eine Geschwindigkeit $v > 0$ heißt das also, dass die scheinbare Länge für einen Beobachter verkürzt scheint. Wenn ein Raumschiff mit relativistischer Geschwindigkeit an uns vorbeifliegt, erscheint es also kürzer im Vergleich zu seiner Länge ruhend auf der Erde. Andererseits heißt das auch, dass man mit relativistischer Geschwindigkeit einen kürzeren Weg zum Ziel zurücklegen muss. Diese Interpretation ist austauschbar mit dem Effekt der Zeitdilatation.

Das Beispiel des Myons mit der kurzen Lebenszeit kann man auch mithilfe der Längenkontraktion erklären. Das Myon bewegt sich schnell, deshalb reduziert sich in dessen IS die Strecke bis zur Erdoberfläche auf 660 m.

Abschnitt 4.4

Energie-Impuls-Beziehung

Die Herleitung der Energie-Impuls-Beziehung ist ohne die hier verwendete Schreibweise der allgemeinen Relativitätstheorie nur schwer oder unvollständig möglich.[2] Wir werden hier also ein Paradebeispiel für die Anwendung der Mathematik in der Physik sehen – und werden schließlich mit einer der fundamentalsten und folgenreichsten Gleichungen in der Geschichte der Physik belohnt.

[2] *Ich meine hier die 4-er Vektoren und Summenkonvention usw.*

Die Herleitung beginnt mit der Newtonschen Bewegungsgleichung, die auf die 4er-Vektoren erweitert wird. Dafür definieren wir die 4-er Geschwindigkeit u^α durch

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Diese Geschwindigkeit kann man wie die Ortskoordinaten in ein anderes Inertialsystem durch eine Lorentz-Transformation überführen:

$$u'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta$$

Wir wünschen uns also jetzt die Möglichkeit, statt der bekannten Newtongleichung $m\frac{d\vec{v'}}{dt'} = \vec{F}_\mathrm{N}$, eine relativistische Variante aufzustellen. Die müsste dann also angelehnt daran etwa

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

lauten. Hier ist F^α noch nicht wirklich festgelegt, weil die Zeitkomponente im Ortsvektor etwas ungewöhnlich ist. Diese Gleichung muss, wenn wir sie in der Relativitätstheorie nutzen wollen, bei einer Lorentztransformation seine Form behalten (also immernoch gültig sein). Es muss im Inertialsystem IS' dann auch gelten

$$m\frac{du'^\alpha}{d\tau} = F'^\alpha$$

Außerdem muss Sie für eine Relativbewegung von $v' = 0$ der Bezugssysteme in die üblichen Newtongleichungen übergehen. Um die Einträge von F^α zu identifizieren, wenden wir die Lorentz-Transformation an und untersuchen die Resultate. Für eine Relativbewegung mit v_x in x-Richtung ergibt sich:

$$F^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta F'^\beta$$

. Nach ausmultiplizieren der Rechten Seite erhält man folgende transformierte Komponenten für F^α:

$$F^0 = \gamma \frac{v^1 F^1_N}{c} \tag{4.8}$$
$$F^1 = \gamma F^1_N \tag{4.9}$$
$$F^2 = F^2_N \tag{4.10}$$
$$F^3 = F^3_N, \tag{4.11}$$

wobei F_N jeweils die bekannten Kraftkomponenten aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\frac{dv^\mu}{dt}$ sind. Man erkennt, dass offenbar die letzten drei Komponenten mit der Newton-Kraft übereinstimmen – zusätzlich mit einer Lorentz-Transformation für die x-Richtung. Der Ausdruck F^0 ist erstmal nicht bekannt. Wir erinnern uns jedoch an die Energiedefinition aus der Mechanik: Dort war $E = \int v \cdot F dt$. Man kann also durch Vergleich erkennen, dass

$$F^0 = \gamma \frac{v_x F^1_N}{c} = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} \tag{4.12}$$

gilt. Im Folgenden wollen wir nicht die Kraftkomponenten, sondern die Impulskomponenten p^α angeben. Für diese gilt $p^\alpha = m \cdot \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \cdot m\frac{dx^\alpha}{dt}$ und man kann die einzelnen Komponenten für $v = v_x$ angeben als

$$p^\alpha = \left(\gamma \cdot m\frac{c \cdot \cancel{dt}}{\cancel{dt}}, \gamma m v^1, m v^2, m v^3\right)$$

Nun bleibt noch die Frage, was unter der ersten Komponente γmc zu verstehen ist. Hier kann man durch Verwendung von Gl. 4.12 eine erstaunliche Aussage ableiten. So ist der Impuls durch Integration über die Eigenzeit aus der Kraftkomponente F^0 zu erhalten gemäß

$$p^0 = \int dF^0 d\tau = \frac{\gamma}{c}\int \frac{dE}{dt} d\tau = \frac{\gamma}{c}\int \frac{dE}{dt}\frac{dt}{\gamma} = \frac{E}{c}$$

Man kann also den Ausdruck $\gamma \cdot mc$ im Viererimpuls mit E/c ersetzen. Daraus folgt dann auch ein Ausdruck für diese nun *relativistische Energie* genannte Energieform:

relativistische Energie

$$E = \gamma \cdot mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.13}$$

und den relativistischen Impuls

relativistischer Impuls

$$p = \gamma \cdot mv = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.14}$$

Um den berühmten Energie-Impuls-Satz herzuleiten ist es nun kein weiter Weg mehr. Wir werden nun wieder das Wegelement ds^2 darstellen. Diesmal wollen wir aber die

Impulse statt die Ortskoordinaten einbeziehen und dividieren durch das Zeitdifferential:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad | \cdot m^2 \tag{4.15}$$
$$m^2 c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \cdot m \cdot dx^\alpha \cdot m \cdot dx^\beta \qquad |/d\tau/d\tau \tag{4.16}$$
$$m^2 c^2 = \eta_{\alpha\beta} \left(m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \left(m \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) \tag{4.17}$$
$$m^2 c^2 = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \tag{4.18}$$
$$\tag{4.19}$$

Aus der Impuls-Formulierung über die Energie folgt nun

$$m^2 c^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

Nach Umformung haben wir nun den Energie-Impuls-Satz der Relativitätstheorie hergeleitet:

relativistischer Energie-Impuls-Satz

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 (\vec{p})^2 \tag{4.20}$$

Um zu verstehen, was für zentrale Aussagen hier gemacht werden, schauen wir uns die Grenzfälle an. Wir nehmen dafür einen “kleinen” oder einen “großen” Impuls an, so dass also jeweils einer der beiden Terme von Gleichung 4.20 dominant wird. Man nutzt eine Taylorentwicklung für diese Näherung. Dazu stellen wir den Energie-Impuls-Satz etwas um zu

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = cp \sqrt{\frac{(mc)^2}{p^2} + 1}$$

. Für den Fall $p \gg mc$ erkennt man nun sofort, dass daraus $E = c \cdot p$ folgt. Für den Fall $p \ll mc$ nutzt man die Taylorentwicklung der umgestellten Form von Gl. 4.20

$$\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}$$

Dann wird der letzte Term in der Wurzel (“sehr klein”) genähert bis zum linearen Glied. Es gilt dann $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ und damit $mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ Zusammenfassend ergeben sich also die Einzelfälle

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \begin{cases} p \ll mc & \to E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \\ p \gg mc & \to E = c \cdot p = mc^2 \end{cases} \tag{4.21}$$

Der Fall mit sehr großem Impuls gilt also etwa für ein Photon, dass sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt und de3m man über diese Beziehung ein Masseäquivalent zuordnen kann. Für den ersten Fall der kleinen Geschwindigkeiten folgt andererseits

$$E = \frac{p^2}{2m} + mc^2 = E_{\text{kin}} + mc^2$$

Als Ruheenergie E_0 wird nun die Energie ohne Bewegungsanteil bezeichnet:

Ruheenergie, Energie-Masse-Äquivalenz

$$E_0 = mc^2 \qquad \Delta E = \Delta mc^2 \tag{4.22}$$

Es hat sich hier gezeigt, dass ein ruhendes Teilchen ohne Impuls trotzdem einer enormen Menge Energie entspricht[3]. Die Masse wird im Rahmen der ART als Ursache des Gravitationsfeldes gesehen. Es gibt aber auch andere Fälle, in denen diese Energie sichtbar wird:

- Bindungsenergien in Atomkernen entspricht immer auch eine Masse. Die Summe der Massen der Kernbestandteile ist nicht gleich der Kernmasse!
- Bei der Spaltung schwerer Kerne wird Bindungsenergie frei. Die Spaltprodukte zusammen sind leichter als der Ursprungskern.
- Ein Stern wird durch starke Gravitationskräfte zusammengehalten. Dies reduziert seine Masse im Vergleich zu $m = \rho \cdot V$ deutlich.

An dieser Stelle möchte ich einen wichtigen Hinweis geben. Der relativistische Impuls ist als Größe oben definiert und bildet so auch den Kern der relativistischen Dynamik. Es ist nun aus mathematischer Sicht auch möglich den relativistischen Impuls anzusehen als ein Produkt aus relativistischer Masse γm und der nichtrelativistischen Geschwindigkeit v. Dies wurde früher oft sowohl in Lehrbüchern als auch in der Schule so gehandhabt. Die Ergebnisse von Rechnungen usw. werden dadurch nicht falsch. Die Interpretation an sich ist jedoch sehr zweifelhaft. Die Masse wird normalerweise als eine Teilcheneigenschaft angesehen. Die Summe der Teilchen in einem Festkörper ergibt schließlich dessen Masse. Nach dieser Definition darf die Masse sich natürlich nicht durch den Bewegungszustand ändern! Ein schnelles Raumschiff besteht trotzdem noch aus N Protonen und Neutronen, die Masse muss konstant bleiben.

Wenn man allerdings die Masse streng als träge Masse definiert, hat diese Sichtweise zumindest eine schwache Berechtigung. Es wird demnach zunehmend "schwer", ein schnelles Objekt immer weiter zu Beschleunigen ($F = dp/dt$). Die Trägheit nimmt also zu. Bitte seien Sie sich dieser Feinheiten stets bewusst bzw. informieren sie sich weitergehend bevor Sie im Unterricht von einer "relativistischen Masse" sprechen. In einigen Abituraufgaben und z.B. im Bayrischen Rahmenplan kommt die relativistische Masse als physikalische Größe vor. In den meisten Universitäts-Lehrbüchern zur Physik taucht dieser Begriff nicht (mehr) auf [7, 8, 9]. [5]

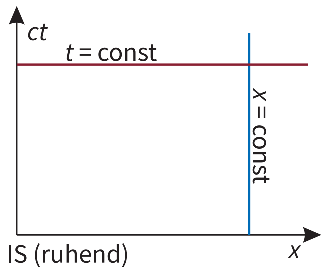

Abb. 6. Zeitentwicklung (vertikale Linien) für feste Ortskoordinaten und Ereignisse an verschiedenen Orten zu gleichen Zeitpunkten (horizontale Linien) für einen ruhenden Beobachter.

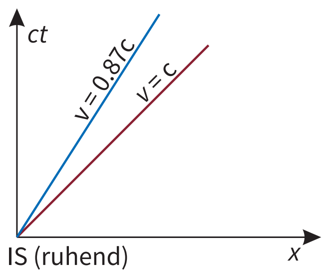

Abb. 7. Minkowski-Diagramm mit den Koordinatensystemen für einen relativ bewegten Beobachter mit einer Geschwindigkeit $v < c$ in die positive x-Richtung (blaue Linie) und für ein Teilchen mit $v = c$ (rote Linie).

Abschnitt 4.5

Minkowski-Diagram

Die mathematische Beschreibung der Relativitätstheorie ist in der Schule teilweise nicht möglich. Deswegen ist es zweckmäßig wenn man auf grafische Beschreibungsmöglichkeiten ausweichen kann. Eine solche Möglichkeit ist das sigenannte Minkowski-Diagramm. Dies ist ein Koordinatensystem als Analogon zum Minkowski-Raum. Auf dieses Konzept soll nun anhand von einigen Beispielen eingegangen werden.

In einem Minkowski-Diagram wird auf der y-Achse die Zeitkoordinate $x^0 = ct$ abgebildet und auf der x-Achse eine Ortskoordinate, wie in Abb. 6 gezeigt. Da wir sowieso zur Vereinfachung stets nur die Bewegung in einer Raumrichtung betrachten ist diese Reduktion auf die x-Koordinate kein großes Problem. Einen in diesem System ruhenden Beobachter ($x = const, \forall t$) würde man in diesem Diagramm durch eine vertikale Linie (blaun in Abb. 6) darstellen. Eine horizontale Linie ($t = const, \forall x$), wie die rote Gerade

[5] Ausnahme ist z.B. [10]

in Abb. 6, markiert dagegen einen festen Zeitpunkt für alle Orte. Während Punkte im Minkowski Raum *Ereignisse* genannt werden, nennt man Kurven oder Geraden auch *Weltlinien*. Man kann im Minkowski-Diagram auch Relativbewegungen darstellen. Ein Objekt, dass sich mit $v = c$ relativ zum Inertialsystem IS (die Koordinatenachsen) fortbewegt, legt mit jedem Fortschritt Δx auf der x-Achse auch den Schritt $c \cdot \Delta t$ auf der y-Achse zurück. Damit folgt für ein Objekt mit $v = c$ eine Weltlinie mit Steigung $\tan\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{c}{v} = 1$ (rote Linie in Abb. 7). Wenn die Geschwindigkeit $v < c$ beträgt, folgt eine Weltlinie mit $\tan\alpha = \frac{c}{v} > 1$ und damit $\alpha > 45°$ (siehe blaue Linie in Abb. 7).

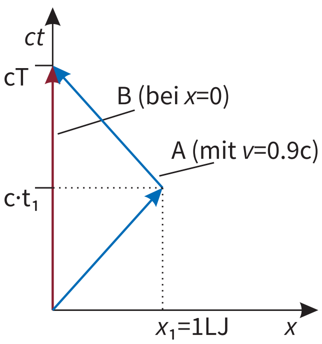

Abb. 8. Minkowski-Diagram-Darstellung des Zwillingsparadoxons. Die Zeit läuft für den ruhenden Beobachter A anders ab, als für den Reisenden B.

Wir wollen nun zur Übung das berühmte Zwillingsparadoxon in diesem Diagramm darstellen. Das Zwillingsparadoxon ist ein Gedankenexperiment von Albert Einstein und gestaltet sich mit Beispielwerten wie folgt: Zwei Zwillinge befinden sich in gleichem Alter auf der Erde ($x = 0$). Ein Zwilling A bewegt sich in einem Raumschiff mit hoher Geschwindigkeit $c = 0.9c$ von der Erde weg, kehrt nach der Flugzeit t_1 am Punkt x_1 (1 LJ vom Startpunkt entfernt) um und fliegt mit gleicher Geschwindigkeit wieder zurück. Die Weltlinien von A und B sind in Abb. 8 in einem Minkowski-Diagramm dargestellt. B ruht dauerhaft in seinem Inertialsystem und wird daher durch eine vertikale rote Linie bei $x = 0$ repräsentiert. A fliegt mit einem Raumschiff zunächst von der Erde weg und kehrt später wieder um – dies wird durch die blaue Linie dargestellt. Wir wollen nun untersuchen, wieviel Zeit für die beiden Zwillinge zwischen Abreise und Ankunft vergangen ist. Die Zeit für den ruhenden Beobachter B entspricht genau der Länge seiner Weltlinie (es wir ja keine Strecke x zurückgelegt: $dx = 0$):

$$\Delta s_B = \int_0^{cT} ds = \int_0^{cT} dx^0 = \int_0^{T} c \cdot dt = cT$$

Jetzt wollen wir die Länge der Weltlinie von B beschreiben (von A bzw. IS aus gemessen!). Dafür betrachten wir zuerst den Weg bis zum Umkehrpunkt. Dafür gilt:

$$\begin{aligned}\Delta s_{\mathrm{A,hin}} &= \int_{(0,0)}^{(cT/2, x_U)} ds = \int_{(0,0)}^{(cT/2, x_U)} \sqrt{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \int_{(0,0)}^{(cT/2, x_U)} \sqrt{(c \cdot dt)^2 - (dx)^2}\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nun sehr ungewöhnlich. Die Integranden stehen unter einer Wurzel und es ist erstmal nicht klar wie dieses Integral ausgeführt wird. Wir können es aber durch Umstellen und die Substitution $v = dx/dt$ in ein einfaches Integral überführen bzw. parametrisieren:

$$\begin{aligned}\Delta s_{\mathrm{A,hin}} &= \int_{(0,0)}^{(cT/2, x_U)} dt \sqrt{(c)^2 - \frac{dx^2}{dt^2}} \\ &= \sqrt{c^2 - v^2} \int_0^{T/2} dt = c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_0^{T/2} dt = \frac{cT}{2\gamma} = \frac{cT'}{2}\end{aligned}$$

Hierbei nennen wir die abgelaufene Zeit im bewegten Bezugssystem T'. Für den Rückweg gilt im Prinzip das gleiche:

$$\Delta s_{\text{A,rück}} = \int_{(cT/2, x_U, 0,0)}^{(cT,0,0,0)} ds = c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_{T/2}^{T} dt = \frac{cT}{2\gamma} = \frac{cT'}{2}$$

Insgesamt läuft also für den Reisenden A die Zeit $T'/2 + T'/2 = T' = T/\gamma$ ab. Es ist also weniger Zeit als im Vergleich zum ruhenden Beobachter vergangen. Für unser Zahlenbeispiel bedeutet dies

$$T' = \sqrt{1 - \frac{(0.9c)^2}{c^2}} \cdot T = 0.43 \cdot T$$

Es ergibt sich also für die gemessenen Zeiträume von A und B:

$$B: \qquad T = \frac{2\,\text{LJ}}{0.9 \cdot c} = \frac{2 \cdot 9.46 \cdot 10^{15}\,\text{m}}{0.9 \cdot c} = 2.25\,\text{Jahre} \tag{4.23}$$

$$A: \qquad T' = 0.43 \cdot \frac{2\,\text{LJ}}{0.9 \cdot c} = 0.97\,\text{Jahre} \tag{4.24}$$

Der Altersunterschied ist also beträchtlich. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass der Reisende für Reisestrecke von 2 Lichtjahren nur etwas weniger als ein Jahr gebraucht hat. Es ist also nicht so, dass man für die 4.3 Lichtjare nach Alpha-Centauri selbst mit fast-Lichtgeschwindigkeit 4 Jahre bräuchte. Für eine bequeme Reisezeit von einer Woche muss man aber erstmal investieren: Man müsste mit $v = 0.999979c$ unterwegs sein...

Warum aber wird dieses hier betrachtete Phänomen als "Paradox" bezeichnet? Dies ergibt sich aus einer alternativen Betrachtungsweise. Wir haben bereits erfahren, dass bewegte Uhren langsamer gehen – wer jedoch legt fest ob sich A oder B hier bewegt. Völlig berechtigt könnte auch A argumentieren, dass er sich in Ruhe befindet und B sich mit Geschwindigkeit v entfernt. Dann müsste nach dem Zusammentreffen der Beiden im Gegensatz zum obigen Ergebnis B langsamer gealtert sein. Dieses Paradoxon ist aber bei genauerem Hinsehen keines: Der hier ruhende Beobachter befindet sich die ganze Zeit im gleichen Inertialsystem. Der reisende Zwilling jedoch wechselt mitten im Flug sein Inertialsystem (aus v wird $-v$). Deshalb sind die beiden Ansichten von A und B nicht gleichberechtigt und die Situation ist, so wie berechnet, mit dem weniger gealterten Zwilling A eindeutig entschieden.

Abschnitt 4.6

Abstände im Minkowski-Diagramm

Wir haben in Abb. 7 bereits gesehen, wie man in einem Minkowski-Diagram eine Weltlinie für einen mit $v < c$ bewegtes Bezugssystem einzeichnet. Diese Weltlinie entspricht dabei einem alternativen Bezugssystem, in dem der bewegte Beobachter wiederum ruht. Das Verharren an einem Ort wird in "nicht-bewegten" Koordinaten (ct, x) als vertikale Linie – also parallel zur ct-Achse – dargestellt. Wenn wir nun die Weltlinie eines alternativen, bewegten Bezugssystems einzeichnen, so stellt dies also die ct'-Achse dieses Bezugssystems dar, wie in Abb. 9 durch die rote Linie gezeigt. Wenn man nun im Diagramm den Abstand zweier Ereignisse bestimmen möchte, so ist es wichtig von welchem Bezugssystem man ausgeht. Wir haben bereits die Effekte der Zeitdilatation und der Längenkontraktion kennengelernt und wisser daher, dass etwa die Uhren im bewegten System cT' langsamer gehen. Um diesen Effekt im Diagramm zu veranschaulichen bemühen wir erneut die Tatsache, dass die Wegelemente in beiden Bezugssystemen –

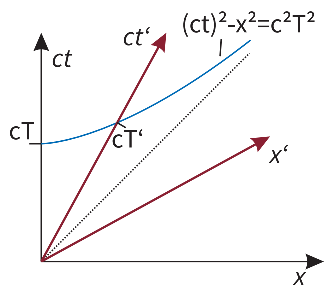

Abb. 9. Minkowski-Diagramm mit bewegtem Bezugssystem (ct', x'). Die veränderten Skalenlängen kann man durch Hyperbelfunktionen (blaue Linien) anschaulich machen.

unabhängig von ihrem Bewegungszustand – konstant sein müssen. Wir vernachlässigen wieder die $y-$ und z-Koordinaten und lassen nur eine Bewegung in $x-$Richtung zu. Wir schauen uns nun an, wie die Wegstrecke von den Punkten $(ct' = 0, x' = 0)$ nach $(cT', x' = 0)$ auf der ct'-Achse von einem ruhenden Bezugssystem aus aussieht. Im ruhenden Bezugssystem sehen wir die Ausbreitung mit der Geschwindigkeit $\Delta x/\Delta t = v$ und messen die Zeit in der Skala ct. Im bewegten Bezugssystem wird die Zeit ct' gemessen und es gibt keine räumliche Bewegung $(\Delta x' = 0)$:

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta s'^2 \\ c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 &= c^2\Delta T'^2 \\ c^2\Delta t^2\left(1 - \frac{\Delta x^2}{c^2\Delta t^2}\right) &= c^2\Delta T'^2 \\ c^2\Delta t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= c^2\Delta T'^2 \end{aligned}$$

Wir sehen mit Gl. 4.25, dass die bereits bekannte Zeitdilatation folgt. Allerdings sehen wir mit Gl. 4.25 auch, dass der Zusammenhang zwischen T' und t in unserem Koordinatensystem (ct, x) durch eine Hyperbel beschrieben wird. In Abb. 9 ist eine solche Hyperbel für verschiedene ct und x-Werte als blaue Linie eingezeichnet. Dort wo die blaue Linie eine Weltlinie mit $v < c$ schneidet, kann man gewissermaßen die Streckung deren Zeitskala ablesen. Die Zeitspanne cT ist auf der roten Weltlinie etwas gestreckt und es dauert $T' > T$ bis im ruhenden System die Zeit T verstrichen ist.

Abschnitt 4.7

Relativistischer Dopplereffekt

Das Minkowski-Diagramm soll nun noch genutzt werden, um den relativistischen Dopplereffekt (oder auch *relativistische Rotverschiebung*) herzuleiten. Dafür betrachten wir die Situation aus Abb. 10. Unser unbewegtes Inertialsystem befinde sich im Ursprung und bewege sich nicht. Die Weltlinie ist also als vertikale Linie (im Bild blau) darzustellen. Ein relativ dazu bewegtes System soll sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse von uns entfernen. Dies wird im Bild durch die rote Gerade dargestellt. Alle folgenden Betrachtungen nehmen wir nun zunächst im ruhenden Inertialsystem vor, es wird also alles durch die Koordinaten x und t ausgedrückt. Um die Geradengleichung der Weltlinie des bewegten Systems zu ermitteln, nutzen wir die bekannte Geschwindigkeit v durch $x = v \cdot t$. Dies wird nun umgeformt, um es in die korrekte Koordinatenachsen-Bezeichnung $(ct = f(x))$ zu bringen und später zu nutzen:

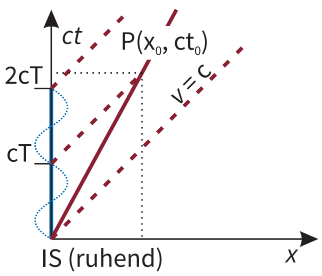

Abb. 10. Ruhendes IS erzeugt ein Signal und sendet dieses an einen bewegten Beobachter.

$$x = v \cdot t \to cx = v \cdot ct \to ct = \frac{c}{v} \cdot x \tag{4.25}$$

Um den relativistischen Dopplereffekt nun zu beschreiben, erzeugen wir in unserem ruhenden System ein periodisches Signal mit der Frequenz f und der Periodendauer T, wie in Abb. 10 an der ct-Achse angedeutet. Dieses Signal propagiert nun durch die Raumzeit (mit $v = c$!) und wird vom sich entfernenden Beobachter aufgefangen. Die Signalpropagation muss im Diagramm durch die Gerade $ct = x$ dargestellt werden. Während wir im ruhenden System die Periodendauer T für das Signal feststellen, so wird der bewegte Beobachter stattdessen die Periodendauer T' ermitteln. Um T' zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Zeit t_0. Diese können wir aus dem Schnittpunkt der beiden Geraden, wie in Abb. 11 skizziert, ermitteln. Die Geradengleichung für das propagierte Signal entspricht einer nach oben verschobenen Gerade mit Anstieg 1, also $ct = x + cT$. Die Gleichung für die Weltlinie des bewegten Bezugssystems lautet gemäß Gl. 4.25 $ct = \frac{c}{v} \cdot x$. Wir stellen nun beide Gleichungen nach x um und setzen sie gleich.

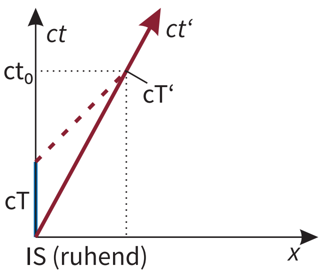

Abb. 11. Ausschnitt zur Berechnung von T'.

Damit folgt

$$t_0 = \frac{cT}{c - v}$$

für die Zeitdauer t_0 im Ruhesystem. Um herauszufinden welcher Zeitspanne dies im bewegten System entspricht, benötigen wir die Zeitdilatation. Dies führt dann zu

$$\begin{aligned}
T' &= \frac{t_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t_0 \\
&= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{cT}{c - v} \\
&= \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{(c - v)^2}} \cdot T = \sqrt{\frac{(c - v) \cdot (c + v)}{(c - v)^2}} \cdot T \\
T' &= \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \cdot T
\end{aligned}$$

Dies ist nun die Verschiebung der Periodendauern – zweckmäßiger ist es eine Verschiebung der Frequenzen anzugeben. Wegen $f = 1/T$ ergibt sich dann die Frequenzverschiebung für schnell bewegte Beobachter

relativistischer Dopplereffekt / Rotverschiebung

$$f' = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \cdot f \tag{4.26}$$

Dies bedeutet eine Verringerung der Frequenz bzw. eine Erhöhung der Wellenlänge (Rotverschiebung) wenn sich die Signalursache schnell vom Beobachter wegbewegt.

Abschnitt 5
Allgemeine Relativitätstheorie

> Was weiß ein Fisch von dem Wasser, in dem er sein ganzes Leben lang schwimmt?
>
> *Albert Einstein*

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird nun durch die Einsteinschen Feldgleichungen eine Verbindung von Gravitation und Raum geschaffen. Wir werden also den "flachen" Minkowskiraum verlassen. Glücklicherweise ist keine neue mathematische Beschreibung nötig, da wir bis hier schon alles notwendige eingeführt haben.

Abschnitt 5.1
Das Äquivalenzprinzip

Das sogenannte Äquivalenzprinzip nach Einstein lautet: Trägheit und schwere Masse sind wesensgleich. Hierbei ist die als Trägheit (oder träge Masse) die Eigenschaft eines Körpers zu bezeichnen, sich gegen eine Beschleunigung zu wehren gemäß dem Zweiten Newton'schen Axiom:

$$m_t = \frac{F_t}{\ddot{x}}.$$

Die schwere Masse ist eine Proportionalitätskonstante im Gravitationspotential gemäß

$$F_G = G\frac{m_{s1}m_{s2}}{r^2}$$

Für den freien Fall nahe der Erdoberfläche wird die Gravitationskraft näherungsweise durch eine Taylorentwicklung zu

$$F_G \approx m_s \cdot g$$

Wenn keine anderen Kräfte wirken als die Gravitation, so bewirkt diese gemäß Newton eine Beschleunigung der Form

$$m_t\ddot{x} = m_s g \qquad \to \ddot{x} = \frac{m_s}{m_t}g$$

Die Gravitationskonstante G ist so gewählt, dass der Zahlenwert und die Einheit von m_t und m_s identisch ist. Dies ist allerdings "nur" empirisch begründet durch die Erfahrung, dass das Verhältnis von träger und schwerer Masse für alle Körper gleich ist. Es gibt allerdings noch immer Experimente, die mit enormer Genauigkeit diese Annahme untersuchen. Bisher ist die Gleichheit von träger und schwerer Masse mit einer Genauigkeit von 10^{-13} bestätigt [11].

Eine alternative Formulierung des Äquivalenzprinzips ist die folgende:

> **Äquivalenzprinzip**
> In einem lokalen Bezugssystem lässt sich der Einfluss der Gravitationskraft nicht von der Wirkung einer Beschleunigung unterscheiden.

Wir sprechen also hier, im Gegensatz zur spezielle Relativitätstheorie, von Beschleunigungen. Es soll nocheinmal verdeutlicht werden, dass beschleunigte Bewegungen nicht im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie behandelt werden können, denn beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme. Dieses Äquivalenzprinzip besagt also, dass man nicht feststellen kann, ob man sich in einem Gravitationsfeld befindet oder beschleunigt wird. In Abb. 12 ist dies durch zwei Situationen gezeigt: Die rote Masse befindet sich in einem Gravitationsfeld, dass eine Kraft in Richtung des Gravitationszentrums ausübt. Die blaue Masse wird durch einen Raketenantrieb beschleunigt mit der Kraft F_t entsprechend seiner trägen Masse. Das Äquivalenzprinzip besagt nun, dass es keine Messung geben kann, mit der man die Fälle unterscheiden könnte.

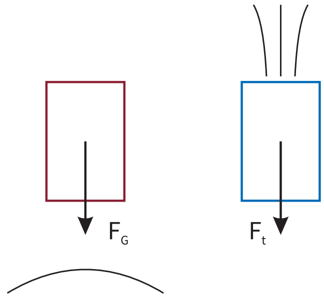

Abb. 12. Zur Äquivalenz von Gravitation und Trägheit.

Aus dem Äquivalenzprinzip kann man die sogenannten Einsteinschen Feldgleichungen ableiten. Das würde allerdings den Rahmen dieses Buches sprengen, weshalb hierauf verzichtet wird. Wir bedienen uns lediglich einigen Schlussfolgerungen aus der Differentialgeometrie, um die geeigneten Bezeichnungen für die ART zu finden. Statt einer Bahnkurve spricht man nun von Geodäten in der Raumzeit. Geodäten sind ganz ursprünglich etwa Längen- oder Breitengerade auf der Erdoberfläche. Man stelle sich vor, dass man zwei zufällige Ort auf der Erdoberfläche wählt und einfach geradeaus geht. Die Bahn um die Erdkugel beschreibt dann eine Geodäte – also eine Kurve die der Erdkrümmung folgt. Da wir Menschen im Vergleich zur Erdkrümmung klein sind, würde uns das allein nicht ermöglichen die Erdkrümmung festzustellen. Jetzt werden wir aber folgendes Experiment anstellen können: Zwei Menschen starten an zwei Punkten in derselben Richtung. Auf einer flachen Erde würden Sie sich für alle Ewigkeit auf parallelen Strecken fortbewegen und sich niemals begegnen. Wenn die Erdoberfläche aber gekrümmt ist, werden sich diese parallelen Linien schneiden wie dies in Abb. 13 illustriert ist. Außerdem gilt auf einer gekrümmten Oberfläche nicht der Innenwinkelsatz – das Dreieck in Abb. 13 hat beispielsweise eine Innenwinkelsumme von 270°. Genau wie bei der noch ziemlich anschaulichen gekrümmten Fläche verhält es sich mit der Vier-dimensionalen Raumzeit. Einstein hat 1916 vorhergesagt, dass durch die Krümmung der Raumzeit in Gegenwart der Sonnenmasse das Licht dahinterliegender Sterne abgelenkt werden müsste [12]. Die Sonnenfinsternis von 1919 bot eine Gelegenheit um diese Überprüfung der Relativitätstheorie durchzuführen und bestätigte die Vorhersagen [13]. Bei den Messungen wurde übrigens auch untersucht, ob das Licht ganz regulär durch die Newton'sche Gravitation der Sonne vom Kurs abgelenkt wurde. Die gefundene Ablenkung des Lichts nahe der vom Mond verdunkelten Sonne war aber zu groß für diesen Effekt und stattdessen in Übereinstimmung mit der Vorhersage durch die Relativitätstheorie von Einstein.

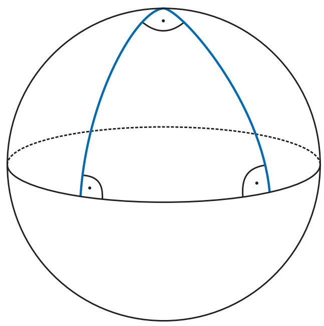

Abb. 13. Auf einer gekrümmten Oberfläche schneiden sich parallele Linien.

Hinweis: Zur Veranschaulichung/Demonstration der Raumkrümmung werden auf Seite **??** sogenannte Sektorenmodelle vorgestellt. Sie ermöglichen das spielerische Erleben von Krümmungseffekten.

Es ist also offenbar tatsächlich der Fall, dass die Raumzeit durch Gravitationsfelder gekrümmt wird. Wie durch Anwesenheit von Materie oder Energie der Raum gekrümmt wird, beschreiben die Einsteinschen Feldgleichungen:

Einsteinsche Feldgleichungen

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}_{Raumkrümmung} + \Lambda g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{Energie-Impuls-Tensor}$$

wobei Λ die kosmologische Konstante ist g die Metrik, R der sogenannte Ricci-Tensor und T der Energie-Impuls Tensor. Es hat sich gezeigt, dass "sinnvolle" Lösungen dieser Feldgleichung mit und auch ohne kosmologische Konstante möglich sind. Die Konstante hat großen Einfluss auf kosmologische Lösungen – sie beschreibt die Expansion des Universums. Einstein hatte deren Einführung als "größte Eselei seines Lebens" zunächst bereut. Heutzutage sind die kosmologischen Modelle jedoch auf diese Konstante angewiesen, da man gegenwärtig von einem expandierenden Universum ausgeht. Die Konstante Λ drängt also gewissermaßen das Universum auseinander und entspricht daher einer

Energiedichte des Vakuums. Man kann diesen Effekt direkt mit den Vakuumfeldenergien der Quantenmechanik vergleichen – und auch direkt mit der Quantenmechanik berechnen. Die Quantenmechanik würde mit Vakuumfluktuationen als Ursache für eine Expansion eine kosmologische Konstante von $\Lambda_{QM} \approx 10^{70}\,\mathrm{m}^{-2}$ vorhersagen. Die ART ermittelt jedoch durch experimentelle Messungen einen Wert von $\Lambda_{ART} \approx 10^{-52}\,\mathrm{m}^{-2}$. Diese Diskrepanz ist bisher ungeklärt und wird als Aquivalent zur Ultraviolettkatastrophe ("Vakuumkatastrophe") gesehen. Die Diskrepanz von $\Lambda_{QM}/\Lambda_{ART} \approx 10^{122}$ wird oft als die schlechteste theoretische Vorhersage einer Konstanten in der Geschichte bezeichnet.

Abschnitt 5.2

Bewegungsgleichung/Geodätengleichung

Wir wollen hier kurz zeigen, was man tun kann um die Geodäten für eine gegebene Raumkrümmung, gegeben in Form einer Metrik $g_{\mu\nu}$ zu berechnen. Eine Geodäte ist immer die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Im euklidischen Raum ist dies eine Gerade. Auf einer Kugeloberfläche werden die entsprechenden Kurven Geodäten oder Großkreise genannt. [6] In einer gekrümmten Raumzeit werden wir es also im Allgemeinen mit Kurven zu tun haben, die zwei Punkte durch eine kürzeste Strecke verbinden. Die Bewegungsgleichung für solche gekrümmten Räume lautet

Bewegungsgleichung für gekrümmte Räume

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{5.1}$$

Wenn man die Differentiale $d/d\tau$ durch d/ds ersetzt, nennt man dies die Geodätengleichung. Die Christoffelsymbole Γ berechnet man gemäß

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{g^{\beta\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

aus der Metrik. Hinweise: Man kann die Indizes der Metrik senken/heben durch $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$. Außerdem sind die partiellen Ableitungen der Koordinaten untereinander gleich 0 (z.B. $\partial x^0/\partial x^1 = 0$).

Die Berechnung einer Bahnkurve in gekrümmten Räumen ist also um einiges schwieriger als man es aus der flachen Geometrie gewohnt ist. Die Berechnung der optimalen Flugbahn eines Flugzeuges (die Erdoberfläche ist ja auch gekrümmt) ist etwa eine wichtige Anwendung der Geodätengleichung.

Abschnitt 5.3

Materiefreie Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen werden wir nur in stark vereinfachter Form untersuchen. Wir nehmen dafür eine homogene Masseverteilung als Ursache für die Raumkrümmung an (also etwa ein Stern o.ä.). Der Radius dieser Masseverteilung solle r_0 betragen. Die Feldgleichungen für die Lösungen außerhalb (ohne Materie, deswegen wird dort $T_{\mu\nu} = 0$) von r_0 lauten dann nur noch

[6] Flugzeuge fliegen auf ihrer Bahn ebenfalls keine geraden Strecken, sondern die kürzeste Verbindung: eine Geodäte.

Materiefreie Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5.2}$$

wobei der Ricci-Tensor R nur noch diagonale Einträge hat die ungleich 0 sind. Die Elemente des Ricci-Tensors werden aus den Christoffel-Symbolen $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$ und damit aus der Metrik $g_{\mu\nu}$ festgelegt. Für ganz Neugierige gibt es hier die Berechnungsvorschrift:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}$$

Abschnitt 5.4

Schwarzschild-Metrik

Die Gleichung 5.2 hängt von der Metrik $g^{\mu\nu}$ ab. Wenn man eine Metrik findet, bei der alle Elemente des Ricci-Tensors zu Null werden, ist der materiefreie Raum um eine Massenverteilung im Einklang mit der ART beschrieben. Was aber genau ist denn nun eine Metrik? Wir sind bereits in der SRT der Metrik für die euklidische (flache) Raumzeit begegnet, $\eta_{\mu\nu}$. Diese wurde genutzt um das Wegelement ds bzw. $(ds)^2$ zu bestimmen nach $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$. Genau auf die gleiche Weise kann man auch die Metrik einer gekrümmten Raumzeit nutzen, um ein Wegelement in diesem gekrümmten Raum zu berechnen:

Wegelement in gekrümmter Raumzeit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{5.3}$$

Diese Metrik $g_{\mu\nu}$ definiert also, wie genau dieser gekrümmte Raum aussieht. Die eigentliche materiefreie Feldgleichung 5.2 hängt über die Christoffelsymbole ja auch eigentlich nur von $g_{\mu\nu}$ und dessen Ableitungen ab. Die Ableitung einer Lösung der komplizierten Differentialgleichungen, die in Gleichung 5.2 impliziert sind, ist recht umständlich. Wir gehen hier darum einen anderen Weg und nehmen eine bereits gefundene Lösung als gegeben an. Dass diese Lösung tatsächlich die materiefreien Feldgleichungen erfüllt, bleibt der Übungsveranstaltung überlassen. Eine Metrik, die die materiefreie Feldgleichung erfüllt, hat die Form

Schwarzschild Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\left(1-\frac{r_S}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

und wurde 1915 von Karl Schwarzschild als erste exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen gefunden [14]. Wegen der Kugelsymmetrie der Masseverteilung werden hier Kugelkoordinaten $x^{\mu} = (ct, r, \theta, \varphi)$ verwendet. Wir können uns jetzt leicht das Wegelement dieser Schwarzschildmetrik berechnen:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

Dieses Wegelement ist im Vergleich zur Minkowski-Metrik deutlich facettenreicher. Wir erkennen zunächst ein Problem, dass allerdings aus der Wahl der Koordinaten folgt. Das Wegelement wird singulär, wenn $r \to 0$ strebt. Außerdem sehen wir an der zweiten Koordinate das gleiche singuläre Verhalten für $r = r_S$. Hinweis: Diese Singularität ist durch Wahl einer anderen Metrik zu vermeiden, es ist also eher ein Artefakt ohne strenge physikalische Notwendigkeit. Wichtiger ist aber noch folgender Effekt: Wenn die Radialkoordinate r den Wert r_S unterschreitet, ändern sich die Vorzeichen im Wegelement der ersten beiden Koordinaten. Diese Situation kann man (sehr mit Vorsicht zu behandeln!) notdürftig interpretieren als: *Zeit und Raum tauschen die Rollen.*. Man nennt die Größe r_S auch Ereignishorizont oder Schwarzschildradius. Wo genau liegt dieser Ereignishorizont für eine gegebene Masse? Man kann dafür einen Vergleich der Newton-Gravitation und der relativistischen Gravitation anstellen. Dafür muss man zunächst die Bewegungsgleichung der ART (siehe 5.1) für schwache Felder nähern. Aus diesen Näherungen bekommt man eine Bedingung, die gelten muss wenn in schwachen Gravitationsfeldern die Netwon'sche Mechanik gültig sein soll. Damit das der Fall ist, muss

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

sein. In diesen Ausdruck ist das Newtonsche Gravitationspotential mit der Gravitationskonstanten G einer Masse M eingegangen. Durch Vergleich mit dem $g_{\mu\nu}$-Element der Schwarzschild Metrik kann man nun leicht einen Ausdruck für r_S erkennen:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \qquad \to \qquad r_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{5.5}$$

Man nennt diese so gefundene Konstante r_S auch Schwarzschildradius. Für die Sonne beträgt der Schwarzschildradius demnach

$$r_{S,Sonne} = \frac{2GM_{\text{Sonne}}}{c^2} \approx 3\,\text{km}$$

wobei der tatsächliche Radius der Sonne $r_{\text{Sonne}} = 7 \cdot 10^5$ km beträgt. Die Abweichung des Sonnenradius vom Schwarzschildradius um 6 Größenordnungen zeigt also, dass die Abweichungen von der Minkowski-Metrik in unserem Sonnensystem sehr klein sind. Trotzdem sind die Effekte teilweise wichtig. Die Periheldrehung des Merkur etwa kann nur mit einer Raumkrümmung erklärt werden. Wenn ein Stern eine solche Dichte aufweist, dass seine Ausmaße den Radius r_S unterschreitet, nennt man ihn ein Schwarzes Loch. Wie kann man sich so ein schwarzes Loch vorstellen? Wir unterteilen es hierfür in drei Bereiche: Im ersten Bereich I ist die Masse des Sterns kugelsymmetrisch in einem Gebiet mit Radius r_b verteilt. Innerhalb dieses Gebietes kann man mit der Schwarzschildmetrik keine Aussagen treffen, da hier die materiefreien Feldgleichungen nicht gelten. Im folgenden Bereich II zwischen der Massenansammlung und dem Ereignishorizont beobachten wir den bereits angesprochenen Vorzeichenwechsel im Wegelement ds. Was beim Eintritt in den Ereignishorizont passiert wird später noch genauer untersucht. Außerdem ist wohl bekannt, dass kein Licht und damit auch keine Information den Ereignishorizont wegen der starken Gravitation wieder verlassen kann – deswegen spricht man auch von einem "schwarzen Loch", obwohl es eigentlich eine extrem dichte Massenansammlung ist. Warum das der Fall ist, hängt mit der sogenannten gravitativen Rotverschiebung zusammen.

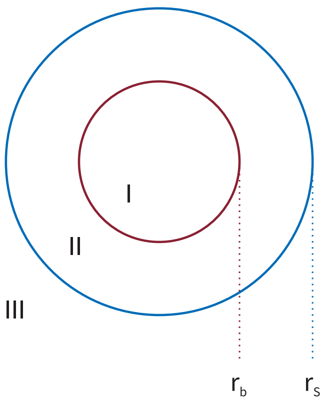

Abb. 14. Dieses schwarze Loch besitzt eine Masseverteilung bis r_b. Der Ereignishorizont liege bei r_S.

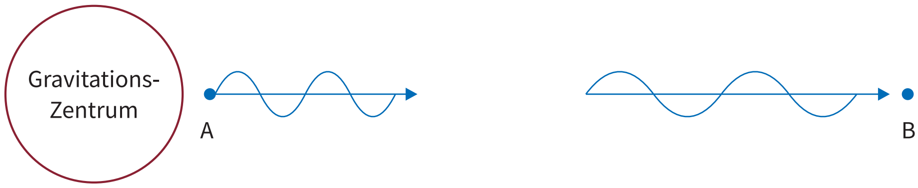

Abb. 15. Die Veränderung der Eigenzeit in der Nähe eines Gravitationsfeldes beeinflusst auchd die Wellenlänge von Licht. Hat das Licht das Gravitationspotential verlassen, scheint das Licht eine größere Wellenlänge zu haben.

Abschnitt 5.5
Gravitative Rotverschiebung

Um den Effekt der gravitativen Rotverschiebung zu untersuchen, machen wir uns zunächst das Problem bewusst. Wir wollen wissen, welchen Einfluss ein Photon durch die Anwesenheit eines Gravitationsfeldes spürt. Das Photon besitzt als grundlegende Eigenschaft eine Verknüfung mit der Zeit – in Form einer Frequenz bzw. Wellenlänge. Wir wollen also zunächst untersuchen, was mit einer Uhr in Anwesenheit eines Gravitationspotentials geschieht. Wir nehmen an, unsere Uhr befinde sich im Koordinatenursprung ($x^1 = x^2 = x^3 = dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$). Dann ist das Wegelement $ds = cd\tau$ und die "gravitative Zeitdilatation" beträgt

$$d\tau = \frac{ds_{\text{Uhr}}}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{00}}dt \tag{5.6}$$

Wir untersuchen jetzt folgenden Sachverhalt: Es werden zwei Photonen vom Ort A in Richtung Ort B gesendet. Die Zeit im System des Photons sei τ, die Zeit im System des Beobachters sei t. Direkt angewendet ergibt sich für die differentiellen Zeitintervalle am Ort A bzw. Ort B nun nach Gl. 5.6

$$d\tau_A = \sqrt{g_{00}(r_A)}dt_A \qquad\qquad d\tau_B = \sqrt{g_{00}(r_B)}dt_B \tag{5.7}$$

Die sehr kurzen Zeitintervalle $d\tau$ können wir auch als eine Schwingungsperiode der Lichtwelle bezeichnen. Damit können wir die Frequenzen ν_A und ν_B gemäß $\nu = 1/t$ ausdrücken als $d\tau_A = \frac{1}{\nu_A}$ bzw. $d\tau_B = \frac{1}{\nu_B}$. Das Gravitationsfeld soll sich zeitlich nicht ändern. Dass heißt, dass die Reisezeiten für das erste Signal und für das zweite Signal für den Beobachter gleich lang sein müssen. Daraus folgt $dt_A = dt_B$. Wir können nun durch Division die Gleichungen 5.7 verbinden:

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}}$$

Damit haben wir einen Ausdruck erhalten, mit dem man die Änderung der Frequenz einer Lichtwelle bestimmen kann, wenn Sie Gravitationspotentiale durchläuft. In der Praxis wird auch oft der Rotverschiebungsparameter $z = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}} - 1$ bzw. die relative Rotverschiebung $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_B}$ verwendet. Man kann also bei bekannten Prozessen (Lichterzeugung in Sternen) ausgesendete Spektren untersuchen und bei einer entsprechenden Rotverschiebung auf die Gravitationsfeldstärke am Entstehungsort schließen.

Wir wollen nun noch zwei Grenzfälle untersuchen: Ein sehr kleines und ein sehr starkes Gravitationspotential. Im Fall der Erdanziehung können wir im Rahmen der ART von einem sehr schwachen Gravitationspotential sprechen. Wie schon gezeigt, kann man für diesen Fall den entsprechenden Eintrag des metrischen Tensors durch die Newton-Gravitation annähern. Dann wird $g_{00}(r) \approx \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$. Für die Umgebung um die Erdoberfläche ergibt sich mit dieser Näherung

$$z = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{h_B c^2}}{1 - \frac{2GM}{h_A c^2}}} - 1 \approx \frac{g(h_B - h_A)}{c^2} = \frac{gh}{c^2}$$

Die Potentialdifferenz der Newtongravitation wirde linearisiert und beträgt dann $\Phi_B - \Phi_A = g(h_B - h_A)$. Die relative Rotverschiebung beträgt dann

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}$$

Etwas besser für die Anwendung in der Schule geeignet ist vielleicht die Herleitung durch Nutzung des Energie-Impuls-Satzes. Hierfür betrachtet man die Energiebilanz der beiden Photonen mit Gesamtenergie $E_A = 2\pi\hbar\nu_A$ und $E_B = 2\pi\hbar\nu_B$. Das Photon A befinde sich nun noch zusätzlich im Gravitationspotential. Im schwachen Erdgravitationsfeld wird das Potential linearisiert. Es ergibt sich also

$$2\pi\hbar\nu_A = mc^2 + mgh \qquad 2\pi\hbar\nu_B = mc^2$$

Die relative Rotverschiebung beträgt demnach

$$\begin{aligned}\frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_B} &= \frac{2\pi\hbar}{2\pi\hbar} \cdot \frac{mc^2 - (mc^2 + mgh)}{mc^2} \\ &= -\frac{gh}{c^2}\end{aligned}$$

Man kann diesen Effekt der gravitativen Rotverschiebung im Erdfeld sogar messen. Beim Mößbauereffekt gibt es eine sehr scharfe Linienemission von Photonen. Wenn Quelle und Empfänger durch einen Höhenunterschied von $h = 22\,\mathrm{m}$ getrennt sind, ändert sich die Frequenz der emittierten Photonen um das Verhältnis

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2} = -2.46 \cdot 10^{-15}$$

. Diese Frequenzverschiebung kann man entsprechend den Berechnungen durch Messungen tatsächlich nachweisen.

Was passiert nun aber bei einem sehr starken Gravitationsfeld? Speziell wollen wir hier den Ereignishorizont eines schwarzen Loches als Ausgangsort für eine Photonen-Emission untersuchen. Dann wird durch

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_S}{r_0}}{1 - \frac{r_S}{r \to r_S}}} \propto \sqrt{\frac{1}{0}}$$

die Rotverschiebung unendlich stark. Das Photon kann den Ereignishorizont also nicht verlassen.

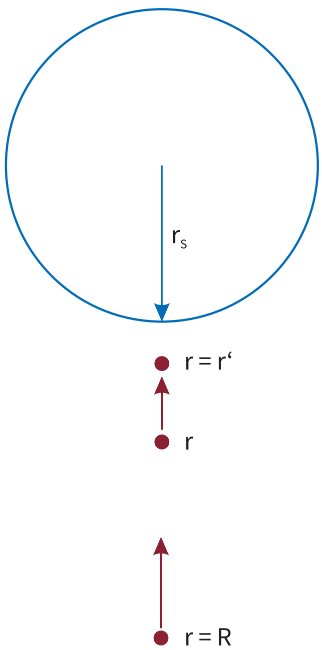

Abb. 16. Fall eines Astronauten in ein schwarzes Loch.

Abschnitt 5.6

Fall in ein schwarzes Loch

Wir wollen nun an einem Beispiel die relativistische Bewegungsgleichung benutzen. Was liegt näher, als zu untersuchen wie ein Astronaut in ein schwarzes Loch fällt [2]. Der

Sachverhalt ist in Abb. 16 dargestellt. Die Reise des Astronauten beginnt bei $r = R$ ohne Anfangsgeschwindigkeit ($\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} = 0$). Die Masse des schwarzen Loches ist auf einem Punkt konzentriert, also ist hier $r_b = 0$. Die Bewegungsgleichung lautete

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{5.8}$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{g^{\beta\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) \tag{5.9}$$

. Da wir nun die Schwarzschildmetrik nutzen, kann $g_{\mu\nu}$ eingesetzt werden und alle Ableitungen können ausgeführt werden. An diesem Beispiel sollen nun auch die entsprechenden Christoffelsymbole für die Bewegungsgleichung berechnet werden. Wir ignorieren die Koordinaten ϑ und φ und arbeiten lediglich mit $x^0 = c \cdot t$ und $x^1 = r$. Die Bewegungsgleichung für die x^0-Komponente, also $\alpha = 0$ in Gl. 5.8, lautet nun:

$$\begin{aligned}
\frac{c^2dt^2}{d\tau^2} &= \Gamma^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \\
&= \Gamma^0_{\mu 0}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\mu 1}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} \\
&= \Gamma^0_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^0_{01}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^0_{10}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^0_{11}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}
\end{aligned}$$

Nun benötigen wir noch die Christoffelsymbole $\Gamma^0_{00}, \Gamma^0_{01}, \Gamma^0_{10}$ und Γ^0_{11}. Für nur zwei Koordinaten x^0 und x^1 wird Gl. 5.9 zu

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{g^{0\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right) + 0$$

, weil $g^{01} = 0$ ist. Die Einträge für $g_{\mu\nu}$ sind nur ungleich 0 für die Fälle g_{00} und g_{11}. Die Christoffelsymbole werden nun berechnet durch:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) = -\frac{g^{00}}{2}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = (\dots)\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = 0 \\
\Gamma^0_{10} &= \frac{g^{00}}{2}\left(\cancel{\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \cancel{\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0}}\right) = \frac{g^{00}}{2}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \\
\Gamma^0_{01} &= \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \cancel{\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}} - \cancel{\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}}\right) = \frac{g^{00}}{2}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \\
\Gamma^0_{11} &= \frac{g^{11}}{2}\left(\cancel{\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1}} + \cancel{\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}\right) = -\frac{g^{11}}{2}\cdot\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = (\dots)\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

Da $g_{\mu\nu}$ nur von r abhängt, werden für Γ^0_{00} und Γ^0_{11} die letzten Terme zu partiellen Ableitungen der Form $\partial r/\partial t = 0$ führen. Aus der Schwarzschildmetrik $g_{\mu\nu}$ aus Gl. 5.4 ergibt sich $g_{00} = (1 - r_S/r)$. Ohne Beweis[7] ist außerdem $g^{00} = 1/g_{00}$. Damit lassen sich die verbleibenden beiden Christoffelsymbole bestimmen:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}\cdot\frac{\partial\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}{\partial r} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}\cdot\frac{r_S}{r^2} = \frac{r_S}{2r(r - r_S)}$$

[7] Das würde weitere Erläuterungen zu ko- und kontravarianten Tensoren auf den Plan rufen. Dies möchte ich in diesem Lehrbuch gern vermeiden. . .

Nun können wir diese in die Bewegungsgleichung der Zeit-Komponente x^0 einsetzen und erhalten

$$\frac{c^2 dt^2}{d\tau^2} = -\frac{2r_S}{2r(r-r_S)}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} = -\frac{r_S}{r(r-r_S)}\frac{cdt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}$$

Zusammen mit dem Wegelement für den Pfad des Astronauten auf geradem Weg (ϑ und φ werden also weggelassen)

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_S}{r}\right)}$$

haben wir einen Satz aus zwei Differentialgleichungen. Diese beiden Gleichungen lassen sich analytisch lösen. Die Lösung wird hier ohne Rechnung angegeben und lautet

$$e^{-\frac{c\cdot\Delta t}{r_S}} = \frac{r'-r_S}{r-r_S}$$

Wenn sich der Astronaut dem Ereignishorizont nähert, wird der Ausdruck auf der rechten Seite gegen 0 gehen. Daher muss auch die linke Seite der Gleichung gegen 0 gehen, was für $\Delta t \to \infty$ erfüllt ist. Für den ruhenden Beobachter dauert es also unendlich lange, bis der Astronaut den Ereignishorizont erreicht.

Wie läuft das ganze aber für den Astronauten ab? Dafür muss man nun die Rechnung mit der Eigenzeit $d\tau$ des Astronauten durchführen. Es ergibt sich, dass die Zeit für den Fall ins schwarze Loch in diesen Eigenzeitkoordinaten endlich ist! Die Gesamte Fallzeit von $r = R$ bis zur Singularität $(r = 0)$ beträgt

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2c}\left(\frac{R^3}{r_S}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Der Astronaut nimmt den Moment nicht wahr, an dem er den Ereignishorizont passiert. Es ist also theoretisch möglich, den Ereignishorizont eines schwarzen Loches zu passieren.

Abschnitt 6

Exotisches zur Relativität

In diesem Kapitel stelle ich kurz und ohne fachliche Tiefe Themen vor, die aus Wünschen von Studierenden ausgewählt wurden. Es sind hauptsächlich Effekte oder Vorstellungen, wie Sie in Medien oder Science-Fiction Filmen bekannt sind. Gerade wegen dieser Bekanntheit sind es aber auch gute Anknüpfungspunkte zwischen SchülerInnen und LehrerInnen, um interessante Gespräche über Physik zu führen.

Abschnitt 6.1

Einstein-Rosen-Brücke

Eine spannende Vorhersage der ART ist die Möglichkeit der Existenz von Wurmlöchern. In der Literatur oder in Filmen wird darauf häufig eingegangen. Was aber hat es damit auf sich? Grundlegend beruhen Wurmlöcher auf der Existenz eines sogenannten "weißen Loches". Die Feldgleichungen erlauben prinzipiell Zeitumkehr – damit wäre ein solches weißes Loch das zeitumgekehrte Pendant zum schwarzen Loch. Es würde pausenlos Energie und Materie abstrahlen, und das in extremen Mengen. Ein solches Objekt wäre extrem hell und würde am Nachthimmel alle anderen Galaxien deutlich überstrahlen. Die Existenz eines weißen Loches ist also physikalisch höchst unplausibel, da man

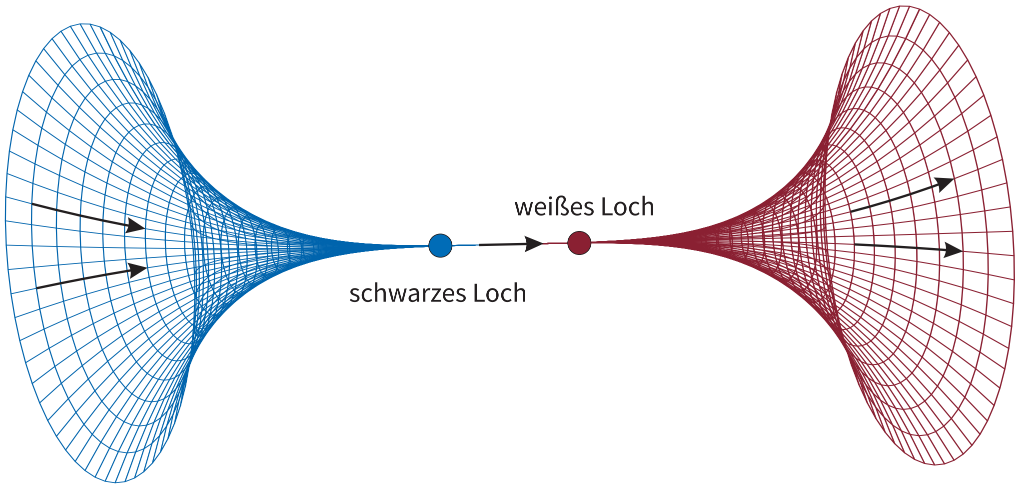

Abb. 17. Einstein-Rosen-Brücke als Verbindung eines schwarzen und weißen Loches. In kurzer Zeit könnten große Distanzen zurückgelegt werden.

es schon längst hätte beobachten müssen. Ignorieren wir diese Tatsache, kommt hinzu dass ein solches weißes Loch aus Gründen der Energieerhaltung nicht isoliert existieren kann. Aber: Es im Rahmen der ART möglich ein Objekt zu modellieren, dass eine Verbindung aus schwarzem Loch und weißem Loch darstellt wie in Abb. 17 gezeigt. Die Energieerhaltung wäre erfüllt und es wäre wie in der Science-Fiction möglich damit verschiedene Raumpunkte großer Entfernung miteinander zu verbinden. Diese Lösung der Feldgleichungen wurde 1935 von Einstein und Nathan Rosen vorgestellt, weswegen auch üblicherweise von einer Einstein-Rosen-Brücke gesprochen wird [15]. Neben dem bereits angesprochenen Problem mit den nicht beobachteten weißen Löchern, gibt es aber noch weitere Stolpersteine beim Benutzen des Wurmloches: Diese Lösung der Feldgleichungen ist selbst bei kleinsten Störungen instabil. Selbst der Eintritt eines Raumschiffes in das schwarze Loch würde die Verbindung destabilisieren und schließlich trennen. Dann würde man sich wiederfinden mit der Singularität hinter sich und dem Ereignishorizont vor sich – keine guten Raumfahrtbedingungen.

Als abschließende Bemerkung dazu aber noch gute Neuigkeiten: Es gibt auch neue theoretische Modelle von Wurmlöchern die eine Passage ermöglichen könnten [16, 17].

Abschnitt 6.2

Warp-Antrieb

Einstein-Rosen-Brücken sind also wahrscheinlich nicht geeignet um interstellare Raumfahrt zu realisieren. Dann bleibt als nächste Option der sogenannte Warp-Antrieb aus dem Star-Trek Franchise. Und entgegen den üblichen Einschätzungen werden wir sehen, dass wir uns hier schon eher mit einer “umsetzbaren” Idee beschäftigen.

Das Ziel eines Warp-Antriebes ist kein geringeres, als die Fortbewegung mit Überlichtgeschwindigkeit. In Anlehnung an die Ideen von Star Trek gibt es echte Entwürfe, wie man solche Antriebe zumindest theoretisch realisieren kann. Realisieren heißt hier, man gibt eine gewisse Metrik vor, die die gewünschten Eigenschaften beinhalten würde. Wie man solch eine Raumkrümmung dann erzeugt kann natürlich noch nicht betrachtet werden. Einer der Umsetzungen eines Warp-Antriebes ist das Modell des “Alcubierre-drive” [19]. Nötig ist es bei diesem Ansatz, ein Feld negativer Energie zu erzeugen. Spekulationen zufolge könnte ja vielleicht die dunkle Materie hierzu einen Beitrag leisten.

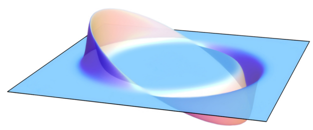

Abb. 18. Alcubierre-Drive: Der Raum vor dem Raumschiff wird kontrahiert, hinter dem Raumschiff expandiert [18].

Dann könnte man den Raum vor dem Raumschiff zusammenziehen und hinter dem Schiff wieder ausdehnen. Insgesamt wäre die Raumkrümmung in einiger Entfernung also wieder ausgeglichen und es gibt nur einen lokalen Einfluss in der Umgebung des Raumschiffes wie man in Abbildung 18 erkennt. Die Folge einer solchen vom Raumschiff erzeugten Raumkrümmung wäre, dass das Schiff sich mit $v < c$ oder sogar garnicht fortbewegt, sich das Ziel aber trotzdem relativ mit $v > c$ nähert. Außerdem wäre ein immens wichtiger Aspekt, dass durch die langsame Geschwindigkeit innerhalb der verformten Raumzeit keine Zeitdilatation berücksichtigt werden muss. Es ist also möglich ein entferntes Ziel in kurzer Zeit zu erreichen, ohne dass in der Heimat Millionen von Jahren vergangen sind. Die Metrik des Alcubierre-Drive soll diese Form annehmen:

$$ds^2 = \left(v_s(t)^2 f(r_s(t))^2 - 1\right) dt^2 - 2v_s(t)r_s(t)dxdt + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

mit r_s, f und v_s als komplizierte Funktionen der Koordinaten. Die Notwendigkeit von exotischer Materie/Energie würde einem Energiebedarf in Größenordnungen von Planeten, Sternen oder gar Galaxien entsprechen. Das macht diesen Entwurf zunächst, vorsichtig gesagt, unpraktisch.

Zum Glück gibt es aktuelle Veröffentlichungen die belegen, dass man auch mit positiver Energie ein solches Warp-Feld erzeugen kann [20]. Der Energiebedarf ist aber leider auch hier unvorstellbar hoch.

Abschnitt 6.3

Zeitreisen

Zeitreisen sind ein weiteres populäres Element, dass eng mit der Relativitätstheorie verknüpft ist. Weil auch dieses Thema in den Medien sehr präsent ist, soll hier ein grober Überblick über gängige (wissenschaftlich fundierte) Theorien zu Zeitreisen gegeben werden.

6.3.1 Zeitreisen in die Vergangenheit

Zeitreisen in die Vergangenheit sind (leider) physikalisch äußerst unplausibel. Man denke nur an das Großvaterparadoxon: Man würde in die eigene Vergangenheit reisen und könnte dort seinen Großvater töten. Das würde aber die eigene Existenz verhindern und damit zu einem Paradoxon führen. In der ART wurden Zeitreisen aber natürlich auf ihre Machbarkeit hin untersucht. So fand Kurt Gödel 1949 eine entsprechende Möglichkeit [21]. Als Lösung für die Feldgleichungen beschrieb er sogenannte closed timelike curves (CTC). Diese Pfade durch die Raumzeit ermöglichen es, wieder zur eigenen Vergangenheit zu reisen. Das praktische Problem an diesen Lösungen ist aber eben, dass sie geschlossen sind. Wenn jemand in die Vergangenheit reist und dort etwas tut, so hat er es “immer schon getan”. Man kann also die Zukunft mit der Reise in die Vergangenheit nicht beeinflussen sondern bedingt die bereits feststehende Zukunft damit. Auf philosophischer Ebene wird in diesem Zusammenhang auch oft vom problematischen freien Willen gesprochen.

Wenn man ohne die ART arbeitet und sich ausschließlich in einer Quantenphysikalischen Welt befände, wären allerdings Reisen in die Vergangenheit ohne Paradoxa möglich. Möglich machen dies dann die Wahrscheinlichkeitsinterpretation oder die Many-World-Interpretation.

Die gute Nachricht für angehende Zeitreisende ist aber, dass nur die Einflussnahme auf die Vergangenheit das Problem darstellt. Könnte man in die Vergangenheit reisen ohne jede Einflussnahme (z.B. nur eine Bildübertragung aus der Vergangenheit), so wäre dies mit der Theorie vereinbar.

Eine weitere hypothetische Möglichkeit, in die Vergangenheit zu reisen wäre unser bereits bekannter Warp-Antrieb als Möglichkeit einer Fortbewegung mit $v > c$. Durch die Zeitdilatation mit $v > c$ wird die Eigenzeit dann negativ ablaufen.

6.3.2 Zeitreisen in die Zukunft

Zeitreisen in die Zukunft sind dagegen allgegenwärtig. Wir alle reisen pausenlos in die Zukunft. Jedoch mit einer uns vorgegebenen Gechwindigkeit die wir nicht beeinflussen können. Es stellt sich also eher die Frage, wie wir *schneller als üblich* in die Zukunft reisen können. Dies kann man direkt durch Anwendung der Gesetze aus der SRT und ART tun. Man strafft den Zeitablauf (verkürzt also die Eigenzeit) durch

- hohe Geschwindigkeiten: Wenn man sich mit einer relativistischen Geschwindigkeit bewegt, wird die Eigenzeit entsprechend der Zeitdilatation verkürzt. Wenn man eine Rundreise mit großer Geschwindigkeit unternimmt, kommt man deutlich später wieder auf die Erde als dies dem eigenen Zeitrahmen entspricht.
- große Gravitationspotentiale: In Anwesenheit großer Massen verkürzt sich ebenfalls die Eigenzeit. Wenn man also für einige Zeit t ein schwarzes Loch umkreist und dann zurückkehrt, ist für den Beobachter die Zeit $t_2 > t$ vergangen.

Abschnitt 6.4

Dunkle Materie und dunkle Energie

6.4.1 Dunkle Materie

Am Anfang der 1970er Jahre wurde die Rotationsgeschwindigkeit von Sternen in entfernten Galaxien untersucht. Dazu verwendete man die relativistische Rotverschiebung als Maß für die Geschwindigkeit in verschiedenen Bereichen der betreffenden Galaxie. Durch Rechnungen kann man durch die vorhandene sichtbare Materieverteilung (im Wesentlichen Sterne, die Licht/Strahlung emittieren) diese Rotationsgeschwindigkeit durch die ART sehr gut rekonstruieren. Eventuell vorhandene Planeten spielen bei der Masse keine Rolle. Die Masse eines Sternensystems ist etwa gleich der Sternmasse. Die Rotation müsste demnach der blauen Linie in Abb. 19 entsprechen. Die tatsächlichen Messungen durch die Rotverschiebung zeigten aber dagegen bei großen Abständen vom Zentrum eine eher konstante Rotationsgeschwindigkeit. Die einzig mögliche Erklärung dafür ist, dass die angenommene Masse und Massenverteilung falsch war. Wenn man in den Rechnungen eine fiktive Masseverteilung hinzufügt lässt sich das Messergebnis in Übereinstimmung mit der Theorie bringen. Der Haken an der Sache ist, dass diese hinzugefügte Masse (*Dunkle Materie*) dann etwa einen Großteil der Gesamtmasse ausmachen müsste. Das heißt, nur etwa 5-10% der Materie einer Galaxie sind sichtbar und bestehen aus uns bekannter Materie.

Was soll nun aber diese Dunkle Materie sein? Zunächst einmal wird unter diesem Begriff alles zusammengefasst, dass nicht intensiv genug Strahlung aussendet um von uns wahrgenommen zu werden. Dies beinhaltet also auch ausgebrannte Sonnen oder zu schwach leuchtendes interstellares Gas. Aber selbst optimistische Schätzungen zu diesem Beitrag erklären bei Weitem nicht diese große Menge an dunkler Materie. Weitere Kandidaten für die nicht-sichtbare Masse sind Neutrinos. Diese sind zwar so gut wie masselos, dafür gibt es Sie aber in unvorstellbar großer Zahl. Neue Messungen geben Abschätzungen für Menge und Masse – die ebenfalls nicht als Erklärung für die dunkle Materie ausreicht.

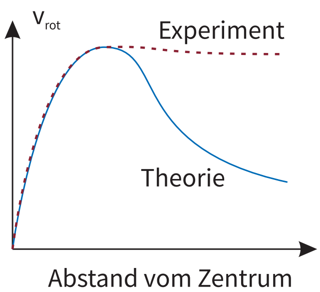

Abb. 19. Rotationsgeschwindigkeiten entferneter Galaxien.

Es muss also noch bisher unbekannte Teilchenarten geben, die vermutlich nur durch Gravitation, aber nicht durch andere Kräfte wechselwirken. Das Universum besteht also demnach zum Großteil aus Materie/Energie die wir weder beobachten können, noch im Labor erzeugen konnten. Es gibt theoretische Modelle, wie man Teilchen mit den

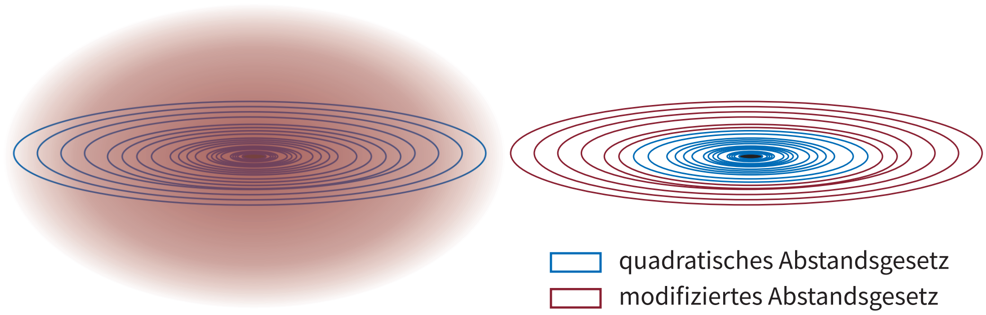

Abb. 20. Mögliche Szenarien: (links) Ein Halo aus dunkler Materie umgibt jede Galaxie und bewirkt so besonders in den äußeren Bereichen eine veränderte Rotationsgeschwindigkeit. (rechts) Gemäß der MOND-Theorie wirkt die Gravitation im Inneren von Galaxien (blau) proportional zu $\frac{1}{r^2}$, in den äußeren Gebieten (rot) dagegen eher linear.

geforderten Eigenschaften beschreiben kann. Eine hypothetische Teilchenfamilie sind die sigenannten WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles). Diese sehr schweren Teilchen würden nur gravitativ und über die Kernkräfte wechselwirken würden nicht mit Licht oder anderer elektromagnetischer Strahlung wechselwirken. So wie Neutrinos (mit dem Gewicht eines Goldatoms) könnten diese WIMPs durch extrem seltene Reaktionen mit Atomkernen auf der Erde detektiert werden. Bisher wurde ein solches Ereignis noch nicht bestätigt.

Ein anderer hypothetischer Kandidat ist das Axion [22]. Diese Teilchen wären viel leichter als Elektronen und würde auch noch andere Probleme in der Teilchenphysik erklären können. Auch hier gilt aber, dass es bislang keinen erfolgreichen experimentellen Hinweis gibt.

Es gäbe auch die Möglichkeit einer noch bisher unbeobachteten Neutrinoart, den sogenannten sterilen Neutrinos [23]. Diese Neutrinos sind relativ schwer und wäre immerhin indirekt über eine Wechselwirkung mit anderen Neutrinos nachweisbar.

Es gibt auch Forschung zu einer Möglichkeit, die Dunkle Materie als Erklärung überflüssig zu machen. Dafür schlägt man Änderungen an der bestehenden Gravitationstheorie vor [24]. Es wäre möglich dass die Gesetzmäßigkeiten und auch etwa die Gravitationskonstante nicht überall im Universum identisch sind. Mit einer Ortsabhängigkeit des Newton'schen Abstandsgesetzes könnte man die Beobachtungen auch ohne die Dunkle Materie erklären. Man spricht dann von der MOND-Theorie (Modifizierte Newton'sche Dynamik). Das quadratische Abfallen der Gravitationskraft müsste dann in den äußeren Bereichen einer Galaxy eher zu einer linearen übergehen um die beobachteten Rotationsgeschwindigkeiten zu bestätigen. Allerdings gibt es bisher keine akzeptierte Begründung für eine solche nicht-universelle Gravitationstheorie. Der Ansatz hierzu ist bereits recht alt und wurde zwischenzeitlich bereits verworfen. Neu Messungen aber legen tatsächlich eine "Universelle Gesetzmäßigkeit", wie sie die MOND-Theorie liefert, nahe [25]. Ein ziemlich revolutionärer (und umstrittener) Ansatz verknüpft Effekte der Quantenphysik mit der Relativitätstheorie und würde damit wohl zu einer Herleitung des MOND-Ansatzes führen [26]. Besteht das Universum aus miteinander verschränkten Qubits, deren Verschränkung durch die Anwesenheit von Materie gestört wird. Der Drang dieser Störung entgegenzuwirken wird dann als Gravitation manifestiert. Die Verschränkung selbst ist ein nicht-Lokaler Effekt ohne Reichweitenbeschränkung. Da mit zunehmendem verdrängtem Volumen durch Materie in einer Galaxie die zurückdrängende Energie stark wächst würde sich wohl tatsächlich genau der benötigte Effekt aus der MOND-Theorie ergeben.

Es bleibt zu sagen, dass das Forschungsfeld der Dunklen Materie noch viele Interessante Entdeckungen zu bieten hat.

6.4.2 Dunkle Energie

Die dunkle Energie wird als hypothetische Energieform herangezogen, um die beobachtete Expansion des Universums zu erklären. Die dunkle Energie müsste demnach sowohl die sichtbare als auch die dunkle Materie vom Energiegehalt her deutlich übersteigen. Etwa 70% der Gesamtenergie des Universums würde demnach auf diese Energieform entfallen. Die dunkle Energie müsste homogen über das gesamte Universum verteilt sein und einen gewissen "Druck" ausüben der dann zur Expansion führt. Wissenschaftler favorisieren momentan die Idee, das diese dunkle Energie mehr oder weniger mit der Vakuumenergie der Quantenfeldtheorie identisch ist.

Index

Literatur

[1] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. SpringerLink Bücher. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 7. aufl. 2016 edition, 2016. ISBN 9783662531068. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-53106-8.

[2] A. Stillert. *Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher: eine Einführung für Lehramtsstudierende*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2019. ISBN 3658250992.

[3] T. Filk. *Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie*. Vorlesungsskript. Version 03.02.2015.

[4] A. A. Michelson and M. v. Laue. Die Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther. *Naturwissenschaften*, 1931.

[5] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10): 891–921, 1905. doi: https://doi.org/10.1002/andp.19053221004. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053221004.

[6] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*, pages 9–14. SpringerLink Bücher. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 7. aufl. 2016 edition, 2016. ISBN 9783662531068. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-53106-8.

[7] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, and S. W. Koch. *Halliday Physik; Dritte, vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage*. Wiley-VCH, Weinheim, 2018. ISBN 978-3-527-80576-1. URL https://reserves.ub.rwth-aachen.de/record/137735. Online-Ressource über KatalogPlus der Universitätsbibliothek RWTH Aachen innerhalb des RWTH-Netzes verfügbar!

[8] W. Demtröder. *Experimentalphysik 1*. Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin ; [Heidelberg], 8. auflage edition, 2018. ISBN 978-3-662-54847-9. doi: 10.1007/978-3-662-54847-9. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-54847-9.

[9] P. A. Tipler and G. Mosca. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Neckar, 2nd ed. edition, 2009.

[10] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, Berlin, 25 edition, 2015.

[11] C. M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 2014. doi: 10.12942/lrr-2014-4.

[12] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916. doi: https://doi.org/10.1002/andp.19163540702. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19163540702.

[13] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220:291–333, 1920. ISSN 02643952. URL http://www.jstor.org/stable/91137.

[14] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196, Jan. 1916.

[15] A. Einstein and N. Rosen. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935. doi: 10.1103/PhysRev.48.73. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.73.

[16] J. L. Blázquez-Salcedo, C. Knoll, and E. Radu. Traversable Wormholes in Einstein-Dirac-Maxwell Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 126:101102, Mar 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.126.101102. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.101102.

[17] J. Maldacena and A. Milekhin. Humanly traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 103:066007, Mar 2021. doi: 10.1103/PhysRevD.103.066007. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.066007.

[18] AllenMcC., 2007. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alcubierre.png. CC3.0.

[19] M. Alcubierre. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):L73–L77, may 1994. doi: 10.1088/0264-9381/11/5/001. URL https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/5/001.

[20] A. Bobrick and G. Martire. Introducing physical warp drives. *Classical and Quantum Gravity*, 38(10):105009, apr 2021. doi: 10.1088/1361-6382/abdf6e. URL https://doi.org/10.1088%2F1361-6382%2Fabdf6e.

[21] K. Gödel. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 21:447–450, Jul 1949. doi: 10.1103/RevModPhys.21.447. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.447.

[22] C. B. Adams, N. Aggarwal, and A. A. et al. Axion Dark Matter, 2023.

[23] R. Adhikari, M. Agostini, and N. A. e. a. Ky. A White Paper on keV sterile neutrino Dark Matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(01):025–025, Jan. 2017. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2017/01/025. URL http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/01/025.

[24] A. Joyce, L. Lombriser, and F. Schmidt. Dark Energy Versus Modified Gravity. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 66(1):95–122, 2016. doi: 10.1146/annurev-nucl-102115-044553. URL https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102115-044553.

[25] S. S. McGaugh, F. Lelli, and J. M. Schombert. Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies. *Phys. Rev. Lett.*, 117:201101, Nov 2016. doi: 10.1103/PhysRevLett.117.201101. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.201101.

[26] E. P. Verlinde. mergent Gravity and the Dark Universe. *SciPost Phys.*, 2:016, 2017. doi: 10.21468/SciPostPhys.2.3.016. URL https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.2.3.016.

[27] H. F. Coward. John Dalton (b. 1766, d. 1844). The early years of the atomic theory as illustrated by Dalton's own note-books and lecture diagrams. His apparatus. *Journal of Chemical Education*, 4(1):23, 1927. doi: 10.1021/ed004p23. URL https://doi.org/10.1021/ed004p23.

[28] E. da C. Andrade. *Rutherford and the Nature of the Atom*. 1964. URL https://books.google.de/books?id=VVoeXNceuVwC.

[29] W. Demtröder. *Entwicklung der Atomvorstellung*, pages 9–70. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2016. ISBN 978-3-662-49094-5. doi: 10.1007/978-3-662-49094-5_2. URL https://doi.org/10.1007/978-3-662-49094-5_2.

[30] W. Demtröder. *Entwicklung der Quantenphysik*, pages 71–112. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2016. ISBN 978-3-662-49094-5. doi: 10.1007/978-3-662-49094-5_3. URL https://doi.org/10.1007/978-3-662-49094-5_3.

[31] A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, 1905. doi: https://doi.org/10.1002/andp.19053220607. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053220607.

[32] S. Nemschockmichal. *Röntgenversuch Vorlesungssammlung*, 2022.

[33] W. Friedrich, P. Knipping, and M. Laue. Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. *Annalen der Physik*, 346(10):971–988, 1913. doi: https://doi.org/10.1002/andp.19133461004. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19133461004.

[34] L. de Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Migration - université en cours d'affectation, Nov. 1924. URL https://theses.hal.science/tel-00006807.

[35] F. Logiurato. Relativistic Derivations of de Broglie and Planck-Einstein Equations. *Journal of Modern Physics*, 5(1):1–7, 2014.

[36] S. Nemschockmichal. *Franck-Hertz-Versuch von PHYWE, Vorlesungssammlung*, 2023.

[37] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2001.

[38] U. Evan. plotHydrogenAtomMolecularOrbital.m, retrieved 2024. URL https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/44604-plot-hydrogen-atom-molecular-orbital.

[39] C. Zahn and U. Kraus. Sector models—A toolkit for teaching general relativity: I. Curved spaces and spacetimes. *European Journal of Physics*, 35(5):055020, jul 2014. doi: 10.1088/0143-0807/35/5/055020. URL https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/35/5/055020.

[40] C. Zahn and U. Kraus. Sector models—a toolkit for teaching general relativity: II. Geodesics. *European Journal of Physics*, 40(1):015601, nov 2018. doi: 10.1088/1361-6404/aae3b7. URL https://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/aae3b7.

[41] C. Zahn and U. Kraus. Sector models—A toolkit for teaching general relativity: II. Geodesics, 2018. URL https://www.spacetimetravel.org/sectormodels2/worksheets2.pdf.