Aufgabe 7 *Barometrische Höhenformel*

Als einfache Anwendung der Impulsbilanzgleichung soll in dieser Aufgabe die barometrische Höhenformel,

$$p(x_3) = p_0 \exp\big[-\frac{g}{c}x_3\big] \ , \tag{1}$$

also der Druckabfall mit zunehmendem Abstand x_3 von der Erdoberfläche, abgeleitet werden. Betrachten Sie dazu die Luft als ein ruhendes Gas im Schwerefeld der Erde und gehen Sie wie folgt vor:

a) Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die $x_1 x_2$ Ebene tangential zur Erdoberfläche ist und x_3 senkrecht darauf steht.

b) Stellen Sie in diesem Koordinatensystem unter Einbeziehung der Schwerkraft die Impulsbilanz für ein ruhendes Gas auf. Sie erhalten

$$\frac{dp}{dx_3} = -g\rho \ , \tag{2}$$

wobei ρ die Dichte der Luft ist und g die Schwerebeschleunigung. Führen Sie die Herleitung explizit durch und geben Sie auch Formeln für die Volumenkraftdichte $\vec{f}$ und den Spannungstensor σ_{ij} an. Beides benötigen Sie, um (2) abzuleiten.

c) Benutzen Sie die ideale Gasgleichung $pV = RT$ um die Dichte ρ mit dem Druck zu verknüpfen. Eingesetzt in (2) ergibt sich dann eine Differentialgleichung für den Druck,

$$\frac{dp}{dx_3} = -\frac{g}{c}p \ , \tag{3}$$

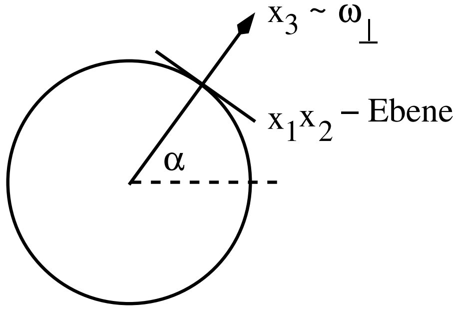
deren Lösung die barometrische Höhenformel (1) ist. Zeigen Sie, dass das wirklich der Fall ist. Was erhalten Sie für die Konstante c? Welche Bedeutung hat p_0?

Aufgabe 8 *Geostrophischer Wind*

Der geostrophische Wind ist eine gute Näherung für Winde oberhalb der planetaren Grenzschicht ($x_3 >$ 500 m). Die Windgeschwindigkeit ist dort näherungsweise konstant, es gilt also $\dot{\vec{v}} = 0$, sodass die Impulsbilanz gegeben ist durch

$$-\nabla p + \vec{f} = 0 \ . \tag{4}$$

Reibung kann in diesen Höhen vernachlässigt werden, darüber hinaus gilt die barometrische Höhenformel.



Zeigen Sie, dass unter der Annahme $v_3 = 0$ der Betrag der Windgeschwindigkeit in horizontaler Richtung, also in der Tangentialebene $x_1 x_2$, gegeben ist durch

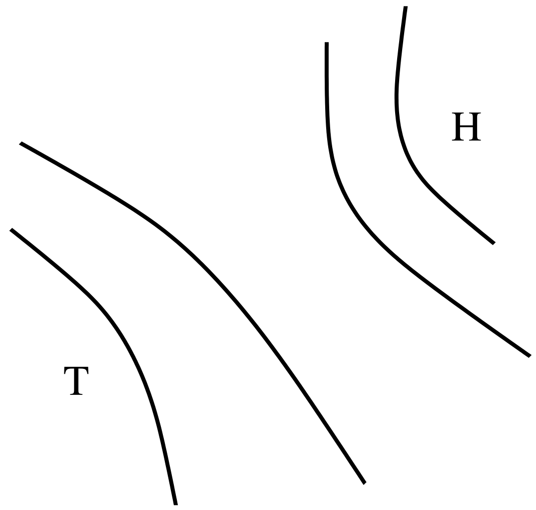
$$|\vec{v}| = \frac{|\nabla p|}{2\rho\omega \sin\alpha} \ , \tag{5}$$

wobei ρ die Luftdichte ist, ω die Kreisfrequenz der Erdrotation und α der Breitengrad. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Erkennen Sie zunächst, dass bzgl. der Horizontalkomponenten Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten und der Corioliskraft herrscht.

b) Konkretisieren Sie die Impulsbilanz für $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ und berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit. Es ergibt sich die Formel (5).

c) In welche Richtungen zeigen der Druckgradient ∇p und die Windgeschwindigkeit $\vec{v}$ in der nachfolgenden Skizze? Beschriften Sie die Linien. Welche Bedeutung haben sie? Bauen die Winde Druckdifferenzen ab oder nicht?



d) Vertikale und horizontale Komponenten sind natürlich gekoppelt. So ändern sich sowohl die Richtung als auch der Betrag von $\vec{v}$ mit der Höhe x_3. Man spricht von Baroklinität. Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\hat{e}_3 \times \vec{v}}{T}\right) = -\frac{g}{2\omega_\perp T^2}\nabla T \ .$$

Interpretieren Sie diese Gleichung.