Aufgabe 2 *Vektoranalysis*

Die Analyis in mehreren Veränderlichen kombiniert mit Vektorrechnung heißt Vektoranalysis. Sie liefert die Werkzeuge zur mathematischen Naturbeschreibung. In dieser Aufgabe sollen die in der Vorlesung besprochenen Vektoroperationen in Erinnerung gerufen und der Umgang mit ihnen geübt werden.

a) Wie sind die Vektoroperationen $\operatorname{grad}\Phi$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ und $\operatorname{div}\vec{a}$ in kartesischen Koordinaten definiert?

b) Wie lautet das totale Differential der Funktion $U(\vec{r}\,)$?

c) Berechnen Sie für

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= x + x^2y + y^3 + zxy \\ \vec{a}(x,y,z) &= 3x^2y\vec{e}_x + yz^2\vec{e}_y - xz\vec{e}_z\ ,\end{aligned}$$

wobei $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ die Einheitsvektoren in $x-$, $y-$ und $z-$Richtung eines kartesischen Koordinatensystems sind, die folgenden Größen: $\operatorname{grad}\Phi, \operatorname{div}\vec{a}$ und $\operatorname{rot}\vec{a}$.

Aufgabe 3 *Fragen zur Vorlesung*

Wiederholen Sie den Stoff der Vorlesung durch Beantwortung der folgenden Fragen.

a) In der Natur spielen konservative Kräfte eine sehr große Rolle. Nennen Sie zwei konservative Kräfte und geben sie zwei Möglichkeiten an, um festzustellen ob ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist oder nicht.

b) Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung in einem rotierenden Bezugssystem? Erläutern Sie die einzelnen Terme der Bewegungsgleichung. Wieso läßt sich mit dieser Gleichung die Unterspülung der rechten Ufer (in Flussrichtung) von Flüssen auf der Nordhalbkugel erklären?

c) Was ist die Grundidee der klassischen Feldtheorie? Welche Grundstruktur haben die Bewegungsgleichungen für Felder? Durch was zeichnet sich ein wirbelfreies Feld aus und durch was ein quellenfreies?

d) Geben Sie die allgemeine Struktur einer Bilanzgleichung an und erläutern Sie die einzelnen Terme. Wie lautet die allgemeine Impulsbilanzgleichung? Leiten Sie aus ihr die Navier-Stokes Gleichung her.

e) In dimensionloser Form enthält die Navier-Stokes Gleichung einen Parameter – die Reynolds Zahl Re. Geben Sie die Formel für Re an und interpretieren Sie diese Zahl.

Aufgabe 4 *Etwas zur Punktmechanik*

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich antriebslos unter dem Einfluß der Reibungskraft $F(v) = \alpha + \beta v^2$ auf einer waagerechten Schiene. Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0.

a) Nach welcher Zeit kommt der Massenpunkt zum Stillstand?

b) Welchen Weg hat der Massenpunkt dann zurückgelegt?

Aufgabe 5 *Zur vorweihnachtlichen Unterhaltung: Geoengineerung to the extreme*

Da nicht auszuschließen ist, dass der Klimawandel die Temperaturen auf der Erde unerträglich werden läßt, schlägt ein verzweifelter (oder durchgeknallter?) Physiker vor, ein Loch bis in das Erdinnere zu bohren. Die Temperatur dort beträgt 4000 K, ausreichend um Meerwasser, was in das Loch hineinlaufen soll, zu verdampfen. Mit dem entstehenden Dampfstrahl als Raketenantrieb soll der mittlere Abstand Erde-Sonne vergrößert werden, sodass die Sonneneinstrahlung nicht mehr so stark ist. Das Leben auf der Erde, so der Physiker, sollte dann wieder erträglich werden. Der Vorschlag ist natürlich ziemlich verwegen. Aber: Könnte er denn wenigstens im Prinzip funktionieren? Die Antwort auf diese Frage liefert die Impulserhaltung, zusammen mit der Formel $mv^2/2 = 3k_BT/2$, die aus der kinetischen Gastheorie kommt, und einigen Daten die Ozeane der Erde betreffend. Sie sind im Mittel 4 km tief und bedecken 75 % der Erdoberfläche.

Aufgabe 6 *Hagen-Poiseuille Problem (schwerer)*

In der Vorlesung haben wir die 2-dimensionale laminare Strömung behandelt. Mit geringen Modifikationen läßt sich auf analoge Weise die laminare Strömung durch ein zylindrisches Rohr mit Radius R behandeln. Als Ausgangspunkt wählen wir die stationäre dimensionsbehaftete Navier-Stokes Gleichung.

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\,\vec{v} \tag{1}$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Strömung, ρ die Dichte und η die Viskosität sind. Wegen der Inkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ finden wir für laminare Strömung, also für eine Strömung, die sich in kreiszylindrischen Schichten abspielt,

$$\vec{v} = v(x, y)\vec{e}_z \ . \tag{2}$$

Aufgrund dieser Struktur des Geschwindigkeitsfeldes reduziert sich die Navier-Stokes Gleichung (1) zu

$$0 = -\nabla p + \eta \vec{e}_z \Delta \vec{v} \ . \tag{3}$$

Daraus ergibt sich $p = p(z)$. Wieso? Das Problem ist offensichtlich zylindersymmetrisch. Statt kartesische Koordinaten x, y, z wählen wir deshalb Zylinderkoordinaten r, ϕ, z, wobei der Winkel ϕ in unserem Problem gar nicht auftritt. Um weiterzukommen, müssen wir noch den Laplace Operator Δ in Zylinderkoordinaten ausdrücken. Die Formel, zu finden im Netz, ist

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ . \tag{4}$$

Unter Ausnutzung der Tatsache, dass v nur vom Radius r abhängt, dass also $v = v(r)$ in (2), folgt schließlich die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) , \tag{5}$$

die unter der Randbedingung $v(R) = 0$ zu lösen ist.

a) Verifizieren Sie die Angaben.

b) Benutzen Sie die Methode *Separation der Variable* um (5) zu lösen. Die Separationskonstante C ist wie in dem in der Vorlesung besprochenen Beispiel gegeben durch den Druckabfall entlang z. Setzen Sie also $C = -\delta p/l$ mit $\delta p = p_1 - p_2$ wobei p_1 der Druck bei $z = z_1$ und p_2 der Druck bei $z = z_2 = z_1 + l$ ist.

c) Fertigen Sie eine Skizze des Strömungsprofiles an.