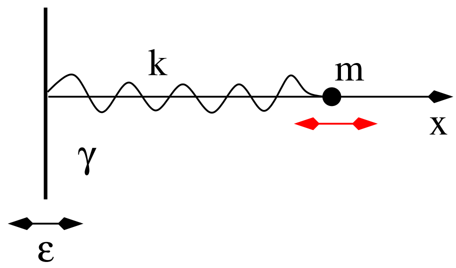
Übungsblatt zur Vorlesung: Theoretische Modelle

PD Dr. F. X. Bronold WS 19/20

Aufgabe 1 *Schwingungen*



Schwingungen sind periodische Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichung, d.h. es gilt $\vec{r}(t) = \vec{r}(t + T)$, wobei $T = 2\pi/\omega$ die Schwingungsdauer ist mit ω der Kreisfrequenz. Sie treten in vielen Bereichen der Physik auf und sollen uns hier dienen, um an einem einfachen Beispiel das Lösen von Bewegungsgleichungen zu besprechen. Wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m in einem Medium mit dem Reibungskoeffizienten γ.
Wie in der Abbildung dargestellt, ist der Massenpunkt mit einer Feder der Federkonstanten k verbunden. Auslenkung in x-Richtung führt auf eine eindimensionale gedämpfte Schwingung. Falls der Aufhängepunkt zeitlich variiert, nennt man die Schwingung erzwungen. Es kann dann das Phänomen der Resonanz auftreten. Im Folgenden soll das eben Gesagte mathematisch beschrieben werden. Damit betreten wir das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung auf unter der Annahme, dass die zeitliche Variation des Aufhängepunktes sinusförmig mit der Frequenz Ω, der Amplitude $f = m\varepsilon$ und der Phasenlage $\phi = \Omega t_0$ erfolgt. Dividieren Sie die Gleichung durch m und bestätigen Sie, dass die Auslenkung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \sin \Omega(t - t_0) \tag{1}$$

genügt. Wie hängen die Parameter ω_0 und β mit k, m und γ zusammen? Wie heißen die Kraftgesetze, die hier zum Einsatz kommen?

b) Zunächst betrachten wir die freie Schwingung, d.h. wir setzen $\beta = \varepsilon = 0$ und machen den Ansatz

$$x(t) = a \sin[b(t - t_0)]$$

mit a, b, t_0 reelle Zahlen. Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein. Welcher der drei Parameter a, b, t_0 läßt sich dann bestimmen? Die zwei verbleibenden Parameter – die man auch Integrationskonstanten nennt – ließen sich über zwei Anfangsbedingungen festlegen, was wir aber jetzt nicht tun wollen.

<u>Hinweis:</u> Um den entsprechenden Parameter zu bestimmen, müssen Sie berücksichtigen, dass a und $\sin[b(t - t_0)]$ natürlich nicht identisch Null sein können. Sonst würde der Ansatz ja keinen Sinn machen.

c) Bestimmen Sie jetzt die Lösung unter Einbeziehung des Reibungsterms, d.h. setzen Sie $\beta \neq 0$ aber vernachlässigen Sie immer noch den Antrieb. Wählen Sie den Ansatz

$$x(t) = a \exp[-b(t - t_0)] \sin[\omega(t - t_0)]$$

und bestimmen Sie die Parameter b und ω, wieder durch Einsetzen in die Differentialgleichung. Welche Bedingung müssen ω_0 und β erfüllen, damit b als reell angesetzt werden kann? Skizzieren Sie $x(t)$.

d) Schließlich betrachten Sie die volle Differentialgleichung (1), einschließlich des periodischen Antriebs. Die Differentialgleichung ist dann inhomogen da sie einen Term enthält, der unabhängig von $x(t)$ ist. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist die Superposition/Überlagerung der allgemeinen Lösung $x_{\mathrm{h}}(t)$ der homogenen Gleichung (also hier der Gleichung, die in c) diskutiert wurde) und einer speziellen Lösung $x_{\mathrm{s}}(t)$. Letztere kann erhalten werden durch Einsetzen des Ansatzes

$$x(t) = x_{\mathrm{s}}(t) = A\sin[\Omega(t-t_0)] + B\cos[\Omega(t-t_0)] \quad (a, b \text{ reell}) \ .$$

Da $\sin[\Omega(t-t_0)]$ und $\cos[\Omega(t-t_0)]$ nicht identisch für alle t verschwinden, ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Parameter A und B. Zeigen Sie, dass

$$A = \frac{\varepsilon(\omega_0^2-\Omega^2)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\beta^2\Omega^2} \quad \text{und} \quad B = -\frac{\varepsilon\beta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\beta^2\Omega^2} \ .$$

Die allgemeine Lösung der vollen Differentialgleichung (1) ist somit $x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{s}}(t)$, wobei $x_{\mathrm{h}}(t)$ die in c) berechnete Lösung ist. Die zwei noch offenen Integrationskonstanten sind a und t_0. Sie ließen sich über Anfangsbedingungen festlegen.

e) Diskutieren Sie das Ergebnis d) für den Fall $\beta \to 0$. Was ergibt sich insbesondere für den Parameter A, wenn zusätzlich $\Omega \to \omega_0$? Wie nennt man dieses Phänomen?