



Aufgabe 28 *Spin-1/2 im Magnetfeld*

Der HAMILTON-Operator eines Teilchens in einem Magnetfeld \vec{B} laute

$$H = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{S} \quad ,$$

wobei $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ der Spinoperator mit den PAULISchen Spinmatrizen $\vec{\sigma}$ ist. Im folgenden sei das Magnetfeld zeitlich konstant, homogen und entlang der z-Achse gerichtet, d.h.

$$B_1 = B_2 = 0, \quad B_3 = B = \text{const.} > 0.$$

- a) (i) Stellen Sie die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung auf, und bestimmen Sie ihre Lösung $\psi(t)$ für eine beliebige Anfangsbedingung $\psi(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ mit komplexen Zahlen u_0 und v_0 .
- (ii) Berechnen Sie mit dieser Lösung die Erwartungswerte $\langle S_i \rangle(t) = \langle \psi(t) | S_i | \psi(t) \rangle$ der Spinkomponenten.
- b) (i) Der Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ ist gegeben durch $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$. Geben Sie $U(t)$ explizit an, und bestimmen Sie damit die Spinoperatoren im HEISENBERG-Bild, d.h. bestimmen Sie

$$U(t)^\dagger S_i U(t).$$

- (ii) Überzeugen Sie sich, dass bei Bildung der Erwartungswerte

$$\langle \psi(0) | U(t)^\dagger S_i U(t) | \psi(0) \rangle$$

die gleichen Ergebnisse wie in (a)(i) resultieren.

- (iii) Drücken Sie $\langle S_i \rangle(t)$ jeweils durch die Größen $\langle S_j \rangle(t=0)$ ($j = 1, 2, 3$) aus. (Beachten Sie, dass $\langle S_i \rangle(t)$ und $\langle S_j \rangle(t=0)$ reelle Größen sind.) Berechnen Sie die Frequenz, mit der die Erwartungswerte rotieren und vergleichen Sie diese mit der in (a)(i) auftretenden Frequenz von $\psi(t)$.

- c) (i) An dem System, das durch den Zustandsvektor $\psi(t)$ aus (a)(i) beschrieben wird, werde eine Messung des Spins in x -Richtung vorgenommen. Welche Meßwerte sind dabei möglich? Berechnen Sie die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten als Funktion der Zeit. Verwenden Sie in den Ausdrücken für die Wahrscheinlichkeiten die Größen $\langle \sigma_i \rangle(0) = \langle \psi(0) | \sigma_i | \psi(0) \rangle$, $i = 1, 2$. Bestätigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist.
- (ii) Beantworten Sie die Fragen von (c)(i) für die spezielle Anfangsbedingung $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 29 *Magnetischer Kreisel*

Berechnen Sie das Energiespektrum eines magnetischen Kreisels im Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Für den HAMILTON-Operator gilt ($\Theta_1, \Theta_2 > 0$)

$$H = \frac{1}{2\Theta_1} \left[L_x^2 + L_y^2 \right] + \frac{1}{2\Theta_2} L_z^2 - g\mu_B B L_z .$$

Wodurch ist der Grundzustand bestimmt? Unter welcher Bedingung tritt Entartung auf? Für welche Werte des Magnetfeldes B besitzt der Grundzustand den Drehimpuls $l = 1$?

Aufgabe 30 *Spin 1*

Die drei Matrixoperatoren für Spin 1 genügen der Beziehung $J_x J_y - J_y J_x = iJ_z$ (und den entsprechend zyklisch permutierten Relationen).

Man zeige, dass $J_z^3 = J_z$ und $(J_x \pm iJ_y)^3 = 0$.