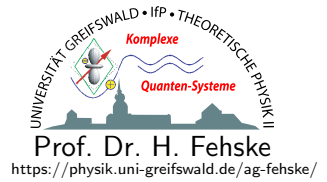




# Übungen zur Theoretischen Physik 3

Quantenmechanik

SS 2019



Prof. Dr. H. Fehske

<https://physik.uni-greifswald.de/ag-fehske/>

Blatt 9

Abgabe: **Dienstag, 4.6.19** vor der Vorlesung

## Aufgabe 25 *Harmonischer Oszillator III – Besetzungszahldarstellung*

In der Vorlesung wurde der eindimensionale harmonische Oszillator behandelt. Der Zustand  $\psi_n = (b^\dagger)^n \psi_0 / \sqrt{n!}$  ist der  $(n + 1)$ -te normierte Eigenzustand zu

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega \left( b^\dagger b + \frac{1}{2} \right).$$

Es gilt  $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$ ,  $b\psi_0 = 0$  und  $[b, b^\dagger] = 1$ .

- Berechnen Sie die Erwartungswerte  $\langle \psi_n | b^\dagger b | \psi_m \rangle$ ,  $\langle \psi_n | b b^\dagger | \psi_m \rangle$ ,  $\langle \psi_n | (b^\dagger)^2 | \psi_m \rangle$  und  $\langle \psi_n | b^2 | \psi_m \rangle$ .
- Drücken Sie Orts- und Impulsoperator durch  $b$  und  $b^\dagger$  aus und berechnen Sie für  $m = 1, 2, 3$  die Erwartungswerte  $\langle \psi_n | x^m | \psi_n \rangle$  und  $\langle \psi_n | p^m | \psi_n \rangle$ . Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt im  $n$ -ten Eigenzustand?
- Zeigen Sie, dass  $[b, \exp(\alpha b^\dagger)] = \alpha \exp[\alpha b^\dagger]$  und  $[b^\dagger, \exp(\alpha b)] = -\alpha \exp[\alpha b]$ . Was ergibt sich daraus für  $\exp[-\alpha b^\dagger] b \exp[\alpha b^\dagger]$  und  $\exp[-\alpha b] b^\dagger \exp[\alpha b]$ ?

## Aufgabe 26 *Harmonischer Oszillator IV – Parität*

Untersuchen Sie das Verhalten der Oszillatoreigenzustände aus der vorherigen Aufgabe bei Raumspiegelung. Dazu empfiehlt es sich dimensionslose Größen zu benutzen, also den Operator  $b^\dagger$  in  $\psi_n = (b^\dagger)^n \psi_0 / \sqrt{n!}$  durch  $\xi$  und  $\partial_\xi$  auszudrücken. Der Operator der Raumspiegelung,  $P\psi(\xi) = \psi(-\xi)$ , heißt Paritätsoperator. Zeigen Sie, dass  $P$  sich darstellen läßt als

- $P\psi(\xi) = \int d\eta K(\xi, \eta) \psi(\eta)$  mit  $K(\xi, \eta) = ?$ ,
- $P = \exp[i\pi b^\dagger b]$  und
- $P = (-i) \exp \left[ i\frac{\pi}{2} (\xi^2 - \partial_\xi^2) \right]$ .

## Aufgabe 27 *Harmonischer Oszillator V – Supersymmetrie*

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H^0 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V^0(x),$$

wobei  $V^0(x)$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt sei, dass für den Grundzustand  $H^0 \psi_0^0 = 0$  gilt.

- Zeigen Sie, dass mit Hilfe der Operatoren  $Q^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mp \frac{d}{dx} + \Phi(x) \right]$ ,  $\Phi(x) = -\frac{d}{dx} \ln(\psi_0^0)$  für  $H^0$  und einen weiteren Operator  $H^1$  folgende Darstellungen möglich sind,

$$H^0 = Q^+ Q^- , \quad H^1 = Q^- Q^+ ,$$

$$\text{mit } H^1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V^1(x), \quad V^1(x) = V^0(x) + \frac{d}{dx} \Phi(x).$$

- Berechnen Sie  $(Q^-)^\dagger$ ,  $[Q^-, Q^+]$ ,  $Q^+ H^1 - H^0 Q^+$ ,  $Q^- H^0 - H^1 Q^-$  und  $Q^- \psi_0^0$ .
- Gegeben sei ein Eigenzustand  $\psi_n^1$  ( $\psi_n^0$ ) von  $H^1$  ( $H^0$ ) mit Eigenwert  $E_n^1$  ( $E_n^0$ ). Zeigen Sie, dass  $Q^+ \psi_n^1$  ( $Q^- \psi_n^0$ ,  $n > 0$ ) Eigenfunktion von  $H^0$  ( $H^1$ ) mit Eigenwert  $E_n^1$  ( $E_n^0$ ) ist, d.h. die Eigenwertspektren beider HamiltonOperatoren auseinander abgeleitet werden können.