Blatt 10 Abgabe: **Mittwoch, 08.01.20** vor der Vorlesung

Aufgabe 20 *Zweite Quantisierung*

In Aufgabe 19 wurden für ein System von N identischen Quantenteilchen die Basiszustände $|\lambda_1, ..., \lambda_N\}$ and $|\lambda_1, ..., \lambda_N\rangle$ eingeführt. Diese Zustände lassen sich auch durch wiederholtes Wirken von Erzeugungsoperatoren auf einen Vakuumzustand $|0\rangle$ darstellen. Es gilt

$$a_\lambda^\dagger|\lambda_1, ..., \lambda_N\} = |\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_N\} \ ,$$
$$a_\lambda^\dagger|\lambda_1, ..., \lambda_N\rangle = \sqrt{n_\lambda + 1}|\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_N\rangle \ ,$$

wobei n_λ die Anzahl der Teilchen angibt, die vor dem Wirken von $a_\lambda^\dagger$ im Einteilchenzustand λ waren. Für Fermionen muß natürlich $n_\lambda = 0$ gelten.

a) Vergewissern Sie sich, ausgehend von der Beziehung $a_\lambda^\dagger|0\rangle = |\lambda\rangle$, dass

$$|\lambda_1, ..., \lambda_N\} = a_{\lambda_1}^\dagger ... a_{\lambda_N}^\dagger|0\rangle$$
$$|\lambda_1, ..., \lambda_N\rangle = \frac{a_{\lambda_1}^\dagger ... a_{\lambda_N}^\dagger}{\sqrt{\prod_\lambda n_\lambda!}}|0\rangle \ .$$

b) Offensichtlich führt $a_\lambda^\dagger$ aus dem ursprünglichen Hilbert Raum $\mathcal{H}_N$ hinaus. Es ist deshalb sinnvoll den Fock Raum $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}_n$ zu definieren und alle Operatoren in $\mathcal{H}$ mit Hilfe des Erzeugungsoperators $a_\lambda^\dagger$ und dessen Adjungiertes $a_\lambda = (a_\lambda^\dagger)^\dagger$ – den Vernichtungsoperatoren – auszudrücken. Zeigen Sie, dass die Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Zustände $|\lambda_1, ..., \lambda_N\}$ erzwingt dass zwei Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren den Vertauschungregeln

$$[a_\lambda^\dagger, a_\mu^\dagger]_{-\xi} = a_\lambda^\dagger a_\mu^\dagger - \xi a_\mu^\dagger a_\lambda^\dagger = 0$$
$$[a_\lambda, a_\mu]_{-\xi} = a_\lambda a_\mu - \xi a_\mu a_\lambda = 0$$

genügen, wobei für Fermionen $\xi = -1$ gilt und für Bosonen $\xi = 1$.

c) Um die Algebra der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu vervollständigen, benötigen Sie noch die Vertauschungsrelation

$$[a_\lambda, a_\mu^\dagger]_{-\xi} = a_\lambda a_\mu^\dagger - \xi a_\mu^\dagger a_\lambda = \delta_{\lambda\mu}$$

Leiten Sie, nur die Beziehung $\langle\lambda| = (a_\lambda^\dagger|0\rangle)^\dagger = \langle 0|a_\lambda$ ausnutzend, die Vertauschungsrelation her.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $a_\lambda|\beta_1, ..., \beta_N\}$ und im Anschluß daran $a_\lambda a_\mu^\dagger|\beta_1, ..., \beta_N\}$ bzw. $a_\mu^\dagger a_\lambda|\beta_1, ..., \beta_N\}$.

d) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{n}_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha$ die Anzahl der Teilchen im Zustand $|\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ mißt, die sich im Einteilchenzustand $|\alpha\rangle$ befinden, d.h. dass

$$\hat{n}_\alpha|\alpha_1, ..., \alpha_N\} = a_\alpha^\dagger a_\alpha|\alpha_1, ..., \alpha_N\} = \sum_{i=1}^N \delta_{\alpha\alpha_i}|\alpha_1, ..., \alpha_N\}$$

und benutzen Sie dieses Resultat um zu zeigen, dass für einen beliebigen Einteilchenoperator gilt

$$U = \sum_{\alpha,\beta} \langle\alpha|U|\beta\rangle a_\alpha^\dagger a_\beta \ .$$

<u>Hinweis:</u> Führen Sie zunächst die Rechnung unter der Annahme durch, dass $\{|\alpha\rangle\}$ eine Eigenbasis des Einteilchenoperators U ist. Überlegen sie sich dann wie für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein Basiswechsel implementiert werden kann und benutzen Sie das Resultat um die Darstellung von U bezüglich einer beliebigen Basis zu finden.

Aufgabe 21 *Exakt geht es nur manchmal*

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Teilchen mit der Masse M deren eindimensionale Dynamik durch den Hamilton Operator

$$H = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 x_2^2 + K(x_1 - x_2)^2$$

beschrieben wird.

a) Finden Sie die exakten Eigenfunktionen und Eigenenergien.

b) Skizzieren Sie für den Grenzfall schwacher Kopplung, d.h. für $K \ll M\omega^2$ das Spektrum und geben Sie die drei niedrigsten Zustände an.

c) Falls die beiden Teilchen spinlos und identisch sind, welche Zustände aus b) sind nicht erlaubt?

d) Was ist der Gesamtspin der Zustände aus b) falls es sich um identische Teilchen mit Spin 1/2 handelt?