Blatt 6 Abgabe: **Mittwoch, 27.11.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 11

Betrachten Sie die Dirac-Gleichung in einer Dimension

$$H\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\,,$$

wobei

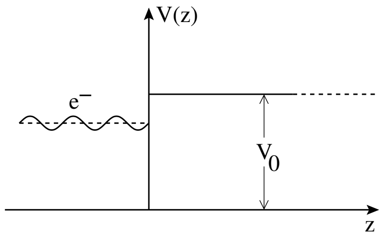
$$\begin{aligned} H &= c\alpha p_z + \beta mc^2 + V(z) = c\alpha(-\mathrm{i}\hbar\partial_z) + \beta mc^2 + V(z)\,, \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und } \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit H vertauscht.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass die eindimensionale Dirac-Gleichung als zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt werden kann.

Aufgabe 12

Diskutieren Sie die Streuung eines Elektrons an einer unendlich ausgedehnten Potentialschwelle vom Standpunkt der Einteilcheninterpretation der DIRAC-Gleichung.



Verwenden sie für das einfallende (transmittierte, reflektierte) Elektron den Ansatz

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ein}} &= A_{\text{ein}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(pz - Et)\right] \\ \Psi_{\text{trans}} &= A_{\text{trans}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\bar{p}z - Et)\right] \\ \Psi_{\text{refl}} &= A_{\text{refl}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(-pz - Et)\right] \quad , \end{aligned}$$

wobei E die Energie, $p = p_z$ den Impuls bezeichne, und m_0 die Ruhemasse des Elektrons. Berechnen Sie insbesondere den Reflexionskoeffizienten $R = \dfrac{A^\dagger_{\text{refl}} A_{\text{refl}}}{A^\dagger_{\text{ein}} A_{\text{ein}}}$, wobei die 3 Fälle $V_0 \gtreqless m_0c^2 + E$ zu unterscheiden sind.

Wie groß ist der Transmissionskoeffizient $T = 1 - R$ für $V_0 \to \infty$? Was ergibt sich für Elektronen, die sich mit 80% Lichtgeschwindigkeit bewegen?

Hinweis: Für die Amplitude der einfallenden Welle ist es möglich, folgende Beziehung zu verwenden.

$$A^\dagger_{\text{ein}} \hat{\alpha}_z A_{\text{ein}} = \left(A^\dagger_{\text{ein}} A_{\text{ein}}\right) \frac{pc}{E} \qquad \text{(Beweis?)}.$$