Blatt 5 Abgabe: **Mittwoch, 20.11.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 9 *Dirac-Gleichung in Foldy–Wouthuysen-Darstellung*

Leiten Sie die in der Vorlesung angegebene Foldy-Wouthuysen-Darstellung der Dirac-Gleichung her, indem Sie die Transformationen

$$\hat{H}' \xrightarrow{\hat{S}'} \hat{H}'' \xrightarrow{\hat{S}''} \hat{H}'''$$

durchführen und die entstehenden Terme explizit berechnen.

Aufgabe 10 *Dirac-Gleichung für das Coulomb-Potential*

In der Vorlesung sind die folgenden Relationen für die Radialanteile aus der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung abgeleitet worden:

$$\left(E - m_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right) G_{LJ}(r) = -\frac{dF_{LJ}}{dr} \mp \left(J + \frac{1}{2}\right) \frac{F_{LJ}}{r} \quad \text{für } J = L \pm 1/2\,,$$
$$\left(E + m_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right) F_{LJ}(r) = -\frac{dG_{LJ}}{dr} \mp \left(J + \frac{1}{2}\right) \frac{G_{LJ}}{r} \quad \text{für } J = L \pm 1/2\,.$$

Nach den Substitutionen mit

$$\alpha_1 = m_0 + E, \quad \alpha_2 = m_0 - E\,, \quad \sigma = \sqrt{m_0^2 - E^2} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2},$$
$$\rho = r\sigma, \quad \kappa = \pm(J + 1/2), \quad \bar{\alpha} = Z\alpha$$

erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho}\right) F - \left(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\bar{\alpha}}{\rho}\right) G = 0\,, \\ \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right) G - \left(\frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\bar{\alpha}}{\rho}\right) F = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Führen Sie mit dem Ansatz

$$F(\rho) = f(\rho) e^{-\rho}\,, \quad G(\rho) = g(\rho) e^{-\rho} \tag{2}$$

folgende Relationen ein:

$$\begin{aligned} f' - f + \frac{\kappa f}{\rho} - \left(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\bar{\alpha}}{\rho}\right) g = 0\,, \\ g' - g - \frac{\kappa g}{\rho} - \left(\frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\bar{\alpha}}{\rho}\right) f = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Zur Lösung der Gln. (3) macht man den Potenzreihenansatz:

$$g = \rho^s(a_0 + a_1\rho + \dots)\,, \quad f = \rho^s(b_0 + b_1\rho + \dots)\,, \tag{4}$$

mit $a_0 \neq 0$ und $b_0 \neq 0$. Setzen Sie Gln. (4) in Gln. (3) ein und zeigen Sie explizit die folgenden Rekursionsrelationen für $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} (s+\nu+\kappa)b_\nu - b_{\nu-1} + \bar{\alpha}a_\nu - \frac{\alpha_2}{\sigma}a_{\nu-1} &= 0\,, \\ (s+\nu-\kappa)a_\nu - a_{\nu-1} - \bar{\alpha}b_\nu - \frac{\alpha_1}{\sigma}b_{\nu-1} &= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

b) Setzen Sie $\nu = 0$ und zeigen Sie unter Ausnutzung von Gln. (5) die Relation $s = \sqrt{\kappa^2 - \bar{\alpha}^2}$.

c) Zeigen Sie die Relation

$$b_\nu\left[\sigma(s+\nu+\kappa) + \alpha_2\bar{\alpha}\right] = a_\nu\left[\alpha_2(s+\nu-\kappa) - \sigma\bar{\alpha}\right]\,. \tag{6}$$

d) Zeigen Sie, dass sich die Reihen $\sum_\nu a_\nu\rho^\nu$ und $\sum_\nu b_\nu\rho^\nu$ für große $\nu \gg 1$ asymptotisch wie $e^{2\rho}$ verhalten. Weil die Lösung der Gln. (2) für große ρ beschränkt ist, müssen die Reihen abbrechen. Wir nehmen an, dass die beiden ersten verschwindenden Koeffizienten $a_{N+1} = b_{N+1} = 0$ seien. Bestimmen Sie die Abbruchbedingung und setzen Sie diese in die Gl. (6) ein. Lösen Sie das Ergebnis nach E auf, bestimmen Sie die zur Hauptquantenzahl N zulässigen (ganzahligen) Werte von κ, und zeigen Sie schließlich die Energieniveaus

$$\begin{aligned} E_{n,J} &= m_0c^2\left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha^2)}}\right)^2\right]^{-1/2} \\ &= m_0c^2\left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - \left(J + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha^2)}}\right)^2\right]^{-1/2}\,. \end{aligned} \tag{7}$$