Blatt 4 Abgabe: **Mittwoch, 13.11.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 7 *Transformationseigenschaften*

Unter einer LORENTZ-Transformation transformieren sich die Koordinaten eines Ereignisses (x^μ) und die DIRAC-Spinoren (ψ) gemäß $x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $\psi'(x') = \hat{S}(\hat{\Lambda})\psi(x)$, mit $\hat{S}\gamma^\nu\hat{S}^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu\gamma^\mu$.

Zeigen Sie:

(a) $\bar{\psi}'(x')\,\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\,\psi(x)$, (Skalar)

(b) $\bar{\psi}'(x')\,\gamma^\mu\,\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\nu\,\psi(x)$, (Vektor)

(c) $\bar{\psi}'(x')\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma\,\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\rho\sigma}\,\psi(x)$, (Tensor)

(d) $\bar{\psi}'(x')\,\gamma^5\,\gamma^\mu\,\psi'(x') = \det(\hat{\Lambda})\,\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^5\gamma^\nu\,\psi(x)$, (Pseudovektor)

(e) $\bar{\psi}'(x')\,\gamma^5\,\psi'(x') = \det(\hat{\Lambda})\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^5\,\psi(x)$, (Pseudoskalar)

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

Aufgabe 8 *Relativistisches Elektron im Magnetfeld*

Betrachten Sie ein Elektron, das sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ und gleichzeitig in einem elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$ befindet (mit $|E| < |B|$). Das Elektron soll keinen Impuls in z-Richtung haben. Zur Beschreibung der Felder führen wir die Potentiale $\mathbf{A} = -yB\mathbf{e}_x$, $\phi = -Ey$ ein.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte des *nicht*-relativistischen Hamilton-Operators

$$H = \frac{1}{2m_0}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi\,.$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte des entsprechenden DIRAC-Hamiltonians. Wie lauten die ersten relativistischen Korrekturen der (nicht-relativistischen) Eigenwerte?

Hinweis: Schreiben Sie die DIRAC-Gleichung $(\not{p} - \frac{e}{c}\not{A} - m_0c)\psi = 0$ mit dem Ansatz $\psi = (\not{p} - \frac{e}{c}\not{A} + m_0c)\chi$, $\chi = \left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ -\varphi\end{smallmatrix}\right)$ um, und zeigen Sie, dass die Gleichung 2. Ordnung für den 2-Spinor Φ lautet:

$$0 = \left[\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t - eV\right)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - m_0^2c^2 + \frac{e\hbar}{c}\left(\mathbf{B} + \mathrm{i}\mathbf{E}\right)\cdot\sigma\right]\varphi$$

Bestimmen Sie dann die Eigenwerte dieser Gleichung.

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Elektronen in x-Richtung für beide Fälle (der relativistische Geschwindigkeitsoperator ist $\hat{\mathbf{v}} = c\hat{\alpha} = c\gamma_0\gamma$.)