Blatt 3 Abgabe: **Mittwoch, 6.11.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 5 *Ableitung von Feldgleichungen mit Hilfe eines Variationsprinzips*

Ein Wirkungsfunktional $\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi, x)$ soll bezüglich des Feldes $\Psi(x)$ variiert werden.

a) Wie lauten die aus der Forderung $\delta\mathcal{S} = 0$ folgenden Euler–Lagrange-Gleichungen?

b) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \frac{m_0^2}{2} \phi^2$$

auf die freie Klein–Gordon-Gleichung für das skalare Feld ϕ führt.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial_\mu} - m_0\right)\psi$ auf die freie Dirac-Gleichung führt. Betrachten Sie dabei $\bar{\psi}$ und ψ als unabhängige Spinor-Felder und führen Sie die Variation nach $\bar{\psi}$ durch.
Notation: $\bar{\psi}\gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial_\mu} \psi = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\, \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi}\, \gamma^\mu \psi\right)$.

Aufgabe 6

$\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ seien beliebige Vektoren. Beweisen Sie die Relation

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}),$$

wobei σ_i, $i = 1, 2, 3$ die Pauli-Matrizen sind. Zeigen Sie dadurch die in der Vorlesung gegebenen Relationen

$$\left[\hat{H}_f, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{p}}\right] = 0 \quad \text{und} \quad \left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{p}}\right] = 0\,.$$