



### Aufgabe 1 Klein-Gordon-Gleichung I

Die Klein-Gordon-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet

$$[i\hbar\partial_t - e\phi(\mathbf{x}, t)]^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \left[(-i\hbar c\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + m^2 c^4\right] \psi(\mathbf{x}, t).$$

- a) Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein freies Teilchen ( $\phi = 0, \mathbf{A} = 0$ ), und bestimmen Sie die Dispersionsrelation  $E(\mathbf{p})$ .
- b) Die Lagrangedichte  $\rho(\mathbf{x}, t)$  für ein freies Teilchen sei durch

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{ie\hbar}{2mc^2} [\psi(\mathbf{x}, t)\partial_t\psi^*(\mathbf{x}, t) - \psi^*(\mathbf{x}, t)\partial_t\psi(\mathbf{x}, t)]$$

definiert. Wie müssen die Lagrangedichte  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld definiert werden, damit die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  erfüllt ist? Warum lässt sich  $\rho(\mathbf{x}, t)$  nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren?

### Aufgabe 2 Klein-Gordon-Gleichung II

Zeigen Sie, dass man im nichtrelativistischen Grenzfall aus der relativistischen Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = 0$$

für freie Spin-0-Teilchen die SCHRÖDINGER-Gleichung erhält. Zerlegen Sie hierfür die Klein-Gordon-Gleichung in zwei Gleichungen erster Ordnung in der Zeitableitung durch Einführung der Linearkombinationen

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\varphi}\right), \quad \chi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\varphi}\right).$$

Definiert man eine (formal) zweikomponentige Wellenfunktion  $\psi = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \chi \end{pmatrix}$ , so erhält man einen Hamiltonian  $H_0: i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_0 \psi$ .

- (a) Ist  $H_0$  hermitesch?
- (b) Wir erwarten, dass gilt:  $\psi \sim e^{-imc^2 t/\hbar}$  mal eine Funktion, die langsam verglichen mit der Frequenz  $mc^2/\hbar$  variiert. Dann ist  $\vartheta \sim 1, \chi \sim 0$  (bis auf Terme  $(v/c)^2$ ). Wie lautet die Gleichung für  $\vartheta$  bis zur Ordnung  $p^4$ ?
- (c) Wir können direkt die Gleichungen für  $\vartheta$  und  $\chi$  entkoppeln mit Hilfe einer Transformation  $\psi' = e^{iS} \psi$  mit  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau(p)$ . Bestimmen Sie  $\tau(p)$ , so dass im transformierten Hamiltonian  $H'_0$  die Zustände positiver und negativer Energien entkoppelt sind.

Erinnerung:

$$H'_0 = e^{iS} H_0 e^{-iS} = H_0 + i[S, H_0] + \dots + \frac{(i)^n}{n!} \underbrace{[S, [S, \dots, [S, H_0]]]}_{n\text{-mal}} + \dots$$