Blatt 4 Abgabe: **Montag, 11.11.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 11

Die Bewegungsgleichung einer Punktladung (Ruhemasse m, Ladung q) im elektromagnetischen Feld ist, wie in der Vorlesung behandelt, durch

$$m \frac{d}{d\tau} u^\alpha = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta \tag{1}$$

gegeben, mit dem Feldstärketensor

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ und $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ elektrisches und magnetisches Feld sind.
Unter einer Lorentz-Transformation gilt für den Feldstärketensor

$$(F')^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \, \Lambda^\beta{}_\delta \, F^{\gamma\delta} \, . \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Transformation von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ für den Fall einer speziellen Lorentz-Transformation entlang der x-Achse.

(b) Ist $\Lambda^\alpha{}_\beta$ eine rein räumliche Transformation, sprich $\Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0$, so transformieren $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Feld unabhängig voneinander, und zwar wie?

(c) Bei einer Spiegelung $x \mapsto -x$ an der yz-Ebene wechselt die x-Komponente von u^α ihr Vorzeichen, genauso wie beim Ortsvektor. Wie müssen sich die Komponenten von $F^{\alpha\beta}$ transformieren, damit weiterhin Gl. (1) gilt? Dieses Verhalten läßt sich freilich auch aus Gl. (2) ablesen, wenn man $\Lambda^\alpha{}_\beta$ für unsere Spiegelung hinschreibt. Folgern Sie, daß das $\mathbf{E}$-Feld ein polarer Vektor ist (behält bei Spiegelung das Vorzeichen bei), und das $\mathbf{B}$-Feld ein axialer Vektor (wechselt das Vorzeichen unter Spiegelung).

Aufgabe 12

Wenn schon nicht die Felder, so sind zumindestens $E^2 - B^2$ und $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ Invarianten unter Lorentz-Transformation. Man bestätigt dies, indem man es entweder explizit im Spezialfall von Aufgabe 10 (a) nachrechnet, oder allgemeiner die Größen $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ und $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$ als Lorentz-Skalare erkennt.
Sie können Ihren ersten Pseudo-Skalar kennen lernen, wenn Sie nur die Zusatzfrage beantworten: Wie verhalten sich die beiden Invarianten unter Spiegelung?

Aufgabe 13

In einem Bezugssystem Σ ist ein skalares Feld durch

$$\phi(x^\alpha) = e^{-(x^1)^2} = e^{-x^2} \ , \qquad (x^\alpha = (x^0, x^1) = (ct, x))$$

gegeben (wir betrachten nur eine Raumrichtung). Die Abbildung $x^\alpha \mapsto \phi(x^\alpha)$ ordnet also jedem Raumzeitpunkt x^α einen Lorentz-Skalar $\phi(x^\alpha)$ zu.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $\partial_\alpha \phi = (\partial\phi/\partial x^0, \partial\phi/\partial x^1)$.

(b) Bestimmen Sie das Feld $\phi(\tilde{x}^\alpha)$ in einem Bezugssystem $\tilde{\Sigma}$, welches sich mit Geschwindigkeit v relativ zu Σ bewegt.

(c) Berechnen Sie die Ableitung $\tilde{\partial}_\alpha \phi = (\partial\phi/\partial\tilde{x}^0, \partial\phi/\partial\tilde{x}^1)$ in $\tilde{\Sigma}$. Überprüfen Sie daran, daß sich $\partial_\alpha\phi$ wie ein kovarianter Vektor transformiert.