

Bachelorarbeit

**VERSCHRÄNKUNGSEIGENSCHAFTEN
NICHT-HERMITESCHER
OPTOMECHANISCHER SYSTEME**

eingereicht von

Felix Paul Jochen Willert

am 30. Juli 2019

an der Universität Greifswald,
Institut für Physik

Erstgutachter/Betreuer: Prof. Dr. Holger Fehske

Zweitgutachter: Prof. Dr. Ralf Schneider

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen	7
2.1	Nicht-Hermitizität und \mathcal{PT} -Symmetrie	7
2.1.1	Traditionelle Beschreibung der Quantenmechanik	7
2.1.2	Nicht-hermitesche Operatoren	8
2.1.3	Die Operatoren \mathcal{P} und \mathcal{T}	8
2.1.4	\mathcal{PT} -Symmetrie	9
2.2	Verschränkung	10
2.3	EPR-Paradoxon	11
2.3.1	Beispiel	11
2.3.2	Die Argumentation von 1935	12
2.4	Verschränkungskriterien	13
2.4.1	Inseparabilitätskriterium	13
2.4.2	EPR-Steering-Kriterium	16
2.5	Optomechanik	17
2.5.1	Optomechanische Kavitäten	17
2.5.2	Hamilton-Operatoren optomechanischer Elemente	18
	Optisches Feld und mechanischer Oszillator	18
	Optomechanische Wechselwirkung	18
	Externes Feld und Wechselwirkungsbild	18
	Kopplung zweier Kavitäten	19
3	Dynamik optomechanischer Systeme und \mathcal{PT}-Symmetrie	21
3.1	Systeme und Bewegungsgleichungen	21
3.1.1	Untersuchte Systeme	21
3.1.2	Bewegungsgleichungen	22
3.2	\mathcal{PT} -Symmetrie-Regime und exceptional points	24
3.3	Lineare Stabilitätsanalyse von stationären Zuständen	25
3.4	Erzeugung von Gewinn und Verlust	28
3.4.1	Mechanischer Gewinn und Verlust	28
3.4.2	Optischer Gewinn und Verlust	30
3.5	Verschränkungsmessungen mit Quadraturen	30
4	Zusammenfassung	33
A	Exceptional points in der komplexen Ebene	I
A.1	Jordan-Normalform und Berechnung von Eigenwerten und -vektoren	I
A.2	Verhalten der Eigenwerte in der Nähe der exceptional points	III

Kapitel 1

Einleitung

In der herkömmlichen Quantenmechanik, wie man sie in den meisten Lehrbüchern und Einführungsvorlesungen findet, muss der Hamilton-Operator H , der die Dynamik des Systems bestimmt, hermitesch sein [1, 2]. Dies verlangt man, damit das Energiespektrum reell ist und die Theorie unitär ist. Dies bedeutet zum Beispiel, dass die Norm zeitlich erhalten bleibt. Durch eine Arbeit von BENDER und BÖTTCHER [3] wurde gezeigt, dass diese rein mathematische Anforderung an den Hamilton-Operator durch die physikalisch motiviertere Bedingung der \mathcal{PT} -Symmetrie ersetzt werden kann. \mathcal{PT} -Symmetrie bedeutet, dass - kurz gesagt - ein System nach räumlicher Spiegelung und Zeitumkehr wieder auf sich selbst abgebildet wird. Durch das Zulassen nicht-hermitescher, aber \mathcal{PT} -symmetrischer Hamilton-Operatoren erhalten wir eine Vielzahl neuer möglicher quantenmechanischer Systeme, in denen gänzlich neue Verhaltensweisen beobachtet werden können. Darüber hinaus zeigen \mathcal{PT} -symmetrische Systeme am sogenannten „exceptional point“ (siehe Abschnitt 3.2) eine sehr hohe Empfindlichkeit bestimmten Parametern gegenüber, weshalb solche Systeme sich für Sensoren gut eignen könnten [4, 5].

Es wird sich herausstellen, dass nicht jeder \mathcal{PT} -symmetrische Hamilton-Operator ein reelles Energiespektrum hat: Es gibt einen Parameterbereich, in dem alle Eigenwerte (EW) reell sind („ungebrochene \mathcal{PT} -Symmetrie“) und einen Bereich, in dem die EW komplex sind („gebrochene \mathcal{PT} -Symmetrie“). Der Übergang zwischen diesen beiden Bereichen wird im Folgenden von besonderem Interesse sein.

Betrachtet man quantenmechanische Zustände von mehr als einem Teilchen (bzw. Quantenobjekt), findet man ein Phänomen, das klassisch nicht erklärt werden kann, nämlich das Phänomen der *Verschränkung* (engl: *entanglement*). Die Verschränkung von Zuständen führt dazu, dass den einzelnen Quantenobjekte ohne Messung keine klar definierten Eigenschaften mehr zugeordnet werden können, selbst wenn das Gesamtsystem diese Eigenschaften hat [6]. Die Eigenschaften können ihnen erst nach einer Messung zugeordnet werden. Verschränkte Zustände sind keine Ausnahme, sondern treten sehr häufig auf. Tatsächlich sind in der Praxis nahezu alle Zustände verschränkt.

Verschränkungen stehen nicht nur mit unserer klassischen Vorstellung von Physik im Widerspruch, sondern auch mit der Relativitätstheorie stehen verschränkte Zustände im Konflikt. Dies wurde zuerst von EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN im berühmten EPR-Paradoxon [7] beschrieben. Untersucht wird hierbei die Auswirkung einer Messung an einem Objekt auf ein räumlich entferntes

anderes Objekt. Das EPR-Paradoxon ist kein rein theoretisches Problem, sondern ist experimentell verifizierbar, was im Abschnitt 2.4 beschrieben wird.

Optomechanische Systeme, in denen optische Felder mit mechanischen Objekten wechselwirken, sind besonders geeignet, um diese Fragestellungen zu diskutieren. Optomechanische Systeme lassen sich experimentell mit einer großen Bandbreite von Parametern bauen, auch Parametern, die zu \mathcal{PT} -Symmetrie führen, wodurch sie gut geeignet sind, um theoretische Vorhersagen zu überprüfen [8–10]. Diese können auch makroskopisch sein, was einem die seltene Möglichkeit eröffnet quantenmechanische Eigenschaften an makroskopischen Objekten zu beobachten [11].

Nachdem wir in Kapitel 2 \mathcal{PT} -Symmetrie, Verschränkung und EPR einführen, sowie die Beschreibung optomechanischer Kavitäten erörtern, wenden wir diese Kenntnisse auf zwei konkrete optomechanische Systeme in Kapitel 3 an. Hierbei untersuchen wir Systeme, wie sie von Tchodimou et al. [9] und Xun et al. [11] beschrieben wurden. Im Anschluss daran, fassen wir die Ergebnisse der Arbeit in Kapitel 4 zusammen und diskutieren die Ergebnisse.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Nicht-Hermitizität und \mathcal{PT} -Symmetrie

2.1.1 Traditionelle Beschreibung der Quantenmechanik

In diesem Abschnitt soll eine kurze Zusammenfassung der traditionellen Beschreibung der Quantenmechanik, wie sie maßgeblich von SCHRÖDINGER [12], HEISENBERG [13] und VON NEUMANN [1] entwickelt wurde, sowie der ihr zugrundeliegenden Axiome erfolgen. Im weiteren Verlauf soll dann erläutert werden, welches Axiom wir ändern können, um eine größere Klasse physikalischer Systeme quantenmechanisch beschreiben zu können, ohne wichtige physikalische Eigenschaften zu verlieren.

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Systems durch den Vektor eines Hilbert-Raumes beschrieben (geschrieben z. B. $|\psi\rangle$). Zu jedem Vektor gehört ein dualer Vektor $\langle\psi|$, der im Wesentlichen der transponierte und komplex konjugierte ursprüngliche Vektor ist. Hiermit lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ formal schreiben als

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \quad (2.1)$$

und wir verlangen als Normierung

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (2.2)$$

Jeder Vektor $|\psi\rangle$ lässt sich nach einer beliebigen Basis $\{|n\rangle\}$ des Hilbert-Raumes entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle; \quad c_n \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Als weiteres mathematisches Objekt werden noch Operatoren (z.B. A) benötigt. Diese bilden einen jeden Vektor des Hilbert-Raumes auf einen anderen ab. Für den zu A adjungierte Operator A^\dagger gilt

$$\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\phi|\psi\rangle, \quad \forall\psi, \phi. \quad (2.4)$$

Operatoren, für die $A = A^\dagger$ gilt, heißen hermitesch. Diese sind wichtig, wenn man Messungen am Zustand beschreiben will. Jeder messbaren physikalischen Größe (*Observable*) kann ein Operator zugeordnet werden. Wird nun am Zustand $|\psi\rangle$ eine Messung der Observablen A durchgeführt, dann besagt ein Axiom der Quantenmechanik, dass $|\psi\rangle$ zu einem Eigenzustand von A wird und das Messergebnis

der dazugehörige Eigenwert ist¹. Da Messergebnisse reell sein müssen, ist es sinnvoll, als weiteres Axiom zu verlangen, dass alle Operatoren, die zu Observablen gehören, hermitesch sein müssen. Hermitesche Operatoren haben notwendigerweise ein reelles EW-Spektrum.

Dies gilt dementsprechend auch für den Hamilton-Operator H , der als EW die Eigenenergien des Systems hat und die Zeitentwicklung des Zustands nach der Schrödinger-Gleichung

$$H|\psi(t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \quad (2.5)$$

bestimmt. Außerdem kann man den Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ definieren durch

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t=0)\rangle. \quad (2.6)$$

Für zeitunabhängige Hamilton-Operatoren ist der Zeitentwicklungsoperator gegeben durch

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (2.7)$$

und ist unitär. Das bedeutet, er erhält die Norm des Zustandes. Dies ist physikalisch bedeutsam, da eine Normänderung einen Gewinn oder Verlust an Materie bzw. Energie bedeuten würde. Mit anderen Worten: Energie und Teilchenzahl sind nicht mehr erhalten [14].

2.1.2 Nicht-hermitesche Operatoren

Lässt man nicht-hermitesche Operatoren als Hamilton-Operator zu, sind einige physikalisch bedeutsame Eigenschaften nicht mehr gesichert: die Energie-EW müssen nicht mehr reell sein, die Zeitentwicklung nicht mehr unitär, womit die Energie- und Normerhaltung verletzt werden kann [15]. Dies kann im Zuge der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion zu negativen Wahrscheinlichkeiten führen, die unphysikalisch sind [16]. Außerdem sind die Eigenvektoren des Hamilton-Operators nicht mehr orthogonal. Dies alles begründet, dass man Bedingungen an den Hamilton-Operator stellen muss, damit er trotz nicht-Hermitizität reale physikalische System beschreibt. Welche Bedingungen das sind, wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

2.1.3 Die Operatoren \mathcal{P} und \mathcal{T}

Um die bereits erwähnte \mathcal{PT} -Symmetrie zu verstehen, müssen wir uns mit dem Paritätsoperator \mathcal{P} und dem Zeitumkehroperator \mathcal{T} beschäftigen und deren Wirkung beschreiben.

Der Paritätsoperator \mathcal{P} beschreibt eine Raumspiegelung am Koordinatenursprung, bildet also die drei Raumkoordinaten folgendermaßen ab: $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Betrachten wir nun ein Teilchen mit Ortsoperator x und Impulsoperator p , sowie die imaginäre Einheit i . Dann hat der Paritätsoperator die Wirkung [16, 17]

$$(i, x, p) \mapsto (i, -x, -p). \quad (2.8)$$

¹Eigenzustände sind Zustände für die $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$ gilt, wobei $a_n \in \mathbb{R}$ der dazugehörige EW ist.

\mathcal{P} ist also linear. Im Formalismus der zweiten Quantisierung und auch im folgenden verwendet man häufig Erzeugungs- (a^\dagger) und Vernichtungsoperatoren (a), die mit dem Orts- und Impulsoperator im Zusammenhang stehen:

$$a^\dagger \propto (-ip + cx) \quad (2.9)$$

$$a \propto (ip + cx), \quad (2.10)$$

wobei c eine reelle Konstante ist. Wendet man \mathcal{P} auf diese an, erhält man

$$\mathcal{P}a^\dagger \propto ip - cx = -(-ip + cx) \propto -a^\dagger \quad (2.11)$$

$$\mathcal{P}a \propto -ip - cx = -(ip + cx) \propto -a. \quad (2.12)$$

Zusammengefasst ergibt das

$$\mathcal{P} : a^\dagger \mapsto -a^\dagger; \quad a \mapsto -a. \quad (2.13)$$

Betrachtet man nun zwei Objekte (x_1, p_1) & (x_2, p_2) bzw. (a_1^\dagger, a_1) & (a_2^\dagger, a_2) spiegelt \mathcal{P} nicht nur die räumlichen Koordinaten, sondern vertauscht auch die beiden Objekte und ihre Wirkung [18]. Dies bedeutet für Ort und Impuls

$$\mathcal{P} : x_1 \leftrightarrow -x_2; \quad p_1 \leftrightarrow -p_2 \quad (2.14)$$

und, nach analoger Rechnung zu oben,

$$\mathcal{P} : a_1^\dagger \leftrightarrow -a_2^\dagger; \quad a_1 \leftrightarrow -a_2. \quad (2.15)$$

Der Zeitumkehroperator \mathcal{T} tauscht das Vorzeichen der Zeit t und zusätzlich noch das Vorzeichen der imaginären Einheit i . Dies geschieht, damit die kanonische Vertauschungsrelation $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ erhalten bleibt. Somit wirkt \mathcal{T} wie folgt:

$$\mathcal{T} : (i, x, p) \mapsto (-i, x, -p). \quad (2.16)$$

\mathcal{T} ist also sesquilinear. Nach analogen Rechnungen wie beim Paritätsoperator erhalten wir für ein System aus zwei Objekten die Beziehungen

$$\mathcal{T} : i \mapsto -i; \quad x_1 \mapsto x_1; \quad x_2 \mapsto x_2; \quad p_1 \mapsto -p_1; \quad p_2 \mapsto -p_2 \quad (2.17)$$

$$\text{bzw. } i \mapsto -i; \quad a_1^\dagger \mapsto a_1^\dagger; \quad a_2^\dagger \mapsto a_2^\dagger; \quad a_1 \mapsto a_1; \quad a_2 \mapsto a_2. \quad (2.18)$$

2.1.4 \mathcal{PT} -Symmetrie

Um zu verstehen, was \mathcal{PT} -Symmetrie physikalisch bedeutet, lohnt es sich, ein einfaches, klassisches Beispiel zu betrachten: Wie in Abb. 2.1.4 dargestellt, wird ein wärmeleitfähiger Stab an der linken Seite erhitzt und an der rechten Seite gekühlt. Links fließt also Energie in das System hinein und recht wieder heraus. Wenden wir nun \mathcal{P} an, werden Erhitzung und Abkühlung vertauscht, die Energie fließt also von rechts nach links. Wenden wir anschließend \mathcal{T} an, läuft der Fluss rückwärts ab, also wieder von links nach rechts wie im ursprünglichen System. Der Energiefluss wird also durch Anwendung von \mathcal{PT} auf sich selbst abgebildet. Der Stab bzw. der Energiefluss ist demnach \mathcal{PT} -symmetrisch, obgleich die Umgebung es nicht ist: Es sieht so aus, als würde durch Abkühlen Energie ins System gelangen und durch Erhitzen dem System entzogen, was natürlich unphysikalisch ist.



Abbildung 2.1: Ein einfaches Beispiel für ein klassisches \mathcal{PT} -symmetrisches System: Ein wärmeleitender Stab, der an einem Ende erhitzt und am anderen Ende gekühlt wird. Abbildung entnommen aus [15].

Damit dies wirklich symmetrisch ist, muss genau die Energie, die hinein fließt, auch wieder heraus fließen. Dies sorgt, bei ausreichender Wärmeleitfähigkeit des Stabes, dafür, dass ein stabiler Zustand erreicht wird und die Gesamtenergie im Stab konstant bleibt.

Mathematisch betrachtet ist ein quantenmechanisches System \mathcal{PT} -symmetrisch, wenn der Operator \mathcal{PT} mit dem Hamilton-Operator vertauscht: $[H, \mathcal{PT}] = 0$.² Obwohl dies gilt, bedeutet das nicht, dass die beiden Operatoren ein gemeinsames System von Eigenvektoren (EV) besitzen. Dies gilt lediglich für lineare Operatoren, \mathcal{T} und damit \mathcal{PT} ist allerdings sesquilinear. Dies bedeutet, dass H und \mathcal{PT} gemeinsame EV nur dann besitzen, wenn H reelle EW hat, was allerdings nicht immer der Fall ist. Der Bereich, wo H reelle EW hat, wird „ungebrochenes \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime“ (engl.: \mathcal{PT} -*unbroken*) genannt. Hier haben H und \mathcal{PT} ein gemeinsames System von EV und die Zeitentwicklung der Zustände ist unitär. Der Bereich, wo H komplexe EW hat, wird „gebrochenes \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime“ (engl.: \mathcal{PT} -*broken*) genannt. Dort haben H und \mathcal{PT} unterschiedliche EV und die Zustände durchlaufen zeitlich ein exponentielles Anwachsen oder Abklingen. Ein Beispiel für \mathcal{PT} -symmetrische Hamilton-Operatoren ist der Operator aus Abschnitt 3.2.

2.2 Verschränkung

Der Zustandsraum eines Zwei-Teilchen-Systems kann als (direktes) Tensor-Produkt zweier Unterräume (1 und 2), die je einem Teilchen zugeordnet werden, mit ihrer jeweiligen Basis ($\{|m\rangle_1\}$ bzw. $\{|n\rangle_2\}$) aufgefasst werden. Ein Zustand schreibt sich dann als

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |m\rangle_1 |n\rangle_2, \quad (2.19)$$

wobei c_{mn} ein Matrixelement ist, das im Allgemeinen nur durch Messung an beiden Systemen bestimmt werden kann. Dies bedeutet, dass nur die Eigenschaften des Gesamtsystems bestimmt sind, nicht aber die Eigenschaften von Teilchen 1 oder Teilchen 2 [6], oder wie SCHRÖDINGER schrieb: „Maximale Kenntnis von einem Gesamtsystem schließt nicht notwendig maximale Kenntnis aller

²Man schreibt dann auch - in Anlehnung an $H = H^\dagger$ für hermitesche Operatoren - $H = H^{\mathcal{PT}}$



Abbildung 2.2: Durch einen Zerfallsprozess entstehen zwei Teilchen (1 & 2), die sich voneinander entfernen.

seiner Teile ein" [19]. Wenn jedes Teilchen einen klar definierten Zustand besitzen soll, müssen wir verlangen, den Zustand folgendermaßen schreiben zu können:

$$|\psi\rangle = \sum_m a_m |m\rangle_1 \sum_n b_n |n\rangle_2. \quad (2.20)$$

Ein Vergleich von (2.19) mit (2.20) liefert die Bedingung

$$c_{mn} = a_m \cdot b_n, \quad (2.21)$$

die Matrix faktorisiert also. Man spricht auch von einem separablen Zustand. Jeder nicht separable Zustand heißt *verschränkt*.

Welche Folgen Verschränkung hat, lässt sich gut am Beispiel des aus der Atomphysik bekannten Singulett-Zustandes erkennen. Der Singulett-Zustand wird von zwei Elektronen (1 und 2) mit Spin $\frac{1}{2}$ gebildet, die jeweils die Eigenzustände *up* ($|\uparrow\rangle$) oder *down* ($|\downarrow\rangle$) besitzen, und sieht folgendermaßen aus:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}. \quad (2.22)$$

Der Zustand faktorisiert offensichtlich nicht, ist also verschränkt. Stellen wir uns nun vor, wir führen eine Spin-Messung an Elektron 1 durch und erhalten das Ergebnis *up*, automatisch wissen wir dann, dass Elektron 2 im Zustand *down* sein muss, auch ohne eine Messung an ihm durchzuführen. Eine Änderung am System 1, etwa durch Messung, führt immer auch zu einer Änderung von System 2 und vice versa.

2.3 EPR-Paradoxon

2.3.1 Beispiel

Im Beispiel im letzten Abschnitt haben wir keine Aussage darüber getroffen, wo die beiden Elektronen sich aufhalten. Betrachten wir nun den Fall, dass die beiden Elektronen durch den Zerfall eines Atoms im Singulett-Zustand entstanden sind und sich aufgrund der Impulserhaltung voneinander entfernen (siehe Abb. 2.2). Führen wir nun wieder eine Messung am Elektron 1 durch, beeinflussen wir **sofort** den Zustand des Elektrons 2, egal wie weit sich die beiden Elektronen voneinander entfernt haben. Wir haben also die Beeinflussung zweier raumartiger Ereignisse (Projektion auf Eigenzustand von Elektron 1 und Projektion auf Eigenzustand von Elektron 2), was nach der speziellen Relativitätstheorie verboten ist.³

³Man könnte glauben, dass durch Messung an verschränkten Zuständen überlichtschnelle Kommunikation möglich ist. Dies verbietet jedoch das No-Cloning- [20] und das No-Communication-Theorem [21].

Man könnte annehmen, dass der Zustand der beiden Elektronen bereits beim Zerfall festgelegt wird und nicht erst bei der Messung. Dass dem nicht so ist, kann man sich klar machen, indem man ein leicht abgeändertes Experiment betrachtet. Nun entstehen aus einem Zerfall nicht mehr Spin-verschränkte Elektronen, sondern Polarisations-verschränkte Photonen, die zum gleichen Zeitpunkt auf Polarisationsfilter mit gleicher Orientierung α treffen. Würde die Polarisation der Photonen bereits beim Zerfall bestimmt sein, würde der Polarisationsfilter je eine neue Messung darstellen und die Photonen würden unabhängig voneinander absorbiert werden oder durchfliegen (mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \alpha$). In der Realität wird allerdings nie beobachtet, dass ein Photon absorbiert wird und das andere nicht; stets passieren beide oder beide werden absorbiert. Dies bedeutet, dass erst im Moment der Messung durch die Filter der Zustand beider Photonen gemeinsam bestimmt wird.

2.3.2 Die Argumentation von 1935

Anmerkung zur Notation: Im folgenden Abschnitt ist es wichtig, zwischen dem Operator einer Observablen, an dem Messungen durchgeführt werden, und den dazugehörigen Messergebnissen streng zu unterscheiden. Daher werden - anders als im Rest des Textes - hier Operatoren mit einem „ $\hat{}$ “ gekennzeichnet.

Dieses paradoxe Verhalten wurde zuerst von ALBERT EINSTEIN, BORIS PODOLSKY und NATHAN ROSEN, kurz: EPR, im Jahr 1935 [7] beschrieben. Hierfür forderten sie drei⁴ Bedingungen [6] für eine akzeptable physikalische Theorie:

Realität: Wenn wir den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit (also Wahrscheinlichkeit 1) vorhersagen können, ohne das System zu stören, dann existiert ein Element der (physikalischen) Realität, das zur physikalischen Größe korrespondiert. Oder anders ausgedrückt: Eine Eigenschaft, die ein System unabhängig von einer Messung besitzt, ist Element der physikalischen Realität.

Lokalität: Die Annahme der Lokalität verbietet es einem System, ein raumartig getrenntes System zu beeinflussen. Es soll also keine überlichtschnellen Fernwirkungen geben.⁵

Vollständigkeit: Damit eine Theorie vollständig sein kann, muss es zu jedem Element der physikalischen Realität ein Gegenstück in der Theorie geben. Auf die Quantenmechanik bezogen bedeutet dies, dass es keine anderen Variablen außer dem Zustand des Systems gibt, die die Messergebnisse bestimmen.

Dass diese drei Bedingungen nicht gleichzeitig von der Theorie der Quantenmechanik erfüllt sein können, demonstrierten EPR am Beispiel zweier sich entfernender, verschränkter Teilchen (wie in Abb. 2.2) mit jeweils den nicht kommutierenden

⁴Die Bedingung der Lokalität wird nicht explizit aufgeführt, aber implizit verwendet.

⁵EINSTEIN nannte dies „spukhafte Fernwirkung“ [22].

Observablen \hat{x} und \hat{p} . Der gemeinsame Zustand wird beschrieben durch die Wellenfunktion in Ortsdarstellung

$$\psi(x_1, x_2) = \int e^{ip(x_1 - x_2 - x_0)} dp \quad (2.23)$$

mit einem reellen Parameter x_0 , der die räumliche Trennung der beiden Systeme impliziert.

Messen wir nun den Ort am System 2 durch \hat{x}_2 mit Ergebnis x_2 , dann können wir das Ergebnis der Messung \hat{x}_1 am System 1 sicher (aufgrund der Verschränkung) und ohne Störung des Systems (aufgrund der räumlichen Trennung und der Lokalität) vorhersagen zu $x_1 = x_2 + x_0$. Somit existiert ein Element der physikalischen Realität, μ_1^x , das die Werte $\{x_2\}$ annehmen kann, das das Ergebnis der Messung \hat{x}_1 mit Sicherheit vorhersagt. Die Fähigkeit von System 2, das System 1 zu beeinflussen, wird auch als *EPR-steering* bezeichnet.⁶

Darüber hinaus können wir die Messung \hat{p}_2 mit Resultat p_2 durchführen und erhalten nach analoger Argumentation ein Element der physikalischen Realität von System 1 (μ_1^p), das das Ergebnis der Messung \hat{p}_1 mit Sicherheit und ohne Störung des Systems 1 zu $p_1 = -p_2$ voraussagt.

Wir erhalten also zwei Elemente der physikalischen Realität von 1, die die Messergebnisse x_1 und p_1 mit Sicherheit bestimmen [23]. Dies ist allerdings im offensichtlichen Widerspruch zur Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}. \quad (2.24)$$

Aus diesem Widerspruch folgerten EPR, dass, wenn man die Annahmen der Lokalität und der Realität (lokaler Realismus) voraussetzt, die Quantenmechanik nicht vollständig sein kann; es also weitere, sogenannte versteckte Variablen geben muss, die die Ergebnisse einer quantenmechanischen Messung bestimmen und das System beschreiben. Dass derartige lokale versteckte Variablen nicht existieren, wurde allerdings im Jahr 1965 von BELL mit seiner berühmten Bellschen Ungleichung gezeigt [24].

Die gesamte Argumentation funktioniert aufgrund der Symmetrie der Wellenfunktion natürlich auch andersherum, d. h. es ist möglich, durch Messungen am System 1 die physikalische Realität von System 2 festzulegen. Es gibt allerdings auch Zustände, in denen EPR-steering nur in eine Richtung möglich ist [25].

2.4 Verschränkungskriterien

2.4.1 Inseparabilitätskriterium

Um Verschränkung nicht nur als mathematische Eigenschaft des Zustandsvektors zu betrachten, wollen wir Verschränkungen auch durch Messungen nachweisen. Dies gelingt mittels eines Kriteriums, das für die Varianz bestimmter Operatoren eine Grenze für separable Zustände festlegt [26]. Dieses Inseparabilitätskriterium soll nun vorgestellt werden.

⁶Wir sehen, dass EPR-steering nur auftreten kann, wenn Verschränkung vorliegt. Man kann EPR-steering daher als Spezialfall von Verschränkung betrachten.

Wir betrachten einen separablen Zustand der Form

$$|\psi\rangle = \sum_i w^i |\varphi_1^i\rangle \otimes |\varphi_2^i\rangle \quad (2.25)$$

mit $w^i \in \mathbb{R}$ und $\sum_i w^i = 1$. Motiviert durch Abschnitt 2.3 betrachten wir die beiden Operatoren

$$\begin{aligned} u &= |a|x_1 + \frac{1}{a}x_2 \\ v &= |a|p_1 - \frac{1}{a}p_2; \end{aligned} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.26)$$

und betrachten deren Gesamtvarianz unter Ausnutzung der, für separable Zustände möglichen, Zerlegung (2.25). Hierbei bedeutet $\langle \dots \rangle_i$ den Mittelwert über den Zustand $|\varphi_1^i\rangle \otimes |\varphi_2^i\rangle$ und $\langle \dots \rangle$ die Mittelwertbildung über den Gesamtzustand $|\psi\rangle$; die Varianz einer Größe Q ist definiert durch

$$\Delta^2 Q = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2. \quad (2.27)$$

Damit können wir nun direkt die Summe der Varianzen der beiden Operatoren aus (2.26) gemittelt über den gesamten Zustand berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 u \rangle + \langle \Delta^2 v \rangle &= \sum_i w^i (\langle u^2 \rangle_i + \langle v^2 \rangle_i) - \langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 \\ &= \sum_i w^i \left(a^2 \langle x_1^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle x_2^2 \rangle_i + a^2 \langle p_1^2 \rangle_i \frac{1}{a^2} \langle p_2^2 \rangle_i \right) \\ &\quad + 2 \frac{|a|}{a} \left(\sum_i w^i \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_i - \sum_i w^i \langle p_1 \rangle_i \langle p_2 \rangle_i \right) \\ &\quad - \langle u \rangle^2 - \langle v \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nun wollen wir die Varianzen der Orts- und Impulsoperatoren (für die wir Kommutator und Unschärferelationen kennen) in die Gleichung mittels (2.27) integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta^2 u \rangle + \langle \Delta^2 v \rangle &= \sum_i w^i \left(a^2 \left[\langle \Delta^2 x_1 \rangle_i + \langle x_1 \rangle_i^2 \right] + \frac{1}{a^2} \left[\langle \Delta^2 x_2 \rangle_i + \langle x_2 \rangle_i^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + a^2 \left[\langle \Delta^2 p_1 \rangle_i + \langle p_1 \rangle_i^2 \right] + \frac{1}{a^2} \left[\langle \Delta^2 p_2 \rangle_i + \langle p_2 \rangle_i^2 \right] \right) \\
 &\quad + 2 \frac{|a|}{a} \left(\sum_i w^i \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_i - \sum_i w^i \langle p_1 \rangle_i \langle p_2 \rangle_i \right) \\
 &\quad - \langle u \rangle^2 - \langle v \rangle^2 \\
 &= \sum_i w^i \left(a^2 \langle \Delta^2 x_1 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \Delta^2 x_2 \rangle_i + a^2 \langle \Delta^2 p_1 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \Delta^2 p_2 \rangle_i \right) \\
 &\quad + \sum_i w^i \underbrace{\left(a^2 \langle x_1 \rangle_i \frac{1}{a^2} \langle x_2 \rangle_i^2 + a^2 + 2 \frac{|a|}{a} \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_i \right)}_{\langle u \rangle_i^2} \\
 &\quad + \sum_i w^i \underbrace{\left(a^2 \langle p_1 \rangle_i \frac{1}{a^2} \langle p_2 \rangle_i^2 + a^2 - 2 \frac{|a|}{a} \langle p_1 \rangle_i \langle p_2 \rangle_i \right)}_{\langle v \rangle_i^2} \\
 &\quad - \underbrace{\langle u \rangle^2}_{\left(\sum_i w^i \langle u_i \rangle \right)^2} - \underbrace{\langle v \rangle^2}_{\left(\sum_i w^i \langle v_i \rangle \right)^2} \\
 &= \sum_i w^i \left(a^2 \langle \Delta^2 x_1 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \Delta^2 x_2 \rangle_i + a^2 \langle \Delta^2 p_1 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \Delta^2 p_2 \rangle_i \right) \\
 &\quad + \sum_i w^i \langle u \rangle^2 - \left(\sum_i w^i \langle u_i \rangle \right)^2 + \sum_i w^i \langle v \rangle^2 - \left(\sum_i w^i \langle v_i \rangle \right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Wenden wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die letzte Zeile von (2.29) an, sehen wir, dass diese stets größer ist als null. Die vorletzte Zeile ist aufgrund von $\sum_i w^i$ und der Unschärferelation $\Delta^2 x_j + \Delta^2 p_k \geq |[x_j, p_k]|$ von unten durch $a^2 + \frac{1}{a^2}$ beschränkt. Daher gilt für separable Zustände notwendigerweise

$$\langle \Delta^2 u \rangle + \langle \Delta^2 v \rangle \geq \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) |[x_j, p_k]| \tag{2.30}$$

und daraus folgend im Umkehrschluss die *hinreichende* Bedingung für **Verschränkung**:

$$\boxed{\langle \Delta^2 u \rangle + \langle \Delta^2 v \rangle < \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) |[x_j, p_k]|} \tag{2.31}$$

mit Operatoren wie in (2.26) definiert.

2.4.2 EPR-Steering-Kriterium

Notation wie in 2.3.2.

In der Praxis ist es nicht möglich, einen Zustand mit solch perfekten Korrelationen wie in (2.23) zu erzeugen, deshalb ist es notwendig, eine probabilistische Erweiterung des EPR-Arguments vorzunehmen, um EPR-steering experimentell nachzuweisen.

Hierzu betrachten wir ein System mit zwei lokalisierten, getrennten Subsystemen (1 und 2), in denen jeweils Messungen an den nicht-kommutierenden Operatoren \hat{x} und \hat{p} durchgeführt werden können. Wir versuchen nun aufgrund einer Messung \hat{x}_2 in System 2 mit Ergebnis x_2 das Ergebnis der Messung \hat{x}_1 in System 1 zu schätzen. Diese Vorhersage (engl.: *inference*) wird beschrieben durch $x_1^{\text{inf}}(x_2)$. Betrachten wir nun den mittleren Fehler (root mean square) dieser Vorhersage :

$$\Delta_{\text{inf}x_1}^2 = \int dx_1 \int dx_2 P(x_1, x_2) \left(x_1 - x_1^{\text{inf}}(x_2) \right)^2 \quad (2.32)$$

mit der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x_1, x_2)$ für die Messergebnisse x_1 und x_2 . Um diesen Fehler zu minimieren, betrachten wir die Abweichung für ein festes Ergebnis x_2 und die dazugehörige bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x_1|x_2)$:

$$\Delta_{\text{inf}}^2(x_1|x_2) = \int dx_1 P(x_1|x_2) \left(x_1 - x_1^{\text{inf}}(x_2) \right)^2. \quad (2.33)$$

Wir erkennen, dass dieser Fehler minimal wird, wenn er genau der Varianz $\Delta^2(x_1|x_2)$ von $P(x_1|x_2)$ entspricht, also gilt

$$x_1^{\text{inf}}(x_2) = \langle x_1|x_2 \rangle. \quad (2.34)$$

Damit kennen wir nun den minimalen Fehler der Vorhersage und definieren

$$\Delta_{\text{inf}x_1|_{\text{min}}}^2 = \int dx_2 P(x_2) \Delta^2(x_1|x_2) =: V_{1|2}^x \quad (2.35)$$

und analog den minimalen Fehler der Vorhersage für p_1

$$\Delta_{\text{inf}p_1|_{\text{min}}}^2 = \int dp_2 P(p_2) \Delta^2(p_1|p_2) =: V_{1|2}^p. \quad (2.36)$$

Um der Argumentation von EPR aus 2.3.2 weiter zu folgen, brauchen wir eine Erweiterung der Definition der *physikalischen Realität*: Es existiert zwar weiterhin ein Element der physikalischen Realität μ_1^x im System 1, dessen Wert festgelegt wird durch Messung an \hat{x}_2 ; hiermit wird allerdings kein Ergebnis einer Messung *mit Sicherheit* bestimmt, sondern lediglich eine *Wahrscheinlichkeitsaussage* getroffen.

Sicher vorhergesagt wird lediglich die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x_1|x_2)$. Diese lässt sich aber nicht mit einer einzelnen Messung bestimmen, stattdessen werden - in der Theorie - unendlich viele Messungen benötigt, wodurch das System natürlich gestört wird. Wir müssen also wiederholte Messungen in den Systemen 1 und 2 zulassen.

Damit können wir die Argumentation von EPR aus 2.3.2 fortsetzen: Wir erhalten also durch Messung an 2 zwei Elemente der physikalischen Realität μ_1^x und μ_1^p , deren angenommene Werte den Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(\mu_1^x)$ und $P(\mu_1^p)$ gehorchen. Diese Werte bestimmen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(x_1|\mu_1^x)$ und $P(p_1|\mu_1^p)$ mit den jeweiligen Varianzen $\Delta^2(x_1|\mu_1^x)$ und $\Delta^2(p_1|\mu_1^p)$.

Da dieses System (der physikalischen Realität) durch die Quantentheorie beschrieben werden soll, haben diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen die gleichen Eigenschaften wie die quantenmechanischen Verteilungen (Annahme der Vollständigkeit der Quantentheorie). Dies gilt z. B. auch für die Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \implies \Delta(x_1|\mu_1^x) \Delta(p_1|\mu_1^p) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.37)$$

Die messbaren Vorhersage-Varianzen sind demnach

$$V_{1|2}^x = \int d\mu_1^x P(\mu_1^x) \Delta^2(x_1|\mu_1^x) \quad (2.38)$$

$$\text{und } V_{1|2}^p = \int d\mu_1^p P(\mu_1^p) \Delta^2(p_1|\mu_1^p). \quad (2.39)$$

Daraus folgt mit (2.37), (2.35) und (2.36)

$$\Delta_{\text{inf}} x_1 \Delta_{\text{inf}} p_1 \geq V_{1|2}^x V_{1|2}^p \quad (2.40)$$

$$= \langle \Delta^2(x_1|\mu_a^x) \rangle \langle \Delta^2(p_1|\mu_a^p) \rangle \quad (2.41)$$

$$\underset{\text{CS-Ungl.}}{\geq} |\langle \Delta(x_1|\mu_a^x) \rangle \langle \Delta(p_1|\mu_a^p) \rangle|^2 \underset{\text{HUR}}{\geq} \frac{1}{2}. \quad (2.42)$$

Dementsprechend wird ein EPR-Paradoxon, also eine Unverträglichkeit der lokalen Realität mit der Vollständigkeit der Quantentheorie („2 steert 1“), beobachtet, wenn

$$\boxed{\Delta_{\text{inf}} x_1 \Delta_{\text{inf}} p_1 < \frac{1}{2}}. \quad (2.43)$$

Die Umkehrung gilt nicht! Auch hier gilt wieder, wie beim ursprünglichen EPR-Paradoxon, dass man durch Vertauschen der Systeme ein weiteres Kriterium für ein Paradoxon erhält, die nicht beide gleichzeitig erfüllt sein müssen.

2.5 Optomechanik

2.5.1 Optomechanische Kavitäten

Optomechanische Kavitäten bestehen aus mechanischen Elementen (Oszillatoren) und optischen Feldern (Photonen), die miteinander wechselwirken. Solche Aufbauten sind physikalisch auf verschiedene Weise realisierbar. Um die grundlegende Physik solcher Kavitäten zu verstehen, genügt es, ein einfaches Beispiel zu betrachten: Fabry-Perot-Interferometer mit beweglichen Spiegeln bestehen aus zwei parallelen (hochreflektierenden) Spiegeln. Ein optisches Feld, das zwischen den Spiegeln eingefangen wird, zeigt Resonanzen bei bestimmten Frequenzen in Abhängigkeit von der Resonanzlänge, also dem Abstand der Spiegel.

Machen wir nun einen der beiden Spiegel beweglich, sodass er oszillieren kann, ändert sich die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Spiegelposition. Das optische Feld wiederum übt einen Strahlungsdruck auf den Spiegel aus und treibt den Spiegel somit an. Dies wird als optomechanische Wechselwirkung bezeichnet (siehe Abschnitt 2.5.2) [27].

2.5.2 Hamilton-Operatoren optomechanischer Elemente

Optisches Feld und mechanischer Oszillator

Zunächst betrachten wir ein optisches Feld in einer Kavität und einen mechanischen (harmonischen) Oszillator ohne Wechselwirkung. Konzentriert man sich auf eine Resonanzfrequenz, lässt sich das optische Feld in der 2. Quantisierung mittels Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Heisenberg-Bild genauso beschreiben wie der mechanische Oszillator.

Das optische Feld habe die Resonanzfrequenz ω_c und wird beschrieben durch den Erzeugungsoperator a^\dagger und den Vernichtungsoperator a . Der mechanische Oszillator habe die Resonanzfrequenz ω_m , sowie die Operatoren b^\dagger und b . Dann ist der Hamilton-Operator

$$\boxed{H_0 = \omega_c a^\dagger a + \omega_m b^\dagger b.} \quad (2.44)$$

Optomechanische Wechselwirkung

Wie bereits gesagt, ändert sich die Resonanzfrequenz der Kavität mit der Länge der Kavität. Fassen wir nun also die Resonanzfrequenz als Funktion des Ortes x des beweglichen Spiegels auf und entwickeln diese bis zur linearen Ordnung, erhalten wir

$$\omega(x) = \omega_c + \frac{\partial \omega}{\partial x} x + \dots \quad (2.45)$$

und definieren nun $G = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$. Setzen wir (2.45) nun in (2.44) für ω_c ein, sehen wir, dass wir den Teil des Hamilton-Operators, der die optomechanische Wechselwirkung beschreibt, mit

$$H_{\text{om}} = -Gx(a^\dagger a) \quad (2.46)$$

identifizieren können [28]. Beachten wir nun noch, dass der Ortsoperator aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperator gebildet werden kann nach

$$x \propto (b^\dagger + b), \quad (2.47)$$

erhalten wir den (linearsierten) optomechanischen Hamilton-Operator aus (2.46) und (2.47) zu

$$\boxed{H_{\text{om}} = -g(b^\dagger + b)a^\dagger a,} \quad (2.48)$$

wobei die *optomechanische Kopplungsstärke* g durch den experimentellen Aufbau bestimmt wird [27].

Externes Feld und Wechselwirkungsbild

Häufig ist es von Interesse, die Wechselwirkung mit einem externen elektromagnetischen Feld zu betrachten, zum Beispiel mit dem eines Lasers mit Frequenz ω_L . Der Wechselwirkungs-Hamilton-Operator ist dann [8]

$$H_{\text{field}} = i\sqrt{\gamma}E(t) \left(e^{-i\omega_L t} a^\dagger - e^{i\omega_L t} a \right), \quad (2.49)$$

wobei $E(t)$ die zeitabhängige Amplitude des elektrischen Feldes und γ die Verlustrate der Kavität ist.

Es ist sinnvoll und üblich nun in ein Wechselwirkungs-Bild zu wechseln, das mit ω_L rotiert. Die Operatoren transformieren sich dann nach

$$\begin{aligned} a &\rightarrow e^{-i\omega_L t} a \\ a^\dagger &\rightarrow e^{i\omega_L t} a^\dagger. \end{aligned}$$

Dies entspricht einer unitären Transformation mit $\mathcal{U} = \exp(i\omega_L a^\dagger a t)$, die den bisherigen Hamilton-Operator H_{old} wie folgt transformiert:

$$H = \mathcal{U} H_{\text{old}} \mathcal{U}^\dagger - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (2.50)$$

Dies führt zu einem dazu, dass (2.49) sich nun schreibt als [29]

$$\boxed{H_{\text{field}} = i\sqrt{\gamma} E(t)(a^\dagger - a)} \quad (2.51)$$

zum anderen, dass in (2.44) $\omega_c \rightarrow -\Delta$ transformiert werden muss, mit $\Delta = \omega_L - \omega_c$. Außerdem ändert sich der Zahlenwert von g , was aber hier nicht weiter von Interesse ist.

Kopplung zweier Kavitäten

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten, optomechanische Kavitäten miteinander zu koppeln: Die mechanischen Oszillatoren können miteinander gekoppelt werden oder die optischen Felder koppeln unter Ausnutzung des Tunneleffekts. Da wir beide Varianten nur getrennt voneinander betrachten werden, können wir für beide den gleichen Parameter J als Kopplungsstärke definieren. Für zwei Kavitäten mit Operatoren a_1, \dots bzw. a_2, \dots ist der Hamilton-Operator dann gegeben als [28]

$$\boxed{H_{\text{cuop}} = J(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{H_{\text{coup}} = J(b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1)}. \quad (2.52)$$

Kapitel 3

Dynamik optomechanischer Systeme und \mathcal{PT} -Symmetrie

3.1 Systeme und Bewegungsgleichungen

3.1.1 Untersuchte Systeme

Untersucht werden im weiteren Verlauf der Arbeit zwei konkrete optomechanische Systeme - eins optisch gekoppelt, das andere mechanisch gekoppelt.

System A (siehe Abb. 3.1) besteht aus zwei Kavitäten, die optisch miteinander gekoppelt sind. Die linke Kavität hat einen *Verlust* mit Verlustrate γ , während die rechte Kavität einen *Gewinn* mit der Rate κ hat, also Energie ins System aufnimmt. In beiden Kavitäten ist zusätzlich noch eine mechanische Mode eingekoppelt, die gedämpft wird mit γ_m . Die weiteren Parameter und Operatoren wurden bereits erklärt und können der Abbildung entnommen werden.

Der Hamilton-Operator dieses Systems ist

$$H_A = -\Delta(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \omega_m(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) - g(b_1^\dagger + b_1)a_1^\dagger a_1 - g(b_2^\dagger + b_2)a_2^\dagger a_2 + J(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1). \quad (3.1)$$

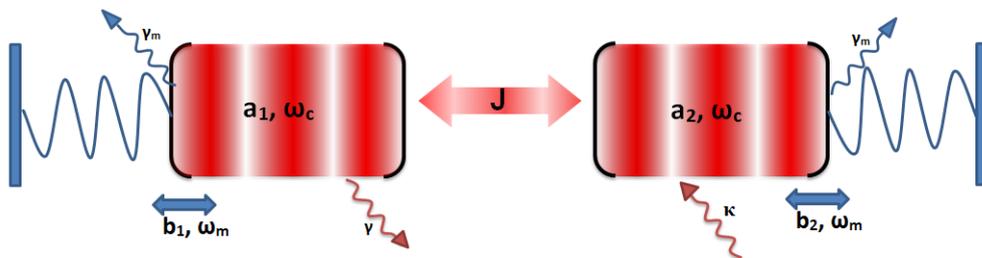


Abbildung 3.1: Das System A, bestehend aus zwei Kavitäten, eine mit Gewinn, eine mit Verlust. In beiden Kavitäten ist noch je eine mechanische Mode mit eingekoppelt, ebenfalls mit Verlust. Die optischen Felder sind miteinander gekoppelt.

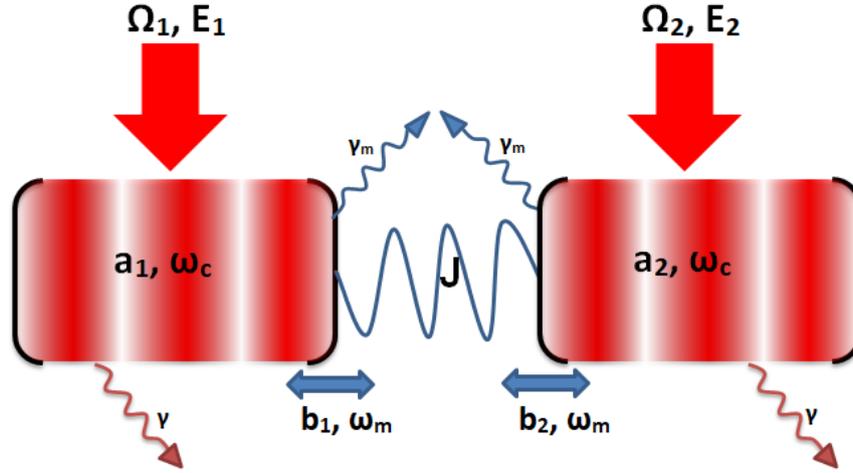


Abbildung 3.2: Das System B, bestehend aus zwei Kavitäten, die je eine mechanische Mode tragen und durch einen Laser getrieben werden können. Die beiden mechanischen Moden sind miteinander gekoppelt.

System B (siehe Abb. 3.2) besteht aus zwei Kavitäten mit je zwei mechanischen Oszillatoren, die miteinander gekoppelt sind. Beide mechanischen Moden haben zunächst dieselbe Dämpfung γ_m , die dann aber durch die optomechanische Wechselwirkung moduliert wird, siehe Abschnitt 3.4. Die optischen Moden haben jeweils die Verlustraten γ . Zusätzlich werden beide Kavitäten noch durch einen stimbaren Laser getrieben.

Der Hamilton-Operator des Systems lautet

$$H_B = \sum_{i=1,2} \left(-\Delta_i a_i^\dagger a_i + \omega_m b_i^\dagger b_i + i\sqrt{\gamma} E(t) (a_i^\dagger - a_i) \right) - g(b_1^\dagger + b_1) a_1^\dagger a_1 - g(b_2^\dagger + b_2) a_2^\dagger a_2 + J(b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1), \quad (3.2)$$

wobei $\Delta_i = \Omega_i - \omega_c$ gilt.

Die Beschreibung beider Systeme mittels Hamilton-Operatoren ist noch wie gewohnt, d.h. der Hamilton-Operator ist hermitesch. Dies liegt daran, dass Gewinn und Verlust noch nicht im Hamilton-Operator enthalten sind. Wie sie in den Hamilton-Operator integriert werden können und welche Bedingungen sie erfüllen müssen, damit \mathcal{PT} -Symmetrie vorliegt, wird in Abschnitt 3.1.2 erläutert.

3.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Zeitentwicklungen der einzelnen Operatoren lassen sich mittels der Heisenbergschen Bewegungsgleichung bestimmen. Diese lautet für einen allgemeinen Operator Q und den zum System gehörigen Hamilton-Operator H

$$\dot{Q} = i[H, Q]. \quad (3.3)$$

Hinzu kommen noch Terme, die Gewinn und Verlust (in blau dargestellt), sowie Störungen durch das Vakuum-Rauschen (grün) berücksichtigen. Die vollständigen Bewegungsgleichung lauten dann für System A

$$\dot{a}_1 = i\Delta a_1 - iJ a_2 + ig(b_1^\dagger + b_1)a_1 - \frac{\gamma}{2}a_1 + \sqrt{\gamma}a_1^{\text{in}}, \quad (3.4)$$

$$\dot{a}_2 = i\Delta a_2 - iJ a_1 + ig(b_2^\dagger + b_2)a_2 + \frac{\kappa}{2}a_2 + \sqrt{\kappa}a_2^{\text{in}}, \quad (3.5)$$

$$\dot{b}_i = -i\omega_m b_i + ig a_i^\dagger a_i + \frac{\gamma_m}{2}b_i + \sqrt{\gamma_m}b_i^{\text{in}}; \quad i = 1, 2 \quad (3.6)$$

und für das System B

$$\dot{a}_i = \left(i\Delta + ig(b_i^\dagger + b_i) - \frac{\gamma}{2} \right) a_i + \sqrt{\gamma}a_i^{\text{in}} + \sqrt{\gamma}E(t); \quad i = 1, 2, \quad (3.7)$$

$$\dot{b}_1 = \left(-i\omega_m - i\frac{\gamma_m}{2} \right) b_1 + ig a_1^\dagger a_1 - iJ b_2 + \sqrt{\gamma_m}b_1^{\text{in}}, \quad (3.8)$$

$$\dot{b}_2 = \left(-i\omega_m - i\frac{\gamma_m}{2} \right) b_2 + ig a_2^\dagger a_2 - iJ b_1 + \sqrt{\gamma_m}b_2^{\text{in}}, \quad (3.9)$$

wobei a_1^{in} , usw. die Operatoren sind, die das Vakuum-Rauschen beschreiben. Bei der Berechnung der Kommutatoren nach (3.3) hat man $[a_i, a_j] = i\delta_{ij}$ und $[a_i, a_j] = 0$ verwendet.

Kennt man nun diese Bewegungsgleichungen inklusive der Terme für Gewinn und Verlust, lässt sich der dazugehörige effektive Hamilton-Operator H_{eff} konstruieren. Vernachlässigt man zunächst das Rauschen, ergibt sich für System A:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff,A}} = & \left(-\Delta - i\frac{\gamma}{2} \right) a_1^\dagger a_1 + \left(-\Delta + i\frac{\kappa}{2} \right) a_2^\dagger a_2 + \left(\omega_m - i\frac{\gamma_m}{2} \right) (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) \\ & - g(b_1^\dagger + b_1)a_1^\dagger a_1 - g(b_2^\dagger + b_2)a_2^\dagger a_2 + J(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dieser Hamilton-Operator ist offensichtlich nicht mehr hermitesch. Wann er nun \mathcal{PT} -symmetrisch ist, lässt sich überprüfen, indem man $H_{\text{eff,A}}^{\mathcal{PT}}$ berechnet [17]:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff,A}}^{\mathcal{PT}} = & \mathcal{PT} H_{\text{eff,A}} \mathcal{PT} \\ = & \left(-\Delta + i\frac{\gamma}{2} \right) a_1^\dagger a_1 + \left(-\Delta - i\frac{\kappa}{2} \right) a_2^\dagger a_2 + \left(\omega_m + i\frac{\gamma_m}{2} \right) (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) + i\sqrt{\gamma}E(t) \\ & + g(b_1^\dagger + b_1)a_1^\dagger a_1 + g(b_2^\dagger + b_2)a_2^\dagger a_2 + J(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ein Vergleich von (3.10) mit (3.11) liefert dann folgende Bedingungen für \mathcal{PT} -Symmetrie:

- $\gamma = \kappa$ - In das System muss gleich viel Energie hinein fließen, wie auch wieder heraus fließt (Gewinn-Verlust-Balance, engl.: *gain-loss-balance*).
- $g = 0$; $\gamma_m = 0$ - Die mechanischen Oszillatoren müssen verlustfrei sein und die optomechanische Wechselwirkung komplett unterdrückt werden.
- Beide optische Moden die gleich Frequenz ω_c haben, was wir von Anfang an vorausgesetzt hatten.

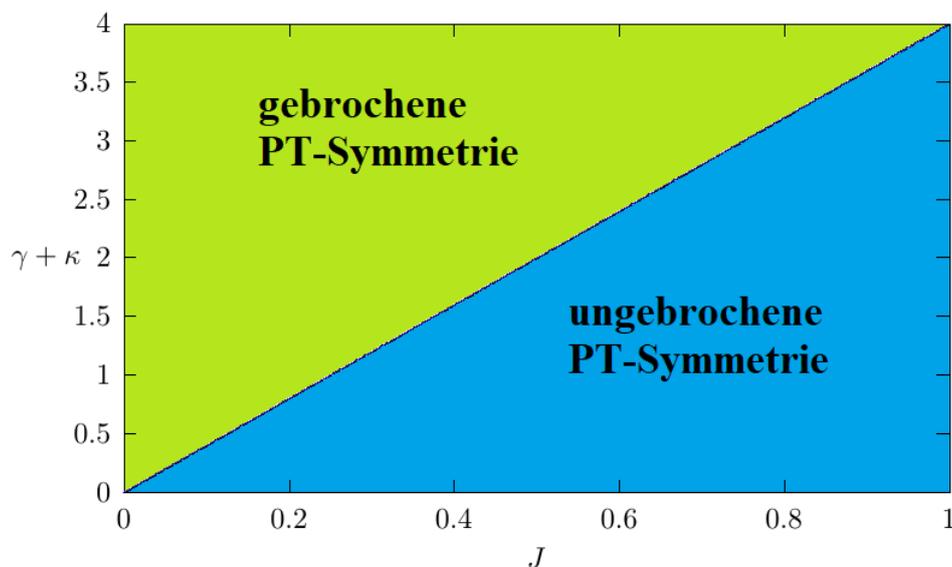


Abbildung 3.3: \mathcal{PT} -Regime in Abhängigkeit der Parameter γ , κ und J

Trotz dieser Einschränkungen ist es üblich, auch Systeme mit optomechanischer Wechselwirkung und mechanischen Verlusten als \mathcal{PT} -symmetrische Systeme zu betrachten. Dies lässt sich dadurch rechtfertigen, dass in der Praxis in der Regel $g \ll \omega_m, \omega_c$ und $\gamma_m \ll \gamma, \kappa$ gilt [9]. Auch Systeme mit verschiedenen Kavitätsfrequenzen [30] werden als \mathcal{PT} -symmetrisch bezeichnet, da dies die Zeitentwicklung weiterhin unitär belässt (ohne Gewinn und Verlust wären solche Hamilton-Operatoren hermitesch).

Auch für System B ließe sich ein effektiver Hamilton-Operator konstruieren. Dieser wäre allerdings nicht \mathcal{PT} -symmetrisch, es sei denn, man würde alle Verluste ignorieren. \mathcal{PT} -Symmetrie kommt erst zustande, wenn man Gewinn und Verlust implementiert, was in Abschnitt 3.4 geschehen soll.

3.2 \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime und exceptional points

Um Aussagen über die \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime zu treffen und zu bestimmen, wo der Übergang vom ungebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime zum gebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime erfolgt, ist es also sinnvoll, ein rein optisches System zu betrachten, in diesem Fall System A ohne mechanische Moden und Rauschen, aber mit Kopplung und Gewinn und Verlust. Hierzu schreiben wir die verbleibenden Terme aus (3.4) und (3.5) in Form der Matrix-Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{pmatrix} = -i \underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta + i\frac{\kappa}{2} & J \\ J & -\Delta - i\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}}_{H_{\text{opt}}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

und berechnen die EW des effektiven Hamilton-Operators H_{opt} :

$$\det(H_{\text{opt}} - \omega \mathbb{1}) = 0. \quad (3.13)$$

Diese EW sind die Eigenfrequenzen der Moden in den gekoppelten Kavitäten und werden häufig Supermoden genannt [31]. Die Eigenfrequenzen lauten

$$\omega_{\pm} = -\Delta - i\frac{\gamma - \kappa}{4} \pm \sqrt{J^2 - \frac{(\gamma + \kappa)^2}{16}} \quad (3.14)$$

und sind rein reell, wenn $\gamma = \kappa$, sowie

$$(4J)^2 \geq (\gamma + \kappa)^2 \quad (3.15)$$

gilt. Diese Bedingungen wurden auch experimentell bestätigt [32]. Wir erhalten also eine zweite Bedingung für reelle EW, die uns das ungebrochene \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime definiert. Da alle Parameter reell und positiv sind, vereinfacht sich die Bedingung zu $4J \geq \gamma + \kappa$. Die klassische Vorstellung, die diese Bedingung erklärt, ist, dass die Kopplung zwischen den Kavitäten stark genug sein muss, damit die gewonnene Energie der Gewinn-Kavität hinreichend schnell in die Verlust-Kavität fließen kann [16].

Der Übergang vom ungebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime zum gebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime erfolgt bei fixen γ, κ am Punkt $J = \frac{\gamma + \kappa}{4}$ (s. Abb. 3.3). Dieser Punkt wird als *exceptional point* (EP) bezeichnet. An diesem Punkt fallen sowohl Real- als auch Imaginärteil der beiden Eigenfrequenzen (vgl. Abb. 3.4) zusammen. Anders als bei gewöhnlichen entarteten Eigenwerten, wo zu dem entarteten EW ein zweidimensionaler Eigenraum gehört, fallen hier auch die Eigenvektoren zusammen. Diese lauten

$$|v_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\frac{\gamma + \kappa}{4} \pm \sqrt{J^2 - \frac{(\gamma + \kappa)^2}{16}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

und „verschmelzen“ offensichtlich am EP. Genaueres zum Verhalten der Eigenvektoren, zum allgemeinen Fall komplexer Parameter und zu EPs höherer Ordnung, also EPs, bei denen mehr als zwei Eigenwerte und Eigenvektoren zusammenfallen, findet sich in Anhang A.

3.3 Lineare Stabilitätsanalyse von stationären Zuständen

Es ist immer möglich, Heisenberg-Operatoren als einen zeitlich konstanten Operator plus eine Fluktuation mit zeitlichem Mittelwert null zu schreiben [8]. Hierzu schreiben wir unsere Operatoren als

$$a_i = \alpha_i + \delta a_i \quad (3.17)$$

$$b_i = \beta_i + \delta b_i; \quad i = 1, 2. \quad (3.18)$$

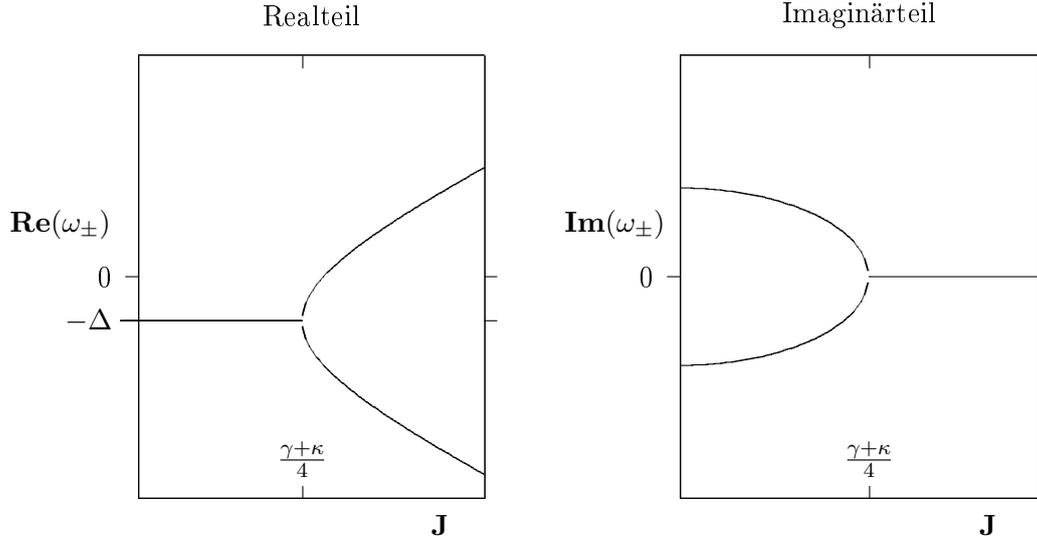


Abbildung 3.4: Dargestellt sind der Real- und der Imaginärteil der Eigenfrequenzen (3.14). Man erkennt das typische Wurzelverhalten der EW am EP [33].

Die zeitlich konstanten Operatoren führen auf stationäre Zustände (*steady states*) und erfüllen nach (3.4) bis (3.6) die Bedingungen

$$\left[i \{ \Delta + g(\beta_1^* + \beta_1) \} - \frac{\gamma}{2} \right] \alpha_1 - iJ\alpha_2 = 0 \quad (3.19)$$

$$\left[i \{ \Delta + g(\beta_2^* + \beta_2) \} + \frac{\kappa}{2} \right] \alpha_2 - iJ\alpha_1 = 0 \quad (3.20)$$

$$- \underbrace{\left[i\omega_m + \frac{\gamma_m}{2} \right]}_{\Omega_m} \beta_i + i \underbrace{G|\alpha_i|^2}_{G_i} = 0, \quad (3.21)$$

womit wiederum aus (3.4) bis (3.6) Bewegungsgleichungen für die Fluktuationsoperatoren folgen, die unter Ausnutzung der Bedingung $\alpha_1, \alpha_2 \gg 1$ linear werden. Diese lauten ohne Rauschen

$$\delta \dot{a}_1 = \underbrace{\left(i\bar{\Delta}_1 - \frac{\gamma}{2} \right)}_{\Omega_{a_1}} \delta a_1 - iJ\delta a_2 + iG_1\delta b_1^\dagger + iG_1^*\delta b_1^\dagger + ig \underbrace{(\delta a_1\delta b_1^\dagger + \delta a_1\delta b_1)}_{\rightarrow 0} \quad (3.22)$$

$$\delta \dot{a}_2 = \underbrace{\left(i\bar{\Delta}_2 + \frac{\kappa}{2} \right)}_{\Omega_{a_2}} \delta a_2 - iJ\delta a_1 + iG_2\delta b_2^\dagger + iG_2^*\delta b_2^\dagger + ig \underbrace{(\delta a_2\delta b_2^\dagger + \delta a_2\delta b_2)}_{\rightarrow 0} \quad (3.23)$$

$$\delta \dot{b}_i = -\Omega_m\delta b_i + iG_i^*\delta a_i + iG_i\delta a_i^\dagger + ig \underbrace{\delta a_i^\dagger\delta a_i}_{\rightarrow 0}; \quad i = 1, 2, \quad (3.24)$$

wobei $\bar{\Delta}_i = \Delta + 2g\text{Re}(\beta_i)$, die durch die optomechanische Wechselwirkung verschobene Frequenz des Operators a_i ist. Wir definieren nun die Vektoren

$$f = \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_1^\dagger \\ \delta a_2 \\ \delta a_2^\dagger \\ \delta b_1 \\ \delta a_1^\dagger \\ \delta b_2 \\ \delta b_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma}\delta a_1^{\text{in}} \\ \sqrt{\gamma}\delta a_1^{\text{in}\dagger} \\ \sqrt{\kappa}\delta a_2^{\text{in}} \\ \sqrt{\kappa}\delta a_2^{\text{in}\dagger} \\ \sqrt{\gamma_m}\delta b_1^{\text{in}} \\ \sqrt{\gamma_m}\delta b_1^{\text{in}\dagger} \\ \sqrt{\gamma_m}\delta b_2^{\text{in}} \\ \sqrt{\gamma_m}\delta b_2^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

damit wir die Gleichungen (3.22) bis (3.24) kompakt mit Rauschen als

$$\dot{f} = J \cdot f + z \quad (3.26)$$

schreiben können. J ist hierbei die Jacobi-Matrix, die nach (3.22) bis (3.24) gegeben ist als

$$J = \begin{pmatrix} \Omega_{a_1} & 0 & -iJ & 0 & iG_1^* & iG_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{a_1}^* & 0 & iJ & -iG_1 & -iG_1^* & 0 & 0 \\ -iJ & 0 & \Omega_{a_2} & 0 & 0 & 0 & iG_2^* & iG_2 \\ 0 & iJ & 0 & \Omega_{a_2}^* & 0 & 0 & -iG_2 & -iG_2^* \\ iG_1^* & iG_1 & 0 & 0 & -\Omega_m & 0 & 0 & 0 \\ -iG_1 & -iG_1^* & 0 & 0 & 0 & -\Omega_m^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iG_2^* & iG_2 & 0 & 0 & -\Omega_m & 0 \\ 0 & 0 & -iG_2 & -iG_2^* & 0 & 0 & 0 & -\Omega_m^* \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Eine Stabilitätsanalyse beruht auf den Eigenwerten der Jacobi-Matrix J . Damit das System sich auf einen fixen Punkt zu bewegt, müssen alle EW der Jacobi-Matrix einen negativen Realteil haben [9, 34].

Solch eine Stabilitätsanalyse wurde bereits in Ref. [9] an einem ähnlichen System durchgeführt, weshalb hier nur die wichtigsten Ergebnisse dieser aufwendigen numerischen Rechnung angegeben werden. Detaillierte grafische Darstellungen finden sich dort.

Die beiden Hauptergebnisse der Analyse sind:

1. Das System ist stabil im ungebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime und im gebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime, wenn Gewinn-Verlust-Balance herrscht und die Kopplung J sehr groß ist, also in der Nähe des EP.
2. Im gebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime kann Stabilität erreicht werden, wenn $\kappa \ll \gamma$ gilt, d.h. es fließt deutlich mehr Energie aus dem System heraus als hinein. Das System ist dann aber stark gedämpft.

Stabile stationäre Zustände, an denen Messungen über einen längeren Zeitraum durchgeführt werden können, entstehen also hauptsächlich im ungebrochene \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime und in der Nähe des EP. Es gilt allerdings zu beachten, dass in unmittelbarer Umgebung des EP durch das thermische Rauschen das System instabil wird aufgrund einer hohen Empfindlichkeit gegenüber einer Variation der Parameter. (s. Anhang A) [35].

3.4 Erzeugung von Gewinn und Verlust

3.4.1 Mechanischer Gewinn und Verlust

Um Gewinn und Verlust bei den mechanischen Oszillatoren von System B zu erzeugen, entwickeln wir die Bewegungsgleichungen (3.7) bis (3.9) um stationäre Zustände (siehe Abschnitt 3.3). Zusätzlich nehmen wir eine starke, zeitlich konstante Laseramplitude E an. Unter Verwendung der in (3.17) und (3.18) definierten Operatoren und der Annahme $\gamma \ll E$ [11] erhalten wir die linearisierten Gleichungen

$$\delta \dot{a}_i = \left(i\bar{\Delta}_i - \frac{\gamma}{2} \right) \delta a_i + iG_i(\delta b^\dagger + \delta b), \quad (3.28)$$

$$\delta \dot{b}_1 = - \left(i\omega_m + \frac{\gamma_m}{2} \right) \delta b_1 + iG_1^* \delta a_1 + iG_1 \delta a_1^\dagger - iJ\delta b_2, \quad (3.29)$$

$$\delta \dot{b}_2 = - \left(i\omega_m + \frac{\gamma_m}{2} \right) \delta b_2 + iG_2^* \delta a_2 + iG_2 \delta a_2^\dagger - iJ\delta b_1, \quad (3.30)$$

mit den bereits definierten Größen $\bar{\Delta}_i = \Delta_i + g\text{Re}(\beta_i)$ und $G_i = g\alpha_i$. Um die Rechnung zu ermöglichen, führen wir den Ortsoperator $q = \delta b_i^\dagger + \delta b_i$ und den Impulsoperator $p = i(\delta b_i^\dagger - \delta b_i)$ ein und erhalten die zu (3.29) und (3.30) äquivalenten Gleichungen

$$\dot{q}_i = \omega_m p_i, \quad (3.31)$$

$$\dot{p}_1 = -\omega_m q_1 + Jq_2 + G_1^* \delta a_1 + G_1 \delta a_1^\dagger - \frac{\gamma_m}{2} p_1, \quad (3.32)$$

$$\dot{p}_2 = -\omega_m q_2 + Jq_1 + G_2^* \delta a_2 + G_2 \delta a_2^\dagger - \frac{\gamma_m}{2} p_2. \quad (3.33)$$

Wir wählen jetzt die Verstimmung des Lasers so, dass er, wie sich zeigen wird, Resonanz mit der mechanischen Mode erzeugt:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= +\omega_m, \\ \bar{\Delta}_2 &= -\omega_m. \end{aligned}$$

Um die Kavitätsmoden adiabatisch ($\gamma \gg G_i$) zu eliminieren, führt man die Amplitudenfunktionen

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta a}_1 &= \delta a_1 e^{(-i\omega_m + \frac{\gamma}{2})t}, \\ \widetilde{\delta a}_2 &= \delta a_2 e^{(i\omega_m + \frac{\gamma}{2})t}, \\ \widetilde{\delta b}_i &= \delta b_i e^{i\omega_m t} \end{aligned}$$

ein und multipliziert (3.28) mit $e^{(-i\omega_m + \frac{\gamma}{2})t}$ bzw. $e^{(i\omega_m + \frac{\gamma}{2})t}$ und integriert über die Zeit t . Man erhält:

$$\begin{aligned} \int \left(\delta \dot{a}_1 - \left(i\omega_m - \frac{\gamma}{2} \right) \delta a_1 \right) e^{(-i\omega_m + \frac{\gamma}{2})t} dt &= \int \widetilde{\delta \dot{a}}_1 dt \\ &= \widetilde{\delta a}_1 = \int iG_1 \left(\widetilde{\delta b}_1^\dagger + \widetilde{\delta b}_1 e^{-2i\omega_m t} \right) e^{\frac{\gamma}{2}t} dt, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \int \left(\delta \dot{a}_2 - \left(-i\omega_m - \frac{\gamma}{2} \right) \delta a_2 \right) e^{(i\omega_m + \frac{\gamma}{2})t} dt &= \int \widetilde{\delta \dot{a}}_2 dt \\ &= \widetilde{\delta a}_2 = \int iG_2 \left(\widetilde{\delta b}_2^\dagger e^{2i\omega_m t} + \widetilde{\delta b}_2 \right) e^{\frac{\gamma}{2}t} dt. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Unter der adiabatischen Eliminationsbedingung $\gamma \gg G_i$ wird die Zeitentwicklung der Kavitätsmoden dominiert durch des externe Feld (stationäre Lösung) und den Verlust γ . Setzt man noch $\gamma \gg \kappa$ voraus, erfolgt die Zeitentwicklung von $\tilde{\delta b}_i$ sehr viel langsamer als die von $\tilde{\delta a}_i$ und kann für die Integration als konstant angenommen werden. Die Integrale haben damit die Lösung

$$\begin{aligned}\tilde{\delta a}_1 &= \left(\frac{2iG_1}{\gamma} \tilde{\delta b}_1^\dagger + \frac{2iG_1}{\gamma - 4i\omega_m} \tilde{\delta b}_1 e^{-2i\omega_m t} \right) e^{\frac{\gamma}{2}t}, \\ \tilde{\delta a}_2 &= \left(\frac{2iG_2}{\gamma + 4i\omega_m} \tilde{\delta b}_2^\dagger e^{2i\omega_m t} + \frac{2iG_2}{\gamma} \tilde{\delta b}_2 \right) e^{\frac{\gamma}{2}t},\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\delta a_1 = \frac{2iG_1}{\gamma} \delta b_1^\dagger + \frac{2iG_1}{\gamma - 4i\omega_m} \delta b_1, \quad (3.36)$$

$$\delta a_2 = \frac{2iG_2}{\gamma + 4i\omega_m} \delta b_2^\dagger + \frac{2iG_2}{\gamma} \delta b_2. \quad (3.37)$$

Setzt man diese adiabatischen Lösungen in (3.32) und (3.33) ein, erhält man die Bewegungsgleichungen [11]

$$\dot{p}_1 = -(\omega_m + \delta\omega_1)q_1 + Jq_2 - \frac{1}{2}(\gamma_m - \Gamma_1)p_1, \quad (3.38)$$

$$\dot{p}_2 = -(\omega_m - \delta\omega_2)q_2 + Jq_1 - \frac{1}{2}(\gamma_m + \Gamma_2)p_2, \quad (3.39)$$

mit

$$\delta\omega_i = \frac{4|G_i|^2\omega_m}{\gamma^2 + 16\omega_m^2} \approx 0 \quad (3.40)$$

und

$$\Gamma_i = \frac{2|G_i|^2}{\gamma} \frac{16\omega_m^2}{\gamma^2 + 16\omega_m^2}. \quad (3.41)$$

Aus der Gleichung für die stationären Zustände

$$\left[i \{ \Delta + g(\beta_i^* + \beta_i) \} - \frac{\gamma}{2} \right] \alpha_i = \sqrt{\gamma} E_i \quad (3.42)$$

sehen wir, dass wir durch die Amplitude des Laser E_i den Zustand α_i und damit auch G_i verstellen können. Wählen wir nun E_i so, dass

$$(\Gamma_1 - \gamma_m) = -(\Gamma_2 + \gamma_m) =: \gamma_{\text{eff}} \quad (3.43)$$

gilt, erhalten wir aus (3.38) und (3.39) die Differentialgleichungen

$$\dot{p}_1 = -\omega_m q_1 + Jq_2 + \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} p_1 \quad (3.44)$$

$$\dot{p}_2 = -\omega_m q_2 + Jq_1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} p_2. \quad (3.45)$$

Wir erhalten also ein rein mechanisches System, welches Gewinn und Verlust hat und darüber hinaus \mathcal{PT} -symmetrisch ist. Gehen wir wieder in unsere Darstellung mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren über, erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\delta \dot{b}_1 = - \left(i\omega_m + \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} \right) \delta b_1 - iJ\delta b_2 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} \delta b_1^\dagger, \quad (3.46)$$

$$\delta \dot{b}_2 = - \left(i\omega_m - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} \right) \delta b_2 - iJ\delta b_1 + \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} \delta b_2^\dagger, \quad (3.47)$$

das wiederum \mathcal{PT} -symmetrisch ist (man beachte, dass \mathcal{T} die Vorzeichen der Ableitungen tauscht). Dies lässt sich kompakt schreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \end{pmatrix} = -i \underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta + i\frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} & J \\ J & -\Delta - i\frac{\gamma_{\text{eff}}}{2} \end{pmatrix}}_{H_{\text{mech}}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

H_{mech} ist für $\gamma = \kappa = \gamma_{\text{eff}}$ äquivalent zum rein optischen System (3.12) und zeigt somit die gleiche Physik.

3.4.2 Optischer Gewinn und Verlust

Gewinn und Verlust lassen sich auch für das optische Feld experimentell einfach erzeugen. Eine Möglichkeit ist es, den natürlichen Verlust einer jeden Kavität zu nutzen und in die andere Kavität Er^{3+} -Ionen einzubringen, die dann von einem Laser der Wellenlänge 1460 nm angeregt werden [36]. Der Gewinn ist dann proportional zur Er^{3+} -Dichte und der Intensität des Lasers

Eine weitere Möglichkeit basiert auf mit Fe gestörten LiNbO_3 -Materialien. Hier tritt Verlust an Fe^{2+} -Störstellen durch Elektronen-Anregung auf, während an Fe^{3+} -Störstellen, die durch einen Ar^+ -Laser angeregt werden, Gewinn entsteht. Gewinn und Verlust sind je proportional zur Anzahl der Störstellen [32].

3.5 Verschränkungsmessungen mit Quadraturen

Um Verschränkungen zu quantifizieren, gibt es verschiedenen Möglichkeiten. Eine davon, die gut geeignet ist, wenn man in der Theorie die Dynamik des Systems kennt, beruht auf der Größe der sogenannten *logarithmischen Negativität* $E_{\mathbb{N}}$. Diese lässt sich effektiv numerisch mittels standardmäßiger Lineare-Algebra-Verfahren berechnen, auch für gemischte Zustände [37]. Dieses Verfahren wurde in [9] auf ein System A ähnliches System angewandt. Dabei wurde gezeigt, dass Verschränkungen zwischen der Gewinn-Kavität (a_1) und dem mechanischen Oszillator in der Verlust-Kavität (b_2) erzeugt werden können und diese durch das Hinzufügen von Gewinn und Verlust und Erzeugen von \mathcal{PT} -Symmetrie stärker sind als in Systemen ohne \mathcal{PT} -Symmetrie.

Dieser Ansatz verrät jedoch nicht, wie durch Messungen Verschränkungen nachgewiesen werden können. Hierfür benötigt man die in Abschnitt 2.4 vorgestellten Kriterien. Die Vorgehensweise soll hier beschrieben werden.

Die beiden Kriterien (2.31) und (2.43) gelten für zwei beliebige nicht-kommutierende Observable. Wollen wir also Verschränkungen und EPR-steering, beispielsweise zwischen einem mechanischen Oszillator in der linken Kavität und dem optischen Feld in der rechten Kavität, nachweisen, benötigen wir zwei nicht-kommutierende Observable, die jeweils lokal am entsprechenden Objekt gemessen werden können. Dies gelingt mittels sogenannter Quadraturen. Diese Operatoren werden aus den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wie folgt gebildet [38]:

$$X^\theta = e^{-i\theta} a + e^{i\theta} a^\dagger, \quad (3.49)$$

wobei θ eine beliebige Phase ist. Von besonderem Interesse sind nun die Spezialfälle $X = X^0$ und $P = X^{\pi/2}$. Diese beiden Operatoren haben den Kommutator

$$\begin{aligned} [X, P] &= [a + a^\dagger, ia^\dagger - oa] \\ &= iaa^\dagger - iaa + ia^\dagger a^\dagger - ia^\dagger a - ia^\dagger a - ia^\dagger a^\dagger + iaa + iaa^\dagger \\ &= 2i[a, a^\dagger] = 2i \end{aligned} \quad (3.50)$$

und eignen sich somit als Operatoren für die beiden Kriterien.

Gemessen werden können diese beiden Operatoren mittels eines einkoppelnden Lasers und des optischen Feldes, das die Kavität wieder verlässt. Zwischen dem eingestrahlteten Feld a^{in} , dem ausgehenden Feld a^{out} und dem Feld in der Kavität besteht der Zusammenhang [27, 29]

$$a^{\text{out}} = \sqrt{\gamma}a - a^{\text{in}}. \quad (3.51)$$

Somit kann aus dem Feld, das die Kavität verlässt, das optische Feld in der Kavität a bestimmt werden und damit auch die Quadraturen. Auch die Quadraturen des mechanischen Oszillators lassen sich hiermit näherungsweise für starke optomechanische Kopplung g bestimmen. Für eine detaillierte Beschreibung des Prozesses siehe Ref. [29].

Hierbei muss natürlich beachtet werden, dass wir wiederholte Messungen benötigen, um Varianzen zu messen. Das bedeutet, dass für jede Messung die Störung des Systems durch die vorherigen Messungen berücksichtigt werden muss, was hier nicht geschehen ist. Eine Messung mittels eines amplitudenmodulierten Lasers, wie in Ref. [39] beschrieben, die keine Störung der Quadratur verursacht, ist immer nur für eine der beiden Quadraturen (X oder P) möglich. Wir benötigen jedoch Messungen an beiden Quadraturen.

Konkret lässt sich damit beispielsweise Verschränkung zwischen dem mechanischen Oszillator b_1 der Verlust-Kavität (mit Quadraturen X_1^b und P_1^b) und dem optischen Feld a_2 der Gewinn-Kavität (mit Quadraturen X_2^a und P_2^a) von System A mittels (2.31) und (3.50) nachweisen, und zwar, falls

$$\Delta^2(X_1^b + X_2^a) + \Delta^2(P_1^b + P_2^a) < 4 \quad (3.52)$$

erfüllt ist.

Um ein EPR-Paradoxon in der Praxis nachzuweisen, ist es häufig schwierig, die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen (wie z.B. in (2.32)) und mit ihnen die Werte $x_1^{\text{inf}}(x_2)$ zu bestimmen [23]. Meistens reicht es jedoch aus, den Zusammenhang zwischen x_1^{inf} und x_2 linear abzuschätzen, also

$$x_1^{\text{inf}} = g \cdot x_2 + d. \quad (3.53)$$

Die Koeffizienten g und d lassen sich aus den experimentell gewonnenen Daten mittels linearer Regression bestimmen:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle}{\Delta^2 x_2} \\ d &= \langle x_1 - g x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Für den Impuls gilt analog

$$p_1^{\text{inf}} = g'p_2 + d' \quad (3.54)$$

mit

$$g' = \frac{\langle p_1 p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle}{\Delta^2 p_2}$$

$$d' = \langle p_1 - g'p_2 \rangle.$$

Die minimierten Vorhersage-Abweichungen sind dann

$$\Delta_{\text{inf}}^2|_{\text{min}} x_1 = \Delta^2(x_1 - gx_2) \quad \text{und} \quad \Delta_{\text{inf}}^2|_{\text{min}} p_1 = \Delta^2(p_1 - g'p_2). \quad (3.55)$$

Um EPR-steering bei unserem System A (analog zum Verschränkungsnachweis weiter oben) nachzuweisen, ersetzt man in (3.53) und (3.54) die Orts- und Impulsoperatoren durch die Quadraturen [40] und erhält dann mit (2.43) und (3.50) das EPR-Kriterium

$$\Delta(X_1^b - gX_2^a)\Delta(P_1^b - g'P_2^a) < 1, \quad (3.56)$$

spricht: „Der mechanische Oszillator b_1 wird durch das optische Feld a_2 gesteuert.“ Ein Vertauschen der Indizes (mit entsprechend neuen Koeffizienten g, g') liefert ein Kriterium dafür, dass das optische Feld durch den mechanischen Oszillator gesteuert wird.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es aufzuzeigen, wie Verschränkungen an nicht-hermiteschen Systemen nachgewiesen werden können. Dazu wurden zwei optomechanische Systeme untersucht. Wir haben gesehen, dass in solchen Systeme leicht Nicht-Hermitizität und insbesondere \mathcal{PT} -Symmetrie erzeugt werden können, denn Gewinn und Verlust lassen sich experimentell mit einfachen Mitteln sowohl für die mechanischen als auch optischen Komponenten implementieren. Optomechanische Systeme stellen somit eine ideale „Spielwiese“ für Theoretiker dar, deren Ergebnisse von Modellrechnungen leicht experimentell überprüft werden können. Darüber hinaus haben wir festgestellt, dass die von uns gewünschte Eigenschaft \mathcal{PT} -symmetrischer Systeme, nämlich reelle Eigenwerte zu haben, nicht für alle Parameter gegeben ist. Wir haben allerdings gesehen, dass dies physikalisch begründet und interpretierbar ist. Es existieren zwei Parameterbereiche mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften, obwohl stets der Hamilton-Operator $[H, \mathcal{PT}] = 0$ erfüllt. Im ungebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime sind alle Energie-Eigenwerte reell und die Zeitentwicklung somit unitär; im gebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime hingegen werden die Eigenwerte komplex und die Zeitentwicklung ist nicht mehr unitär, auch besitzen dann H und \mathcal{PT} nicht mehr ein gemeinsames System von Eigenvektoren.

Diese Bereiche sind aus zweierlei Gründen relevant: Zum einen ist der Übergang zwischen den Regimen, der exceptional point, von Interesse, zum anderen ist auch die Stabilität des Systems eng mit den Regimen verknüpft.

Am EP fallen mehrere Eigenwerte zusammen. Auch die Eigenvektoren „verschmelzen“ hier. Bedeutsam ist in der Praxis auch der Fakt, dass die Eigenwerte in der Umgebung des EPs hochempfindlich auf Änderungen der Parameter reagieren.

Die Stabilität des Systems ist fast nur im ungebrochenen \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime gegeben. Nur in stabilen Bereichen sind die stationären Lösungen gültig, was insbesondere dazu führt, dass die Erzeugung von Gewinn und Verlust beim mechanischen Oszillator (Abschnitt 3.4) nur in diesem Regime das gewünschte Ergebnis liefert.

Auch bei Verschränkungsmessungen spielt die Stabilität von Zuständen eine wichtige Rolle. Wir haben gesehen, dass Verschränkung und EPR-steering nicht nur an einem mathematischen Ausdruck eines Zustandes erkannt werden können, sondern haben Kriterien erlangt und ein Messverfahren erörtert, das diese Phänomene

messbar macht. Hierzu benötigen wir allerdings, da wir Varianzen von Observablen messen, eine Vielzahl von Messungen. Ist ein Zustand nicht stabil, ist es sehr schwierig, an ihm eine große Anzahl Messungen durchzuführen. Um die Kriterien auch auf instabile Zustände anzuwenden, müsste man einen Zustand häufiger, mit den selben Parametern präparieren.

Ein großer Vorteil dieser Kriterien ist die vielseitige Anwendbarkeit: Beide Kriterien gelten für zwei beliebige nicht-kommutierende Variablen in zwei räumlich separierten Untersystemen. Damit lassen sich Verschränkung und EPR-steering bei einer Vielzahl von Systemen nachweisen, auch bei Systemen, die man theoretisch noch nicht analysiert und verstanden hat, oder aber bei - beispielsweise thermisch - gestörten Systemen, wo Wechselwirkungen mit der Umgebung berücksichtigt werden müssen. Allerdings gilt es zu bedenken, dass wir eine Erweiterung des Begriffes der physikalischen Realität, wie er von EPR gebraucht wurde, vornehmen mussten und somit EPR-Paradoxa nicht im ursprünglichen Sinne beobachten.

Anhang A

Exceptional points in der komplexen Ebene

A.1 Jordan-Normalform und Berechnung von Eigenwerten und -vektoren

Um die mathematischen Besonderheiten von exceptional points zu erkennen, betrachten wir den bereits bekannten Hamilton-Operator aus Abschnitt 3.2, ersetzen jedoch den Kopplungsparameter J durch die zwei komplexen Zahlen J_1 und J_2 . Der Hamilton-Operator hat die Form

$$H = \begin{pmatrix} -\Delta + i\frac{\kappa}{2} & J_1 \\ J_2 & -\Delta - i\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

und die Eigenwerte

$$\omega_{\pm} = -\Delta - i\frac{\gamma - \kappa}{4} \pm \underbrace{\sqrt{J_1 J_2 - \left(\frac{\gamma + \kappa}{4}\right)^2}}_{=:D}. \quad (\text{A.2})$$

Die beiden EW sind identisch, wenn

$$J_1 J_2 = \left(\frac{\gamma + \kappa}{4}\right)^2 \quad (\text{A.3})$$

gilt. Diese Punkte heißen *exceptional points*. Gleichung (A.3) lässt sich anschaulich verstehen für den Fall $J_2^* = J_1 =: J$. Dann liegen alle exceptional points auf dem Kreis $|J|^2 = \left(\frac{\gamma + \kappa}{4}\right)^2$ in der komplexen Ebene, dem sogenannten „exceptional ring“ [41] und im Inneren des Ringes ist der Realteil von ω_{\pm} konstant, außerhalb der Imaginärteil (vgl. Abb A.1).

Das Übereinstimmen der EW am EP entspricht nicht einer gewöhnlichen Entartung der EW, sondern einer Jordan-Normalform, die nicht mehr Diagonalgestalt hat. Entfernt vom EP ist H diagonalisierbar und kann dementsprechend in die Form

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

gebracht werden, während am EP die Jordan-Dekomposition

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & 1 \\ 0 & \tilde{\omega} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

lautet, mit $\tilde{\omega} = \omega_+ = \omega_- = -\Delta - i\frac{\gamma-\kappa}{4}$ [42].

Dass die Jordan-Normalform nicht mehr diagonal am EP ist, geht damit überein, dass auch die Eigenvektoren am EP übereinstimmen und nicht einen zweidimensionalen Eigenraum aufspannen. Die Eigenvektoren $|v_{\pm}\rangle$ erhält man als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(H - \omega_{\pm}\mathbf{1})|v_{\pm}\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i\frac{\gamma-\kappa}{4} \pm D & J_1 \\ J_2 & -i\frac{\gamma+\kappa}{4} \mp D \end{pmatrix} |v_{\pm}\rangle = 0 \quad (\text{A.6})$$

mit der Lösung

$$|v_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{-i\frac{\gamma+\kappa}{4} \mp D}{J_2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Am EP ($D = 0$) stimmen die beiden Vektoren offensichtlich miteinander überein.

Die dazugehörigen dualen Vektoren sind aufgrund der Nicht-Hermitizität von H nicht mehr die transponierten und komplex konjugierten ursprünglichen Vektoren, sondern sind definiert als die Lösung der zu (A.6) adjungierten Gleichung [43]

$$(H^\dagger - \omega_{\pm}^*\mathbf{1})\langle v_{\pm}^*|^T = 0. \quad (\text{A.8})$$

Dies führt auf die zwei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -i\frac{\gamma-\kappa}{4} \pm D & J_2^* \\ J_1^* & i\frac{\gamma+\kappa}{4} \pm D \end{pmatrix} \langle v_{\pm}^*|^T = 0 \quad \text{für } J_1 J_2 < \left(\frac{\gamma+\kappa}{4}\right)^2, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{pmatrix} -i\frac{\gamma-\kappa}{4} \mp D & J_2^* \\ J_1^* & i\frac{\gamma+\kappa}{4} \mp D \end{pmatrix} \langle v_{\pm}^*|^T = 0 \quad \text{für } J_1 J_2 \geq \left(\frac{\gamma+\kappa}{4}\right)^2, \quad (\text{A.10})$$

die auf die selbe Lösung führen:

$$\langle v_{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{-\frac{\gamma+\kappa}{4} \mp D}{J_1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Von Interesse sind zwei Spezialfälle des Skalarprodukts der Eigenvektoren:

1) Hermitescher Fall ($\gamma = \kappa = 0$)

Ohne Gewinn und Verlust ist H hermitesch und $D = \sqrt{J_1 J_2}$. Dann ist das Skalarprodukt der Eigenvektoren mit sich selbst

$$\langle v_{\pm}|v_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp\sqrt{J_1 J_2} \\ J_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp\frac{\sqrt{J_1 J_2}}{J_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{J_1 J_2 + 1}{J_1 J_2} = 1. \quad (\text{A.12})$$

A.2. VERHALTEN DER EIGENWERTE IN DER NÄHE DER EXCEPTIONAL POINTS

Die Vektoren sind also korrekt normiert. Für unterschiedliche Eigenvektoren gilt

$$\langle v_{\pm}|v_{\mp}\rangle = 0 \quad \forall J_1, J_2. \quad (\text{A.13})$$

Diese Vektoren sind also orthogonal und die Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis.

2) am exceptional point $\left(J_1 J_2 = \left(\frac{\gamma+\kappa}{4}\right)^2\right)$

Am EP werden die Eigenvektoren stets unabhängig von Parametern [44] und es gilt

$$\langle v_{\pm}|v_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm i, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1+1}{2} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Diese Verhalten wird als Selbst-Orthogonalität bezeichnet.

Die Eigenvektoren sind also in endlicher Entfernung vom EP linear unabhängig, für $J_1 J_2 \gg \gamma + \kappa$ sogar näherungsweise orthogonal, bewegen sich dann aufeinander zu, bis sie am EP parallel werden („verschmelzen“).

A.2 Verhalten der Eigenwerte in der Nähe der exceptional points

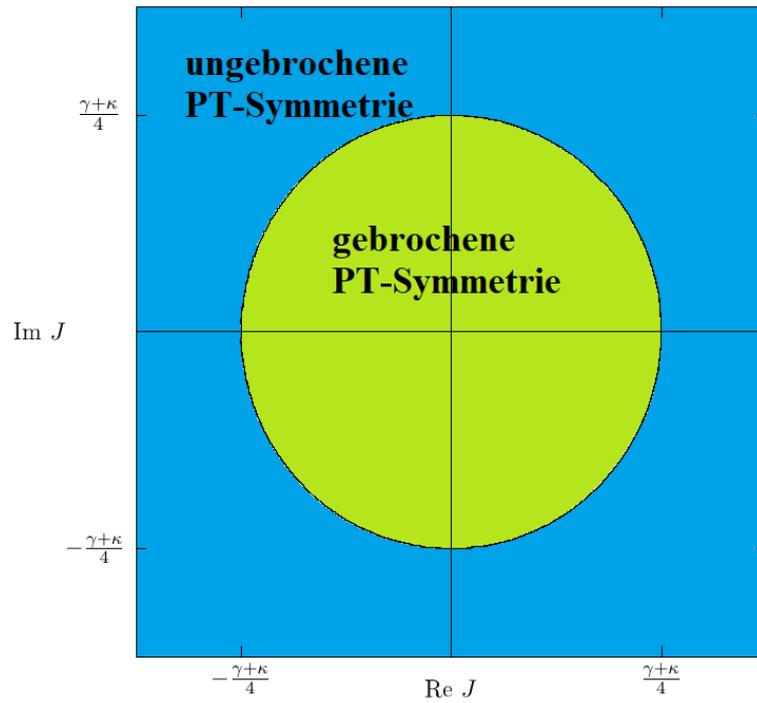
Von besonderem Interesse, insbesondere in Hinblick auf den Bau von Sensoren, ist das Verhalten der Eigenwerte in der Nähe der exceptional points. Wir werden nicht nur die hohe Empfindlichkeit der EW sehen, sondern auch, dass es möglich ist, wenn man einen EP in der komplexen Ebene umkreist, einen anderen EW zu erhalten, wenn man wieder am Ausgangspunkt angelangt ist (s. Abb. A.2). Dies wollen wir nicht nur am bereits bekannten Beispiel zeigen, sondern auch allgemein für EPs höherer Ordnung. Die Ordnung eines EPs ist die Anzahl der Eigenwerte und -vektoren, die an diesem Punkt zusammenfallen. Die bisher untersuchten EPs waren beispielsweise EPs der Ordnung 2, geschrieben EP₂ [45].

Betrachten wir hierzu ein Eigenwertproblem in Abhängigkeit des Parameters λ [46]. Die Lösung ist bei einer m -dimensionalen Matrix dann - der Determinantengleichung entsprechend - eine m -ästige algebraische Funktion $\Omega(\lambda)$ mit den Ästen $\omega_1(\lambda), \dots, \omega_m(\lambda)$, die eindeutig bestimmt sind. Sei nun λ_0 ein Punkt, in dem P Äste von Ω zusammenfallen (EP _{P}). Wir finden nun eine Kreisscheibe um λ_0 in der keine weiteren EPs liegen.¹ Gehen wir auf dem Rand dieser Kreisscheibe einmal (im positiven Sinne) um λ_0 herum, wird ein jeder Ast ω_i in einen (i.A. unterschiedlichen) Ast ω_j abgebildet. Außerdem werden nie zwei verschiedene Äste auf den gleichen Ast abgebildet, da sonst die inverse Fortsetzung (Umkreisen im negativen Sinne) nicht eindeutig wäre [47].

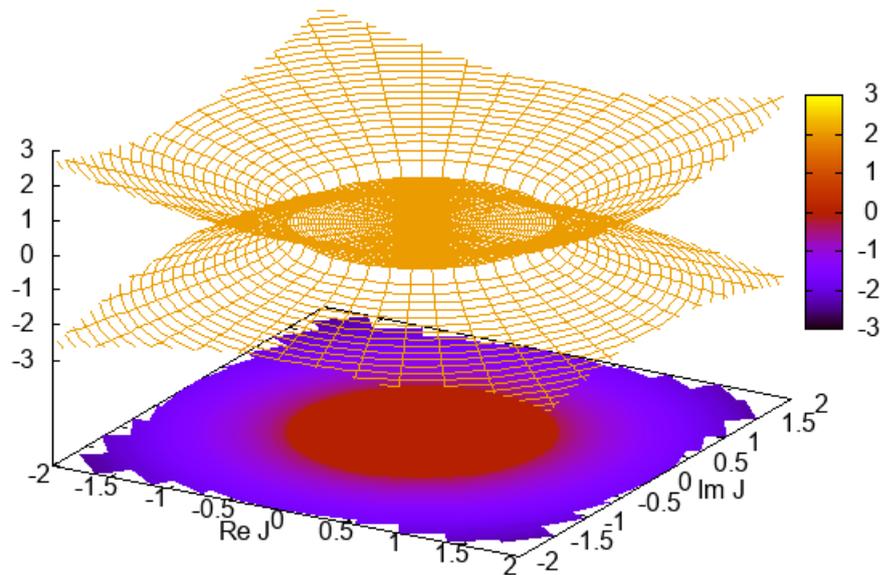
Die m Äste bilden also eine Permutation, aus der wir $p \leq P$ verschmelzende Äste auswählen können, sodass

$$\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \dots \rightarrow \omega_{p-1} \rightarrow \omega_p \rightarrow \omega_1 \quad (\text{A.15})$$

¹Das Beispiel des „exceptional rings“ weiter oben scheint dem zu widersprechen, tut dies aber nicht. Die algebraische Gleichung gilt dort nämlich für den Parameter $|J|$, nicht J selbst. Die beiden einzigen Lösungen 1 und -1 sind offensichtlich voneinander entfernt, auch wenn es natürlich nicht sinnvoll ist, $|J|$ als komplex anzunehmen.



(a) \mathcal{PT} -Symmetrie-Regime am „exceptional ring“



(b) Realteil der Eigenfrequenz

Abbildung A.1: Der „exceptional ring“ ist in beiden Abbildungen zu erkennen. Im Inneren des Ringes ist der Realteil null ($\Delta = 0$).

A.2. VERHALTEN DER EIGENWERTE IN DER NÄHE DER
EXCEPTIONAL POINTS

gilt. Nach p Umkreisungen wird also ein jedes ω_i auf sich selbst abgebildet. Sei nun

$$(\lambda - \lambda_0) = (\lambda')^p \quad \text{und} \quad \omega_i(\lambda) = \omega_i((\lambda')^p + \lambda_0) = f_i(\lambda'). \quad (\text{A.16})$$

Dann kann $f_i(\lambda')$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f_i(\lambda') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(i)} (\lambda')^n \quad (\text{A.17})$$

und dementsprechend ω_i in eine Puiseux-Reihe [48]:

$$\omega_i(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(i)} (\lambda - \lambda_0)^{\frac{n}{p}}. \quad (\text{A.18})$$

Da ω_i stetig ist bei $\lambda = \lambda_0$ (nach der Determinanten-Gleichung), lässt sich die Puiseux-Reihe reduzieren auf [46]

$$\omega_i(\lambda) = \omega_0 \sum_{n=1}^p \alpha_n (\lambda - \lambda_0)^{\frac{n}{p}}, \quad (\text{A.19})$$

wobei $\omega_0 = \omega(\lambda = 0)$ der EW am EP ist. Für kleine $\lambda - \lambda_0$ (also in der Umgebung von λ_0) ist ω_i also von der Ordnung $\sqrt[p]{\lambda - \lambda_0}$.

Die EW sind in der Umgebung eines EPs also stark vom Parameter λ abhängig, bei $\lambda = \lambda_0$ sogar unendlich stark. Je höher die Ordnung des EPs, desto stärker ist die Abhängigkeit, weshalb es sich lohnen kann, komplexere Systeme, mit EPs höherer Ordnung, zu untersuchen, wenn man beispielsweise hochempfindliche Sensoren konstruieren möchte.

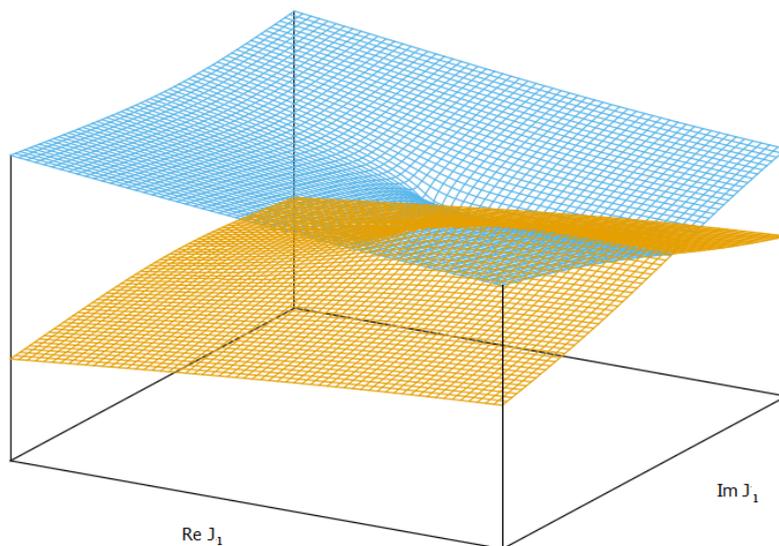
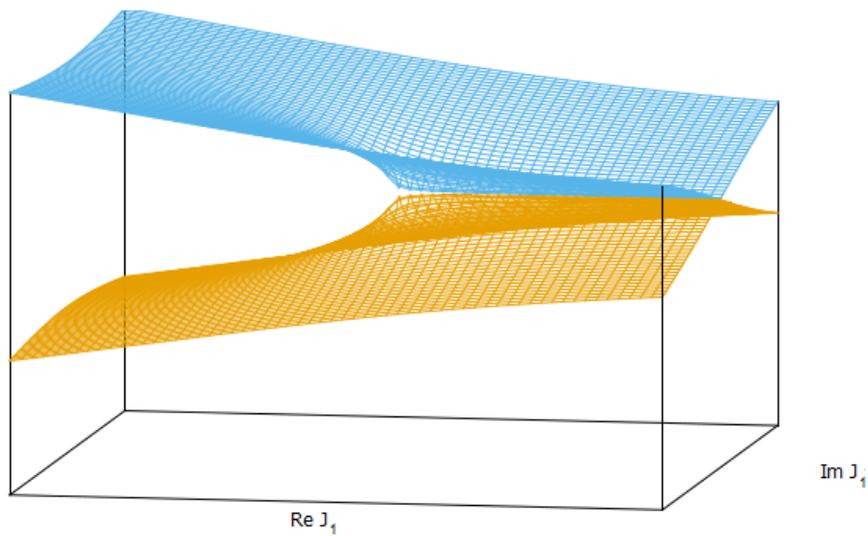


Abbildung A.2: Zu sehen sind die Realteile zweier Äste der Eigenfrequenz (A.2) aus zwei Perspektiven. Man erkennt, dass die beiden Äste entlang eines Strahls parallel zur reellen Achse übereinstimmen. Der Beginn des Strahls ist der EP. Für den Imaginärteil hätte man ein analoges Bild, lediglich der Strahl würde in die entgegengesetzte Richtung führen. Das Vertauschen der EW beim Umkreisen des EPs funktioniert folgendermaßen: Beginnen wir neben dem EP auf dem unteren, gelben Ast. Wählen wir nun einen geschlossenen Pfad um den EP herum, bleiben wir stets auf dem gelben Ast, bis wir an den Strahl gelangen. Wollen wir den Pfad nun differenzierbar (ohne Knick) fortsetzen, müssen wir auf den blauen Ast wechseln. Auf diesem bleiben wir, bis wir wieder an unserem Ausgangspunkt in der komplexen Ebene angekommen sind.

Literaturverzeichnis

- [1] J. von Neumann, in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1927) S. 1–61.
- [2] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik III: Quantenmechanik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1985) S. 24.
- [3] C. M. Bender und S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
- [4] R. Fleury, D. Sounas, und A. Alù, *Nature Communications* **6** (2015).
- [5] S. Forstner, J. Knittel, E. Sheridan, J. D. Swaim, H. Rubinsztein-Dunlop, und W. P. Bowen, *Photonic Sensors* **2**, 259 (2012).
- [6] J. Pade, *Quantenmechanik zu Fuß 2* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2012).
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, und N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [8] D. Vitali, S. Gigan, A. Ferreira, H. R. Böhm, P. Tombesi, A. Guerreiro, V. Vedral, A. Zeilinger, und M. Aspelmeyer, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030405 (2007).
- [9] C. Tchodimou, P. Djorwe, und S. G. Nana Engo, *Phys. Rev. A* **96**, 033856 (2017).
- [10] Z. Feng, J. Ma, und X. Sun, *Opt. Lett.* **43**, 4088 (2018).
- [11] X.-W. Xu, Y.-x. Liu, C.-P. Sun, und Y. Li, *Phys. Rev. A* **92**, 013852 (2015).
- [12] E. Schrödinger, *Annalen der Physik* **384**, 361 (1926).
- [13] W. Heisenberg, in *Mathematische Annalen, 95. Band* (1926) pp. 683–705.
- [14] F. Schwabl, *Quantenmechanik*, 7. Ausg. (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007).
- [15] S. Rotter, *Physics* **11** (2018).
- [16] C. M. Bender, *Contemporary Physics* **46**, 277 (2005),
- [17] A. Pathak, Nonclassicality in a parity-time-symmetric optomechanical system (2018), vortrag am PHHQP XVIII, ICTS, Bangalore.
- [18] C. M. Bender, M. Gianfreda, i. m. c. K. Özdemir, B. Peng, und L. Yang, *Phys. Rev. A* **88**, 062111 (2013).
- [19] E. Schrödinger, *Die Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [20] W. K. Wootters und W. H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).

- [21] M. J. Hall, *Physics Letters A* **125**, 89 (1987).
- [22] Albert Einstein, Max Born, *Briefwechsel 1916-1955* (Nymphenburger Verlagshandlung, 1991) Brief 86, S. 210.
- [23] M. D. Reid, P. Drummond, W. P. Bowen, E. Cavalcanti, P. K. Lam, H.-A. Bachor, U. Andersen, und G. Leuchs, *Reviews of Modern Physics* **81** (2009).
- [24] J. S. Bell, *Physics Physique Fizika* **1**, 195 (1964).
- [25] S. Wollmann, N. Walk, A. J. Bennet, H. M. Wiseman, und G. J. Pryde, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 160403 (2016).
- [26] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, und P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
- [27] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, und F. Marquardt, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1391 (2014).
- [28] X. Y. Zhang, Y. H. Zhou, Y. Q. Guo, und X. X. Yi, *Phys. Rev. A* **98**, 033832 (2018).
- [29] S. Kiesewetter, Q. Y. He, P. D. Drummond, und M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **90**, 043805 (2014).
- [30] M.-A. Miri und A. Alù, *Science* **363**, 10.1126/science.aar7709 (2019),
- [31] H. Jing, S. K. Özdemir, X.-Y. Lü, J. Zhang, L. Yang, und F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 053604 (2014).
- [32] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, und D. Kip, *Nature Physics* **6**, 192 (2010).
- [33] G.-Q. Zhang und J. Q. You, *Phys. Rev. B* **99**, 054404 (2019).
- [34] X.-Y. Lü, H. Jing, J.-Y. Ma, und Y. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 253601 (2015).
- [35] C. Wolff, C. Tserkezis, und N. Asger Mortensen, *Nanophotonics* (2019).
- [36] B. Peng, S. K. Özdemir, F. Lei, F. Monifi, M. Gianfreda, G. L. Long, C. M. B. Shanhui Fan and Franco Nori, und L. Yang, *Nature Physics* **10**, 394 (2014).
- [37] G. Vidal und R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [38] M. D. Reid und P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2731 (1988).
- [39] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, und R. J. Schoelkopf, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1155 (2010).
- [40] V. Giovannetti, S. Mancini, und P. Tombesi, *Europhysics Letters (EPL)* **54**, 559 (2001).
- [41] S. Joshi und I. Galbraith, *Phys. Rev. A* **98**, 042117 (2018).
- [42] M. Müller und I. Rotter, *Journal of Physics A: Mathematical und Theoretical* **41**, 244018 (2008).

- [43] G. Demange und E.-M. Graefe, Journal of Physics A: Mathematical und Theoretical **45**, 025303 (2011).
- [44] W. D. Heiss, Journal of Physics A: Mathematical und Theoretical **45**, 444016 (2012).
- [45] G.-Q. Zhang und J. Q. You, Phys. Rev. B **99**, 054404 (2019).
- [46] T. Kato, Perturbation theory for linear operators (Springer (Berlin, Heidelberg), 1995) S. 65 ff.
- [47] K. Knopp, *Theory of functions II* (Mineola, 1996) S. 126–129.
- [48] K. Lamotke, *Riemannsche Flächen* (Springer, Berlin, 2009) S. 124.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Prof. Fehske für die Vergabe dieses interessanten Themas bedanken, besonders aber für die umfassende Betreuung während des Seminars und der Erstellung der Arbeit. Er stand zu jeder Tageszeit mit Rat und Tat bereit. Auch bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die mir - nicht nur mit technischer Hilfestellung - das Erstellen der Arbeit erleichtert haben, möchte ich mich bedanken.

Darüber hinaus gilt meinen Eltern, nicht nur für die finanzielle Unterstützung während des Studiums, mein allergrößter Dank.