

Universität Greifswald
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Physik

Unordnungseffekte in Floquet-topologischen Isolatoren

Bachelorarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Erstgutachter:
Herr Prof. Dr. Holger Fehske
Zweitgutachter:
Herr Prof. Dr. Konrad Waldorf

vorgelegt von:
Lennard Berg

geboren am 03.07.1998 in Neubrandenburg

Greifswald, 27. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
1. Topologische Eigenschaften periodisch getriebener Systeme	1
1.1. Modellbildung	1
1.2. Topologie in Floquet-Systemen	5
2. Ladungstransport in Floquet-topologischen Isolatoren	9
2.1. Ladungstransport in Floquet-Bloch-Systemen	9
2.2. Zugang von Thouless - adiabatische Anregung	10
2.3. Zugang von Laughlin - Quanten-Hall-Effekt	12
2.4. Nicht-adiabatische Effekte im Ladungstransport	14
3. Unordnungseffekte in Floquet-topologischen Isolatoren	17
3.1. Anderson-Lokalisierung	17
3.2. Anomaler Floquet-Anderson-Isolator	18
3.3. AFI-Modell mit Unordnung	19
3.4. Statistische Methoden zur Beschreibung ungeordneter Systeme	23
3.4.1. <i>Level spacing ratio</i>	23
3.4.2. <i>Inverse participation ratio</i>	24
3.5. Ladungstransport unter dem Einfluss von Unordnung	26
Zusammenfassung und Ausblick	35

Einleitung

Die Untersuchung topologischer Eigenschaften kondensierter Materie hat in den letzten Jahren aufgrund der Entdeckung einer neuen Materialklasse, den sogenannten topologischen Isolatoren, und der Notwendigkeit einer angepassten theoretischen Modellierung enorm an Bedeutung gewonnen [1–5]. Topologische Isolatoren zeigen eine Reihe exotischer Phänomene, die sich durch Universalität und Robustheit auszeichnen. Prominente Beispiele sind chirale Kantenzustände und die Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit [1, 3, 6–8]. Kurz nach der Entdeckung dieser Materialien gelang eine weitgehend vereinheitlichte theoretische Beschreibung [9–11]. Eine wichtige Grundlage bildet dafür die Volumen-Kanten-Korrespondenz, die topologische Eigenschaften des Volumens, in Form einer Invarianten, mit Effekten an der Kante des Systems verbindet. Mit Ausnahme des Quanten-Hall-Effektes [6] gestaltet sich der experimentelle Nachweis dieser Phänomene in realen Systemen relativ schwierig.

In jüngster Vergangenheit wird deshalb verstärkt ein gezieltes periodisches Treiben benutzt, um verschiedene topologische Phasen in Materialien kontrolliert zu realisieren. Dabei wird das System einem externen periodisch oszillierenden Feld ausgesetzt, z. B. einem Photonenfeld, welches von einem Laser induziert wird. Im Rahmen der theoretischen Beschreibung ergibt sich dabei ein zeitlich periodischer Hamiltonian, welcher topologisch nicht triviale Phasen in den getriebenen Materialien beschreibt [12–19]. Experimentell ist dieses Vorgehen eine große Herausforderung: Dies begründet sich in den hohen Intensitäten und Frequenzen, welche benötigt werden, um das System signifikant zu beeinflussen. In Gasen aus ultrakalten Atomen, in photonischen Systemen sowie in Graphen konnte eine erfolgreiche Anwendung aber bereits realisiert werden [20–23].

Das vielleicht wichtigste Ergebnis bei der Charakterisierung topologischer Phasen in periodisch getriebenen Systemen war das Auffinden von anomalen Phasen, welche kein statisches Gegenstück aufweisen [24–28]. Diese anomalen Phasen sind durch nicht-triviale topologische Eigenschaften in ihrer Dynamik (innerhalb der Anregungsperiode) gekennzeichnet. Ein Beispiel dafür ist der anomale Floquet-Isolator (AFI) [25, 29, 30], welcher sich durch eine quantisierte Magnetisierungsdichte auszeichnet. Für dieses System wurden Treiberprotokolle für eine experimentelle Realisierung in ultrakalten Atomen und photonischen oder akustischen Systemen entwickelt [31–34].

Das Zusammenspiel von Unordnung und periodischem Treiben kann weitere topologisch nicht-triviale Strukturen hervorbringen. So ist es möglich, dass robuste chirale Kantenzustände in einem zweidimensionalen getriebenen System existieren, in dem alle Volumenzustände Anderson-lokalisiert sind. Ein derartiges System wird als anomaler Floquet-Anderson-Isolator (AFAI) bezeichnet [25]. Diese Situation ist im statischen Fall nicht möglich. Dort sind delokalisierte Kantenzustände notwendigerweise an die Existenz delokalisierte Volumenzustände bei gewissen Energien gekoppelt [35]. Umgangen wird dies beim AFAI durch die Periodizität der Quasienergien: Die Kantenzustände bleiben bei allen Quasienergien bestehen und umhüllen die sogenannte Floquet-Brillouin-Zone (FBZ) vollständig. Darüber hinaus ergibt die Kombination dieser neuartigen chiralen Kantenzustände mit vollständig lokalisierten Volumenzuständen ein faszinierendes, vollständig topologisches, Transportphänomen: ein quantisierter nicht-adiabatischer Ladungstransport [25].

Ziel dieser Arbeit ist die Diskussion der topologischen Eigenschaften des AFAI, insbesondere im Hinblick auf den Ladungstransport. Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Kapitel 1: Zunächst wird das AFI-Modell [24] zur Beschreibung der topologischen Eigenschaften periodisch getriebener Systemen eingeführt. Anschließend wird eine topologische Klassifizierung periodisch getriebener Systeme vorgenommen. Dabei liegt der Fokus auf einem Verständnis der Invariante, welche mit der Dynamik im System assoziiert werden kann.

Kapitel 2: Untersucht wird der Ladungstransport in statischen sowie in periodisch getriebenen Systemen. Dabei wird der Zugang von Thouless zum quantisierten adiabatischen Ladungstransport besprochen sowie der Zugang von Laughlin zur Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit [36–38]. Für periodisch getriebene Systeme wird der Verlust der Quantisierung des Transportes im nicht-adiabatischen Fall diskutiert. Dies wird im Detail anhand des AFI-Modells besprochen und mittels numerischer Rechnungen gestützt.

Kapitel 3: Abschließend studieren wir die Wirkung von Unordnungseffekten in Floquet-topologischen Isolatoren (FI). Zunächst wird eine kurze Einführung zur Anderson-Lokalisierung gegeben [39, 40]. Im Anschluss werden zwei unterschiedliche Unordnungsarten im Hinblick auf deren Auswirkung auf die AFAI-Phase in FI untersucht. Ziel ist ein besseres Verständnis des Auftretens und der Konsequenzen vom quantisierten Ladungstransport im AFAI. Dazu wird eine umfangreiche numerische Untersuchungen für das AFI-Modell präsentiert.

Topologische Eigenschaften periodisch getriebener Systeme

1.1. Modellbildung

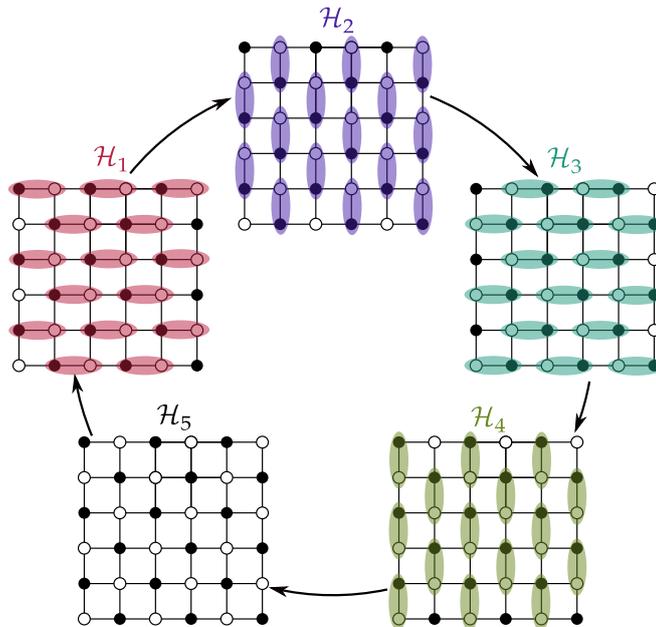


Abbildung 1.1.: Schematische Darstellung des Anregungsprotokolls [24]. Die „Hüpf“-Amplituden werden zeitlich periodisch variiert. Das Untergitterpotential Δ differenziert die zwei Typen von Gitterplätzen auf dem *bipartiten* Gitter (gefüllte oder ungefüllte Kreise). Während der ersten vier Zeitschritten wird jeweils nur eine der vier Kopplungstypen zwischen verschiedenen Gitterplätzen (farbige Ellipsen) erlaubt. Im fünften und letzten Zeitschritt werden alle Kopplungen abgestellt und es wirkt nur das Untergitterpotential.

FI weisen topologisch nicht-triviale Phasen auf, welche durch das periodische Treiben generiert werden. Von besonderem Interesse ist dabei der AFI, dessen topologische Phase kein Gegenstück in statischen Systemen besitzt. Ein einfaches Modell eines AFI wurde von Rudner et al. [24] eingeführt.

In diesem Kapitel wird anhand des Modells erklärt, was ein AFI ist, die Volumen-Kanten-Korrespondenz in periodisch getriebenen Systemen beschrieben und die Unterschiede zu topologischen Phasen in statischen Systemen herausgearbeitet.

Das Modell aus Ref. [24] (im folgenden AFI-Modell genannt), beschreibt ein periodisches Anregungsprotokoll auf einem quadratischen Gitter. Die gesamte Anregungsperiode (T) ist in fünf gleich große Zeitschritte unterteilt. In jedem dieser Schritte sind nur ausgewählte Kopplungen zwischen verschiedenen Gitterplätzen erlaubt. In Abbildung 1.1 sind die ausgewählten Kopplungen farbig hinterlegt und die Untergitterstruktur wird durch gefüllte (A-Untergitter) bzw. ungefüllte Kreise (B-Untergitter) dargestellt. Im Folgenden wird das Gitter mit Γ bezeichnet, die Einschränkungen auf die Untergitter A und B sind durch die Indizierung $\Gamma_{A/B}$ gekennzeichnet.

Der Hamiltonian des AFI-Modells lässt sich als ein „tight-binding“-Modell in zweiter Quantisierung darstellen: (in der gesamten Arbeit wird $\hbar = e = 1$ gesetzt)

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{n=1}^5 \mathcal{H}_n, \text{ mit } \mathcal{H}_n(t) = f_n(t) \sum_{\mathbf{r} \in \Gamma} -\mathcal{J}(c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}+\gamma_n} + c_{\mathbf{r}+\gamma_n}^\dagger c_{\mathbf{r}}) + (-1)^{\eta_{\mathbf{r}}} \Delta c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Dabei ist \mathcal{J} das Transferintegral, Δ das Untergitterpotential, $\eta_{\mathbf{r}} = 1$, falls $\mathbf{r} \in \Gamma_A$ und $\eta_{\mathbf{r}} = 0$, falls $\mathbf{r} \in \Gamma_B$. Weiterhin sind γ_n die Gittervektoren $\gamma_1 = (1, 0) = -\gamma_3$ und $\gamma_2 = (0, 1) = -\gamma_4$. Die $c_{\mathbf{r}}^{(\dagger)}$ sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren eines Zustandes (Teilchens) auf dem Gitterplatz $\mathbf{r} \in \Gamma$. Die Funktion $f_n(t)$ gibt an, welche Kopplungen im Anregungsprotokoll aktiv sind (siehe Abbildung 1.1).

$$f_n(t) = \begin{cases} 5/T & , \text{ falls } (n-1)T/5 \leq t < nT/5, \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, \text{ mit } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Die Wahl des Faktors $5/T$ ist der Konvention geschuldet, dass die sogenannte „perfekte Kopplung“ durch $\mathcal{J} = \pi/2$ gegeben ist.

Zur Untersuchung der Dynamik des Systems wird der Zeitentwicklungsoperator $\mathcal{U}(t)$ verwendet. Dieser ist wie üblich durch

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t \mathcal{H}(t') dt' \right\} \quad (1.3)$$

gegeben, wobei \mathcal{T} der Zeitordnungsoperator ist. Aufgrund der zeitlichen Konstanz von $\mathcal{H}_i(t) = \mathcal{H}_i$ im jeweiligen Zeitschritt kann der Zeitentwicklungsoperator in eine Produktdarstellung

$$\mathcal{U}(T) = \mathcal{U}_5 \mathcal{U}_4 \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \text{ mit } \mathcal{U}_i = e^{-i\mathcal{H}_i T/5} \quad (1.4)$$

aufgespalten werden. Die Produktgestalt trägt der natürlichen Chiralität des Systems Rechnung, es kann zwischen zwei äquivalenten, chiral jedoch unterschiedlichen, Anregungsabläufen gewählt werden: $(5-4-3-2-1)$ oder $(1-2-3-4-5)$.

Floquet-Bloch-Hamiltonian Falls das System mit zusätzlicher Translationssymmetrie in x - und y -Richtung betrachtet wird, d. h. unter periodischen Randbedingungen (PBC), kann Gl. (1.1) in den \mathbf{k} -Raum transformiert werden. Dafür werden die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren des Ortsraumes mittels einer diskreten Fourier-Transformation in die zugehörigen Operatoren des reziproken \mathbf{k} -Raumes überführt. Der transformierte Hamiltonian besitzt

$$\mathcal{H}_n(t) = f_n(t) \sum_{\mathbf{k}} -\mathcal{J} \left(e^{i\langle \mathbf{k}, \gamma_n \rangle} a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + e^{-i\langle \mathbf{k}, \gamma_n \rangle} b_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) + \Delta (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) \quad (1.5)$$

als Darstellung. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 , $a_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}$ und $b_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}$ sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren eines Zustandes (Teilchens) mit Impuls \mathbf{k} auf dem Untergitter Γ_A respektive Γ_B . Die $\mathcal{H}_n(t)$ können in Matrixform dargestellt werden:

$$\mathcal{H}_n(t, \mathbf{k}) = -\mathcal{J} \left(e^{i\langle \mathbf{k}, \gamma_n \rangle} \sigma^+ + e^{-i\langle \mathbf{k}, \gamma_n \rangle} \sigma^- \right) + \Delta \sigma^z. \quad (1.6)$$

Dabei ist $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$, mit $\sigma^{x,y,z}$ als Pauli-Matrizen.

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } (\sigma^j)^2 = \sigma^0 = \mathbb{1}, j = x, y, z. \quad (1.7)$$

Das Matrixexponential dieser Matrizen ist bekannt (siehe Anhang A) und die Darstellung der $\mathcal{U}_n(T/5)$ ergibt sich zu

$$\mathcal{U}_n(T/5) = \begin{cases} -i\mathcal{J} \frac{\sin \mu}{\mu} (e^{i\langle \mathbf{k}, \gamma_n \rangle} \sigma^+ + e^{-i\langle \mathbf{k}, \gamma_n \rangle} \sigma^-) + \cos \mu \sigma^0 + \Delta \frac{\sin \mu}{\mu} \sigma^z & , \quad \text{falls } n \in \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{diag} (e^{-i\Delta}, e^{i\Delta}) & , \quad \text{sonst} \end{cases} . \quad (1.8)$$

Dabei ist $\mu = \sqrt{\Delta^2 + \mathcal{J}^2}$. Für das Parameterpaar $(\mathcal{J}, \Delta) = (\pi/2, 0)$ gilt $\mathcal{U}(T) = \mathbb{1}$. Damit kehrt jedes Teilchen, nach einer Periode, auf seinen Anfangsplatz zurück. Weiterhin ist für jeden Zeitschritt die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen zwischen gekoppelten Gitterplätzen bewegt, eins. Diese Situation bezeichnet die „perfekte Kopplung“.

Floquet-Theorie Für eine Beschreibung periodisch getriebener Systeme wird die Floquet-Theorie genutzt. Diese wurde im 19. Jahrhundert von GASTON FLOQUET für gewöhnliche Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten entwickelt [41]. In der Quantenmechanik kann sie benutzt werden, um die Schrödingergleichung

$$i\partial_t |\psi_\alpha(t)\rangle = \mathcal{H}(t) |\psi_\alpha(t)\rangle \quad (1.9)$$

für einen zeitlich periodischen Hamiltonian $\mathcal{H}(t+T) = \mathcal{H}(t)$ zu lösen. Für eine solche Situation gilt das Floquet-Theorem [42]:

Sei $\mathcal{H}(t)$ ein T -periodischer Hamilton-Operator. Dann existiert ein vollständig orthonormiertes Basissystem $\{|\psi_\alpha(t)\rangle\}$ derart, dass die $|\psi_\alpha(t)\rangle$

1. Lösungen der Gleichung (1.9) sind, und
2. eine Zerlegung

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha t} |\phi_\alpha(t)\rangle \text{ mit } |\phi_\alpha(t+T)\rangle = |\phi_\alpha(t)\rangle \quad (1.10)$$

besitzen. Dabei sind ε_α die Quasienergien und $|\phi_\alpha(t)\rangle$ die Floquet-Moden.

Das Bloch-Theorem entspricht damit dem Floquet-Theorem, für den Fall, dass das System translationsinvariant ist.

Die Quasienergien nehmen in periodisch getriebenen Systemen die Funktion der Energien ein. Sie ermöglichen, wie im statischen Fall, eine Organisation in Bändern $\{\varepsilon_\alpha\}_\alpha$, mit α als Bandindex. Das Quasienergiespektrum eines Floquet-Systems ist durch den Propagator einer Periode $\mathcal{U}(T)$ bestimmt. Zustände wie $|\psi_\alpha(t)\rangle$ werden Floquet-Zustände genannt. Weiterhin stellt das Floquet-Theorem nützliche Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators bereit. Falls ein zeitlich periodischer Hamiltonian vorliegt, besitzt dieser die Eigenschaft:

$$\mathcal{U}(T+t, T) = \mathcal{U}(t, 0) . \quad (1.11)$$

Ein Beweis dafür findet sich in Anhang A. Die Relation (1.11) führt zu

$$\mathcal{U}(mT+t, 0) = \mathcal{U}(mT+t, mT)\mathcal{U}(mT, 0) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}(T)^m . \quad (1.12)$$

Damit ist die Dynamik eines Floquet-Systems durch die Kenntnis des Zeitentwicklungsoperators für $0 \leq t \leq T$ für alle Zeiten t vollständig bestimmt. Das macht $\mathcal{U}(T)$ zum zentralen Objekt, wenn es um

die Beschreibung der stroboskopischen Dynamik von periodisch getriebenen Systemen geht.

Der Floquet-Zustand $|\psi_\alpha(t)\rangle$, ist Eigenzustand von $\mathcal{U}(T+t, t)$:

$$\mathcal{U}(T+t, t)|\psi_\alpha(t)\rangle = |\psi_\alpha(T+t)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha T} e^{-\varepsilon_\alpha t} |\phi_\alpha(T+t)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha T} e^{-\varepsilon_\alpha t} |\phi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha T} |\psi_\alpha(T)\rangle. \quad (1.13)$$

Damit kann die Spektraldarstellung von $\mathcal{U}(T)$ angegeben werden zu

$$\mathcal{U}(T) = \sum_\alpha e^{-i\varepsilon_\alpha T} |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha|. \quad (1.14)$$

Die Eigenwerte $e^{-i\varepsilon_\alpha T} \in U(1)$ (mit $U(N)$ als unitäre Gruppe) liegen auf dem komplexen Einheitskreis. Dies stellt einen wichtigen Unterschied im Vergleich zu statischen Systemen dar. Dort ist der Hamiltonian der das System charakterisierende Operator und damit das Eigenwertspektrum sowohl reell als auch beschränkt. In Floquet-Systemen handelt es sich hingegen um ein periodisches, unbeschränktes Spektrum. Die daraus resultierenden Konsequenzen werden später diskutiert.

Falls ε_α die Quasienergie zu $|\psi_\alpha(t)\rangle$ ist, so ist $\varepsilon_\alpha + n\Omega$ es auch, mit $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\Omega = 2\pi/T$ die Anregungsfrequenz ist. Dies führt zu einer Situation, wie sie vom Bloch-Theorem bekannt ist. Dort liegt eine Periodizität in den Quasiimpulsen vor. Dies ermöglicht eine Beschränkung auf die Brillouin-Zone (BZ). Hier können analog die Quasienergien auf die FBZ beschränkt werden. Dabei werden nur Quasienergien ε , die im Intervall der Breite Ω liegen: $[-\Omega/2, \Omega/2] = [-\pi/T, \pi/T]$, betrachtet.

Floquet-Theorie für das AFI-Modell Mittels der Floquet-Theorie kann das Quasienergiespektrum des AFI-Modells (1.8) bestimmt werden. Dabei wird eine Streifengeometrie betrachtet, wobei das System in x -Richtung unendlich ausgedehnt und in y -Richtung endlich ist (dies wird durch $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T)$ beschrieben). Eine schematische Darstellung der Propagation eines Teilchens, welches an verschiedenen Positionen auf dem Gitter (perfekte Kopplung) initialisiert wird, ist in Abbildung 1.2 a) gezeigt. Zu sehen ist, dass ein Teilchen, welches am Anfang am oberen Rand lokalisiert ist, exakt zwei Gitterplätze nach rechts läuft. Ebenso ist zu erkennen, dass ein Teilchen im Volumen nach einer Periode auf seine Ausgangsposition zurückkehrt, was $\mathcal{U}(T) = \mathbb{1}$ widerspiegelt. Die Chiralität der Kantenzustände ist von der Abfolge des Anregungsprotokolls abhängig. Würde dieses in umgekehrter Abfolge genutzt werden, so würde das Teilchen am oberen Rand nach links propagieren, die Teilchen im Volumen kehren weiterhin auf ihren Anfangsplatz zurück.

Das Quasienergiespektrum in der FBZ ist in Abbildung 1.2 b) gezeigt. Da $\mathcal{U}(T) = \mathbb{1}$ für Zustände im Volumen gilt, sehen wir diese im Spektrum als $\varepsilon(k_x) = 0$. Weiterhin sind zwei entgegengesetzt propagierende Zustände zu erkennen, mit linearer Dispersionsrelation $\varepsilon_\alpha(k_x) = \pm 2/T$, welche Eigenwerte in der Bandlücke bei $\varepsilon = \pm\pi/T$ haben. Damit sind diese Zustände zwangsläufig an der Kante des Systems lokalisiert. Da die Bänder der beiden Kantenzustände einen echten Schnittpunkt aufweisen, müssen sie räumlich separiert sein (einen verschwindenden Überlapp besitzen). Dies wird in der schematischen Darstellung in Abbildung 1.2 a) gezeigt, sodass ein Zustand auf der oberen und der andere auf der unteren Kante lokalisiert ist. Die beiden Kantenzustände kreuzen die Bänder des Volumens, jedoch ohne zu koppeln (d. h. es erfolgt keine Hybridisierung), weil die Volumenzustände vollständig lokalisiert (nicht-dispersiv) sind. Das Volumen kann in diesem Fall keine delokalisierten Zustände beherbergen. Für nicht-perfekte Kopplung gilt $\mathcal{U}(T) \neq \mathbb{1}$. In diesem Fall sind die Volumenbänder dispersiv und die Kantenzustände können diese nicht ohne eine Hybridisierung von Kanten- und Volumenzuständen kreuzen.

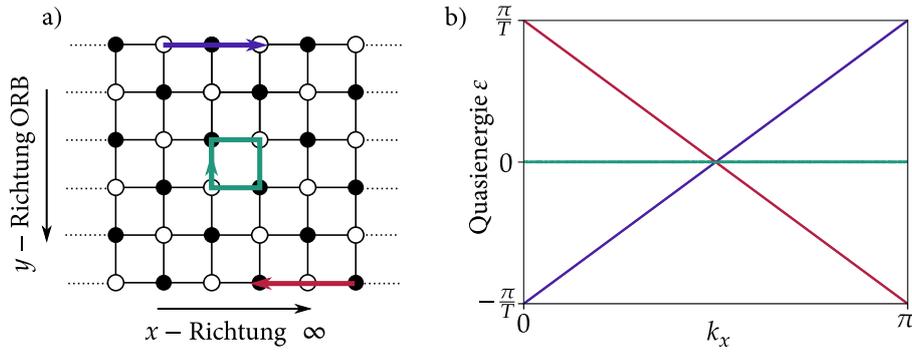


Abbildung 1.2.: Linkes Bild: System mit offenen Randbedingungen in y -Richtung und unendlicher Ausdehnung in x -Richtung. Schematisch sind ausgewählte Propagationen (perfekte Kopplung) dargestellt: für Teilchen initialisiert auf dem oberen Rand (blau), unteren Rand (rot) oder im Volumen (grün). Rechtes Bild: Quasienergiespektrum von $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T)$ für $(\mathcal{J}, \Delta) = (\pi/2, 0)$. Die Farben indizieren die Lokalisierung auf dem Gitter, entsprechend a).

1.2. Topologie in Floquet-Systemen

Im Zuge der topologischen Charakterisierung von Quanten-Hall-Systemen wurde man auf die Volumen-Kanten-Korrespondenz geführt, welche eine topologische Invariante des Volumens mit der Zahl an Kantenzuständen in einer Bandlücke in Verbindung setzt. Konkret konnte die Hall-Leitfähigkeit mit der Chern-Zahl des Systems identifiziert werden, was zur Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit in Einheiten von e^2/h führte [6, 7].

Ab diesem Abschnitt bezeichnet \mathcal{U} den Zeitentwicklungsoperator des Systems unter PBC; $\tilde{\mathcal{U}}$ gibt den entsprechenden Operator in Zylindergeometrie (PBC in einer Ortskoordinate) an. Die assoziierten Quasienergien, sowie der Hamiltonian werden analog bezeichnet.

Chern-Zahl In statischen Systemen ist die Chern-Zahl [7] die Invariante, welche die Volumen-Kanten-Korrespondenz charakterisiert. Für ein Floquet-System, welches eine zusätzlich Translationsinvarianz im Ort aufweist $\mathcal{H}(r + \gamma, t) = \mathcal{H}(r, t)$, $\gamma \in \Gamma$, kann die Chern-Zahl für eine fixierte Zeit t , analog zum statischen Fall, berechnet werden. Es sei $|\psi_\alpha(\mathbf{k}, t)\rangle$ ein Floquet-Bloch-Zustand und $\mathcal{A}_\alpha = i\langle\psi_\alpha(\mathbf{k}, t)|\nabla_{\mathbf{k}}|\psi_\alpha(\mathbf{k}, t)\rangle$ der Berry-Zusammenhang:

$$\mathcal{C}_\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} (\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathcal{A}_\alpha) d^2k = -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} \Omega_\alpha d^2k \in \mathbb{Z}. \quad (1.15)$$

Dabei ist $\Omega_\alpha = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathcal{A}_\alpha$ die Berry-Krümmung und α der Bandindex. Die Chern-Zahl gibt an wie viele Zustände in das α -te Band von unten eintreten und es nach oben verlassen. Die Chern-Zahl selbst ist die Differenz.

In Floquet-Systemen ist die Chern-Zahl keine geeignete Invariante. Abbildung 1.2 b): Die Bänder des Volumens sind bei $\epsilon = 0$ vollständig kollabiert, was eine triviale Chern-Zahl des Bandes erfordert. Angenommen die Chern-Zahl würde die Anzahl an Kantenzuständen in der Bandlücke (hier $\epsilon = \pm\pi/T$) widerspiegeln, so ist der Widerspruch offensichtlich. Die Anwesenheit von Kantenzuständen im Fall einer trivialen Chern-Zahl, ist eine Eigenschaft des AFI.

Im Folgenden wird die Beschreibung der Volumen-Kanten-Korrespondenz für periodisch getriebene Systeme in Anlehnung an Ref. [24] dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, dass $\mathcal{U}(T)$ nur die Information über den Endzustand der Propagation enthält, aber nicht über die Dynamik der gesamten Periode.

Im Falle der perfekten Kopplung, kann die Abfolge des Anregungsprotokolls umgedreht werden, dies führt auf den gleichen Volumenpropagator $\mathcal{U}(T) = \mathbb{1}$, aber zu einer Änderung der Chiralität der Kantenzustände. Dies zeigt, dass alle Informationen über die Dynamik in einer Anregungsperiode benötigt werden.

Homotopie Invarianten Das Quasienergiespektrum, welches von einem lokal statischen Hamiltonian erzeugt wird, kann sich nicht um die FBZ winden. Falls $\mathcal{H}_s(k_x)$ der Hamiltonian des statischen Systems ist, so ist der zugehörige Propagator $e^{-it\mathcal{H}_s(k_x)}$. Damit sind die Quasienergien ε_{α,k_x} gleich den Energieeigenwerten E_{α,k_x} von $\mathcal{H}_s(k_x)$. Da die E_{α,k_x} stetige Funktionen in k_x sind, ist keine Windung um die FBZ möglich. Für periodisch getriebene Systeme ist eine solche nicht-triviale Windung möglich. Dies wird den Ausgangspunkt bilden, um Kantenzustände in Floquet-Systemen zu beschreiben.

Die physikalische Natur von nicht-trivialen Quasienergie-Windungszahlen ist eng an die Dynamik gekoppelt. Betrachtet wird ein periodisch getriebenes System unter PBC in x -Richtung, welches durch den Propagator $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, t)$ beschrieben wird. Die Gruppengeschwindigkeit des α -ten Bandes ist $v_g^\alpha = \partial_{k_x} \tilde{\varepsilon}_\alpha$. Damit ist die mittlere Gruppengeschwindigkeit (in einer Periode)

$$\bar{v}_g^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{k_x} \tilde{\varepsilon}_\alpha dk_x = \frac{\nu_{k_x}^\alpha}{T} \text{ mit } \nu_{k_x}^\alpha = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{k_x} \tilde{\varepsilon}_\alpha dk_x . \quad (1.16)$$

Die mittlere Gruppengeschwindigkeit ist demnach proportional zur Windungszahl $\nu_{k_x}^\alpha$ des α -ten Floquet-Bandes. Damit werden, von einem vollständig gefüllten Floquet-Band, $\nu_{k_x}^\alpha$ Einheiten an Ladung in k_x -Richtung pro Periode transportiert. Der Begriff der Quasienergie-Windung legt eine Definition der topologischen Invariante der Form

$$\nu_{k_x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{U}}(k_x, T) \partial_{k_x} \tilde{\mathcal{U}}(k_x, T) \right\} dk_x \quad (1.17)$$

nahe [19]. Aus physikalischer Sicht beschreibt diese Zahl die Netto-Windungszahl aller Floquet-Bänder von $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T)$. Diese Invariante verschwindet immer, da das Quasienergiespektrum, erzeugt von einem lokalen Hamiltonian, keine Netto-Windungszahl aufweisen kann [43] (Anhang IV). Wird die Spektraldarstellung von $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T)$ (siehe Gl. (1.14)) in Gl. (1.17) eingesetzt, so wird die Identifikation mit Quasienergie-Windungen erhalten. Das Resultat, dass diese Invariante die Anzahl an Kantenzuständen beschreiben kann, geht auf Ref. [24] zurück. Dort wurde gezeigt, dass unter der Bedingung $\mathcal{U}(k_x, k_y, 0) = \mathcal{U}(k_x, k_y, T) = \mathbb{1}$, mit $\mathcal{U}(k_x, k_y, t)$ als Propagator des System unter PBC, $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T)$ als Blockdiagonalmatrix

$$\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_1(k_x, T) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathcal{U}}_2(k_x, T) \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

darstellbar ist. Dabei wirkt $\tilde{\mathcal{U}}_1(k_x, T)$ an der oberen und $\tilde{\mathcal{U}}_2(k_x, T)$ an der unteren Kante des Zylinders. Durch die Anwendung von (1.17) auf $\tilde{\mathcal{U}}_{1/2}(k_x, T)$ wird die Anzahl der an der jeweiligen Kante lokalisierten Kantenzustände erhalten (mit einem Vorzeichen für die Chiralität). Es gilt demnach

$$\left| \nu_{k_x}^{1/2} \right| = n_{\text{edge}}^{1/2}, \quad (1.19)$$

mit n_{edge} als Anzahl der Kantenzustände. Es sei angemerkt, dass $\nu_{k_x}^1 + \nu_{k_x}^2 = 0$ gelten muss. Dies ist der unterschiedlichen Chiralität der Kantenzustände geschuldet.

Im AFI-Modell (perfekte Kopplung) kennen wir die Gruppengeschwindigkeit für Kantenzustände, $\partial_{k_x} \tilde{\epsilon}_{k_x, \alpha} = \pm 2/T$, ebenso wie für Volumenzustände $\partial_{k_x} \tilde{\epsilon}_{k_x} = 0$ (siehe Abbildung 1.2). Damit ergibt sich $\nu_{k_x}^\alpha = (-1)^\alpha$, wobei $\alpha = 0, 1$ die beiden Kantenzustände nummeriert. Dies bedeutet perfekt quantisierten Transport getragen durch die Kantenzustände.

Für die Definition einer Volumeninvariante, wurde

$$\mathcal{W}_3[\mathcal{U}] = \frac{1}{24\pi^2} \int_{[0,1]^3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \left\{ (\mathcal{U}^\dagger \partial_\alpha \mathcal{U})(\mathcal{U}^\dagger \partial_\beta \mathcal{U})(\mathcal{U}^\dagger \partial_\gamma \mathcal{U}) \right\} d\mu_\alpha \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

vorgeschlagen [24, 44]. Dabei ist $\alpha \in \{k_x, k_y, t\}$ und $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ ist der Levi-Civita-Tensor. Diese Invariante gibt eine Einordnung in die Homotopieklassen von $\pi_3(U(N))$ [45], da der Volumenpropagator als Abbildung $\mathbb{T}^3 \longrightarrow U(N)$ ($N \geq 2$) aufgefasst werden kann. Dabei ist \mathbb{T}^3 der 3-Torus.

Damit Gl. (1.20) quantisierte Werte annehmen kann, muss $\mathcal{U}(k_x, k_y, 0) = \mathcal{U}(k_x, k_y, T) = \mathbb{1}$ für alle $k_x, k_y \in \text{BZ}$ gelten. Falls der Volumenpropagator nach einer Periode nicht der Identität gleicht, kann dieser über die „pull-back“-Abbildung homotop auf die Identität abgeändert werden (siehe Anhang A Gl. (A.7)). Diese Abbildung ist explizit abhängig von der Quasienergie ε . In Ref. [24] konnte gezeigt werden, dass die \mathcal{W}_3 Invariante des deformierten Zeitentwicklungsoperators \mathcal{V}_ε die Anzahl der Kantenzustände in der Bandlücke bei ε wiedergibt:

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \mathcal{W}_3[\mathcal{V}_\varepsilon] = n_{\text{edge}}^\varepsilon. \quad (1.21)$$

Es folgt insbesondere, dass Gl. (1.20) die Volumen-Kanten-Korrespondenz in periodisch getriebenen Systemen wiederherstellt.

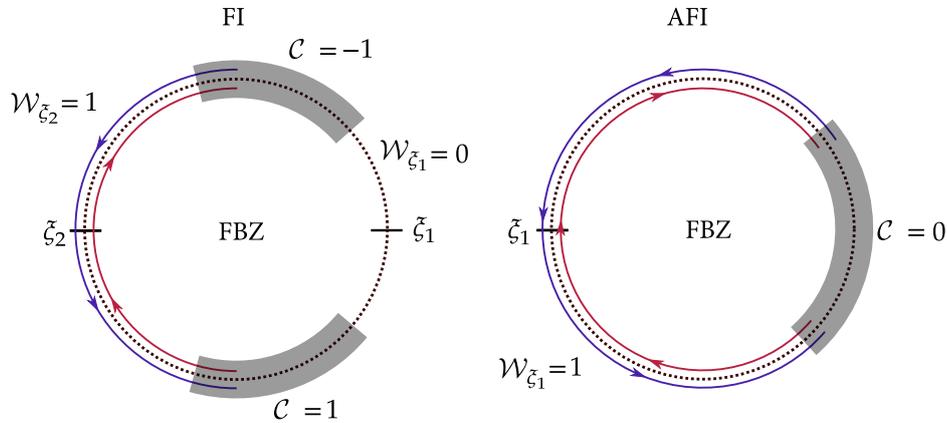


Abbildung 1.3.: Linkes Bild: Situation im FI. Rechtes Bild: Situation im AFI.

Damit kann eine genaue Definition des FI und des AFI vorgenommen werden (siehe Abbildung 1.3). Unter einem FI wird ein System verstanden, welches durch periodisches Treiben, ein Quasienergiespektrum ausbildet, welches a) spektrale Lücken aufweist (hier ξ_1, ξ_2) und b) Volumenbänder mit nicht-trivialen Chern-Zahlen besitzt. Dies impliziert eine nicht-triviale \mathcal{W}_3 Invariante. Ein AFI ist ein FI mit trivialen Chern-Zahlen und nicht-trivialer \mathcal{W}_3 Invariante.

Abschließend wird das Quasienergiespektrum von $\tilde{\mathcal{U}}(k_x, T)$ für die Streifengeometrie (Abbildung 1.4) für vier charakteristische Parameterpaare, die wir im folgenden für numerische Berechnungen verwenden werden, betrachtet. In den Bandstrukturen sind Zustände auf der oberen Kante in blau und auf der

unteren Kanten in rot dargestellt. Alle Parametersätze (Teilbilder a)-d)) besitzen triviale Chern-Zahlen, aber nicht-triviale Windungszahlen; damit ist immer der AFI realisiert. Für das Parameterpaar a) sei angemerkt, dass für jedes kleine $\Delta \neq 0$ die Chern-Zahl ± 1 beträgt und somit die Zuordnung zum FI gegeben ist. Der erste Bereich in Teilbild e) (links unten) ist topologisch trivial (Chern- als auch Windungszahlen sind null).

Tabelle 1.1.: Parameterpaare und farbliche Kennzeichnung in der Arbeit. Zur Darstellung der zugehörigen Quasienergiespektren siehe Abbildung 1.4

	a)	b)	c)	d)
\mathcal{J}	1.25	1.4	$\pi/2$	$\pi/2$
Δ	0	0	0	0.2
Farbe	türkis	rot	blau	grün

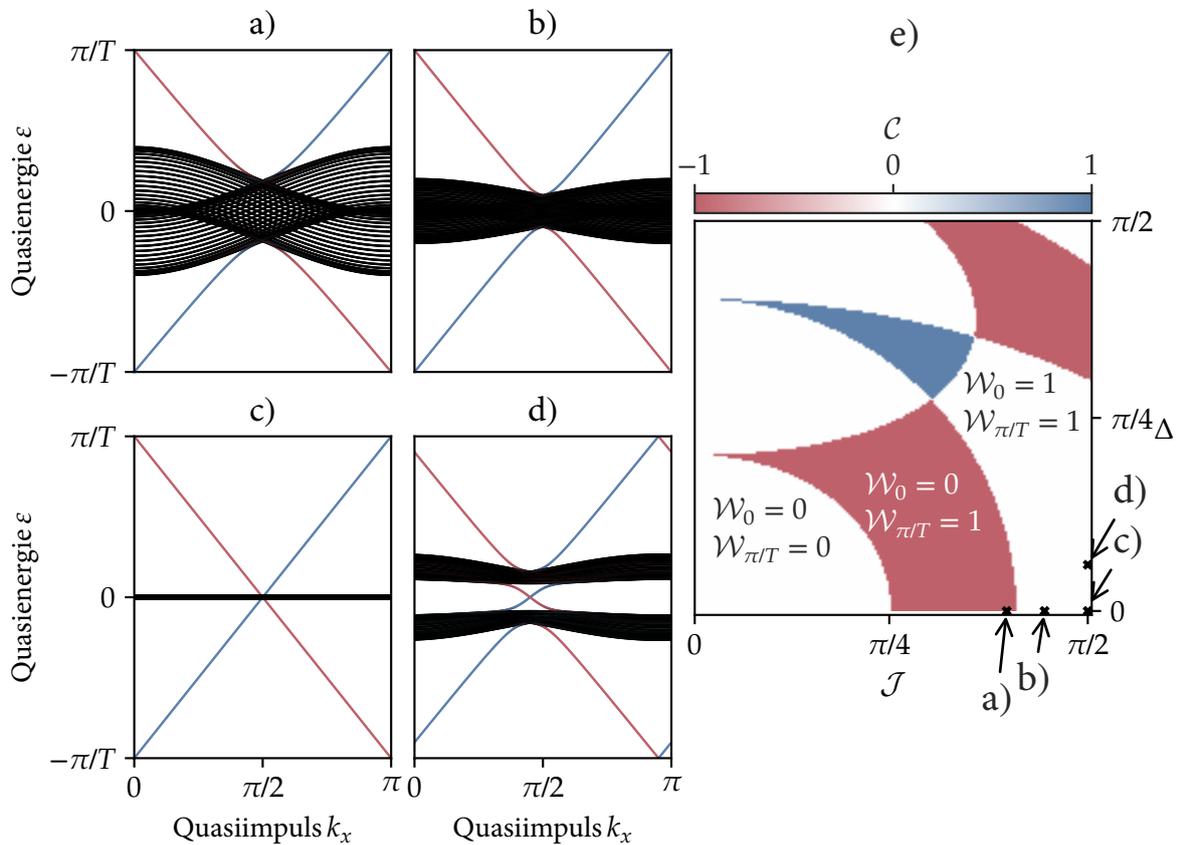


Abbildung 1.4.: a)-d) Bandstrukturen des AFI-Modells in Streifengeometrie für verschiedene Parameterpaare (\mathcal{J}, Δ) (siehe Tabelle 1.1). e) Chern-Zahl des oberen Bandes des AFI-Modells in Abhängigkeit der Parameter (\mathcal{J}, Δ) .

Ladungstransport in Floquet-topologischen Isolatoren

In diesem Kapitel wird die Quantisierung des adiabatischen Ladungstransportes [36] und des Quanten-Hall-Effektes [38] diskutiert. Es wird gezeigt, dass beide Effekte nur im adiabatischen Grenzfall Bestand haben. Neben der Quantisierung ist dabei insbesondere die Robustheit gegenüber z. B. Parametervariationen, Unordnung oder auch Wechselwirkungen, von Bedeutung [37]. Für das AFI-Modell wird die Auswirkung von nicht-adiabatischen Effekten auf den Transport untersucht. Analoge Resultate finden sich für 1D Systeme, ebenfalls unter nicht-adiabatischen Bedingungen, in Ref. [46, 47].

2.1. Ladungstransport in Floquet-Bloch-Systemen

Zunächst wird die grundlegende Gleichung für den Ladungstransport in Floquet-Bloch-Systemen abgeleitet. Dabei wird Ref. [17] gefolgt, analoge Resultate sind in Ref. [47, 48] zu finden.

Betrachtet wird ein translationsinvariantes, periodisch getriebenes System mit $\mathcal{H}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}, t + T) = \mathcal{H}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{r}, T + t)$. Weiterhin sei $|\Psi(0)\rangle$ ein typischer Anfangszustand, dessen exakte Struktur für das jeweilige Problem festgelegt werden kann. Aufgrund der Translationsinvarianz, kann der Stromoperator durch $\mathcal{J}(t) = i[\mathcal{H}(t), x(t)] = \partial_k \mathcal{H}(t)$ dargestellt werden. Der Erwartungswert des Stromes berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \mathcal{J}(t) | \Psi(t) \rangle &= \langle \Psi(0) | \mathcal{U}^\dagger(t, 0) \partial_k \mathcal{H}(t) \mathcal{U}(t, 0) | \Psi(0) \rangle \\ &= \text{Tr} \{ \mathcal{P} \mathcal{U}^\dagger(t, 0) \partial_k \mathcal{H}(t) \mathcal{U}(t, 0) \} , \end{aligned} \quad (2.1)$$

wobei \mathcal{P} den Projektor auf die anfänglich besetzten Bänder bezeichnet.

Mittels der Identität (siehe Anhang B)

$$\partial_k \mathcal{U}(T, 0) = -i \int_0^T \mathcal{U}(T, t) [\partial_k \mathcal{H}(t)] \mathcal{U}(t, 0) dt \quad (2.2)$$

ist die während einer Periode transportierte Ladung

$$Q(T) = \frac{1}{L} \int_0^T \langle \Psi(t) | \mathcal{J}(t) | \Psi(t) \rangle dt = \frac{i}{L} \text{Tr} \{ \mathcal{P} \mathcal{U}^\dagger(T) \partial_k \mathcal{U}(T) \}. \quad (2.3)$$

Diese Beziehung gilt allgemein, da weder der Anfangszustand noch die Art des Treibens spezifiziert wurde. Setzt man die Spektraldarstellung des Zeitentwicklungsoperators (1.14) (in Floquet-Basis) ein, ergibt sich:

$$Q(T) = \frac{i}{L} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \sum_{\alpha} \left((-i)T \partial_k \varepsilon_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| + \sum_{\beta \neq \alpha} e^{iT(\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\alpha})} |\phi_{\beta}\rangle \langle \phi_{\beta}| \partial_k \phi_{\alpha} \langle \phi_{\alpha}| \right) \right\}. \quad (2.4)$$

Dabei sind $|\phi_{\alpha}\rangle$ die Floquet-Moden. Im Folgenden wird $Q(T)$ in einen diagonalen Anteil

$$Q(T)^{\text{diag}} = \frac{T}{L} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \sum_{\alpha} \partial_k \varepsilon_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| \right\} \quad (2.5)$$

und einen nicht-diagonalen Anteil

$$Q(T)^{\text{off-diag}} = \frac{i}{L} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} e^{iT(\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\alpha})} |\phi_{\beta}\rangle \langle \phi_{\beta} | \partial_k \phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha} | \right\} \quad (2.6)$$

aufgespalten. Für ein nicht-entartetes Spektrum lässt sich zeigen, dass der nicht-diagonale Anteil $Q(NT)^{\text{off-diag}}/N$ für $N \rightarrow \infty$ verschwindet [49]. Der diagonale Anteil ist periodisch, womit $Q(NT)^{\text{diag}}/N = Q(T)^{\text{diag}}$ gilt. Die Rechnungen werden unter der Annahme eines nicht-entarteten Spektrums fortgesetzt und der nicht-diagonale Anteil vernachlässigt.

Für den Spezialfall, in dem der Anfangszustand aus einer Slater-Determinante von Eigenzuständen von $\mathcal{U}(T)$ besteht, gilt für den Anfangszustand

$$|\Psi(0)\rangle = \prod_{\alpha} \prod_{k \in \text{BZ}} f_{k,\alpha}^{\dagger} |0\rangle. \quad (2.7)$$

Dabei ist $f_{k,\alpha}^{\dagger}$ der Erzeugungsoperator eines Teilchens in der Floquet-Bloch-Mode $|\phi_{k,\alpha}\rangle$. Der Projektor, auf die eingangs besetzten Zustände ist durch

$$\mathcal{P} = \sum_{\alpha} \sum_{k \in \text{BZ}} |\phi_{k,\alpha}\rangle \langle \phi_{k,\alpha}| \quad (2.8)$$

gegeben. Wird dies in Gl. (2.5) eingesetzt und die Spur über Floquet-Bloch-Moden $|\phi_{\alpha,k}\rangle$ ausgeführt, folgt

$$Q(T) = \frac{T}{2\pi} \sum_{\alpha} \int_{\text{BZ}} \partial_k \varepsilon_{k,\alpha} dk \quad (2.9)$$

im thermodynamischen Limes. Diese Gleichung ist Ausdruck des Hellmann-Feynman-Theorems für Floquet-Systeme¹

2.2. Zugang von Thouless - adiabatische Anregung

Betrachtet wird ein 1D System unter PBC. Dieses steht unter dem Einfluss eines zeitlich langsam variierenden Potentials $V(x, t)$. Es wird die Periodizität des Potentials in der Zeit, mit Periode T , sowie im Ort x , mit Periode L , gefordert. Zur Herleitung der Ladungstransportgleichung wird dem Zugang von Thouless, unter Nutzung der bisher eingeführten Floquet-Theorie, gefolgt.

Der Grundzustand des Systems lässt sich über

$$|\Psi(0)\rangle = \prod_{\alpha} \prod_{k \in \text{BZ}} c_{\alpha,k}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.10)$$

beschreiben, wobei $c_{k,\alpha}^{\dagger}$ ein Teilchen im Bloch-Zustand $|u_{\alpha}(k)\rangle$ erzeugt. Für ein perfekt adiabatisch getriebenes System sollte der, sich zeitlich entwickelnde, Vielteilchenzustand $|\Psi(T)\rangle$ dem Grundzustand sehr nahe sein. Dieser unterscheidet sich durch eine geometrische $\gamma_{\alpha,k}(t)$ und eine dynamische Phase

¹Das Hellmann-Feynman-Theorem in statischen Systemen lautet $\langle \psi_{\alpha} | \partial_{\lambda} \mathcal{H} | \psi_{\alpha} \rangle = \partial_{\lambda} E_{\alpha}$ für einen Eigenzustand $|\psi_{\alpha}\rangle$ und Eigenwert E_{α} von \mathcal{H} . Die Verallgemeinerung auf Floquet-Systeme erfordert die Einführung eines neuen Skalarproduktes $\langle \langle \dots \rangle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \dots \rangle dt$. Damit ergibt sich das Floquet-Hellmann-Feynman-Theorem:

$$\langle \langle \phi_{\alpha} | \partial_{\lambda} \mathcal{H}_F | \phi_{\alpha} \rangle \rangle = \partial_{\lambda} \varepsilon_{\alpha}$$

mit $|\phi_{\alpha}\rangle$ als Floquet-Mode des Floquet-Hamilton-Operators \mathcal{H}_F

$\theta_{\alpha,k}(t)$, was durch das adiabatische Theorem begründet ist [50, 51]. Die geometrische Phase wurde erstmals von M. V. BERRY eingeführt [52]. Der zeitlich entwickelte Vielteilchenzustand lässt sich darstellen als

$$|\Psi(T)\rangle = \prod_{\alpha}^{\text{occ}} \prod_{k \in \text{BZ}} e^{i\gamma_{\alpha,k}(T)} e^{-i\theta_{\alpha,k}(T)} c_{\alpha,k}^{\dagger} |0\rangle, \quad (2.11)$$

mit

$$\gamma_{\alpha,k}(t) = \int_0^t \mathcal{A}_{\alpha,k}(t) dt \quad \text{und} \quad \theta_{\alpha,k}(t) = \int_0^t E_{\alpha}(t) dt. \quad (2.12)$$

Dabei ist $\mathcal{A}_{\alpha,k} = i\langle u_{\alpha}(k) | \partial_z u_{\alpha}(k) \rangle$ der Berry-Zusammenhang des Bloch-Zustandes. Im adiabatischen Limes sind die Einteilchenzustände ebenfalls Eigenzustände des Zeitentwicklungsoperators. Damit sind die Floquet-Moden des Systems die Eigenzustände des Hamiltonians. Die Quasienergien der Floquet-Moden sind über die Summe aus geometrischer und dynamischer Phase gegeben, sodass in erster Ordnung

$$\varepsilon_{\alpha,k} \approx \varepsilon_{\alpha,k}^0 = \frac{1}{T} \int_0^T (E_{\alpha,k}(t) + \mathcal{A}_{\alpha,k}(t)) dt \quad (2.13)$$

gilt. Da die momentanen Bloch-Zustände im adiabatischen Limes mit Floquet-Moden identifiziert werden können, kann Gl. (2.9) angewendet werden. Der diagonale Anteil des Ladungstransportes nach einer Periode lässt sich darstellen als:

$$Q(T) = \sum_{\alpha}^{\text{occ}} \int_{\text{BZ}} \frac{dk}{2\pi} \int_0^T (\partial_k E_{\alpha,k}(t) + i\langle u_{\alpha,k} | \partial_{tk}^2 u_{\alpha,k} \rangle + i\langle \partial_k u_{\alpha,k} | \partial_t u_{\alpha,k} \rangle) dt. \quad (2.14)$$

Aufgrund der k -Periodizität verschwindet der Term mit $\partial_k E_{\alpha,k}(t)$. Wird der zweite Term partiell integriert ergibt sich

$$Q(T) = \sum_{\alpha}^{\text{occ}} \int_{\text{BZ}} \frac{dk}{2\pi} \int_0^T i (\langle \partial_k u_{\alpha,k} | \partial_t u_{\alpha,k} \rangle - \langle \partial_t u_{\alpha,k} | \partial_k u_{\alpha,k} \rangle) dt = \sum_{\alpha}^{\text{occ}} \int_{\text{BZ}} \frac{dk}{2\pi} \int_0^T \Omega_{k,t}^{\alpha} dt. \quad (2.15)$$

Dies ist die Ladungstransportgleichung von Thouless [36]. Sie beschreibt den quantisierten Ladungstransport im perfekt adiabatischen Limes. Die Quantisierung geht darauf zurück, dass $\Omega_{k,t}^{\alpha}$ die Berry-Krümmung des α -ten Bloch-Zustandes ist. Dabei ist die Berry-Krümmung nicht, wie üblicherweise, abhängig von k_x und k_y , sondern von k und t . Das Integral lässt sich als Chern-Zahl auffassen, sodass $Q(T) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ gilt. Damit ist die transportierte Ladung quantisiert. Dies hat insbesondere zur Folge, dass eine Besetzung aller Bloch-Zustände verschwindenden Ladungstransport bedeutet.

Allgemein kann die Quantisierung des Thouless-Ladungstransportes, im Bild der topologischen Charakteristik periodisch getriebener Systeme, aufgefasst werden als Konsequenz einer nicht-trivialen Windungszahl der Quasienergiebänder. Somit besteht eine Korrespondenz zwischen der Dynamik des Systems und der Invariante ν_k .

Die Voraussetzung der perfekten Adiabaticität der Anregung ist essentiell für den quantisierten Transport. Abweichungen von der perfekten Adiabaticität würden zu Korrekturtermen höherer Ordnung für die zeitliche Entwicklung des Vielteilchenzustandes Anlass geben. Diese führen zu einem Verlust der Quantisierung [47, 53].

Gebrochene Translationsinvarianz Die hier angeführte Rechnung basiert auf der Translationsinvarianz des Systems. Im Falle von Unordnung kann der Quasiimpuls k nicht mehr als gute Quantenzahl

verwendet werden. Als Lösung wurde, in Ref. [37], die Einführung sogenannter „*twisted boundary conditions*“ (TBC) vorgeschlagen. Für eine 1D Kette mit diesen Randbedingungen gilt:

$$\psi(x + L) = e^{i\alpha} \psi(x). \quad (2.16)$$

wobei α ein Phasenparameter ist. In Ref. [37] wurde weiterhin gezeigt, dass im thermodynamischen Limes der exakte Wert von α nicht relevant ist. Dieses Resultat wird später erneut aufgegriffen. Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass sich, im adiabatischen Limes, die transportierte Ladung pro Periode als Integral über die Berry-Krümmung, in Abhängigkeit von α und t , darstellen lässt. Dies führt auf eine Chern-Zahl und somit zur Quantisierung der transportierten Ladung.

2.3. Zugang von Laughlin - Quanten-Hall-Effekt

Die Messergebnisse zum Quanten-Hall-Effekt [6] konnten von Laughlin als Konsequenz der Eichinvarianz der Mobilitätskante gedeutet werden [38]. Sein Argument führte dazu, dass die Existenz von delokalisierten Kantenzuständen Ergebnis einer nicht verschwindenden Hall-Leitfähigkeit ist. Diese Schlussfolgerung ist sowohl im geordneten als auch ungeordneten Fall anwendbar.

Betrachtet wird ein 2D System, welches aufgrund PBC in y -Richtung Zylindergeometrie aufweist. Der Umfang des Zylinders sei L_y . Dies ermöglicht die Einführung von k_y als gute Quantenzahl.

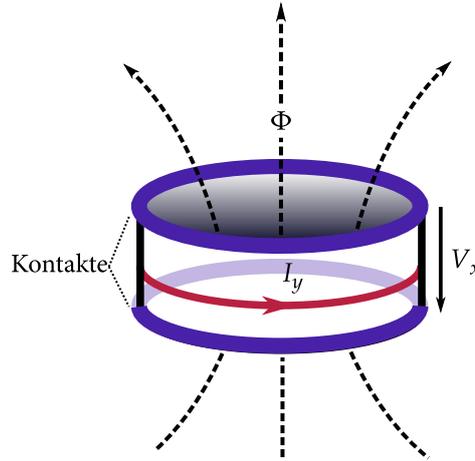


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der Quanten-Hall-Geometrie.

Nun wird, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, das System von einem Fluss Φ durchsetzt². Dieser Fluss geht über die Ersetzung

$$k_y \longmapsto k_y + \frac{2\pi}{L} \Phi \quad (2.17)$$

in den Hamiltonian des Systems ein. Weiterhin werden Kontakte an die offenen Kanten des Zylinders angebracht, um eine Spannung V_x senkrecht zu k_y anzulegen. Der Hall-Effekt liefert eine Relation zwischen der Potentialdifferenz, zwischen den Kontakten, und dem Strom I_y . Der Stromoperator \mathcal{I}_y kann über die Änderung des Hamiltonians bei Variation des Flusses Φ dargestellt werden:

$$\mathcal{I}_y = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_y} = \frac{L_y}{2\pi} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \Phi}. \quad (2.18)$$

²Dies ist eine etwas andere Variante, als sie in der Originalarbeit von Laughlin [38] verwendet wurde. Dort wurde ein magnetisches Feld senkrecht zum Mantel genutzt, was einem radialen Fluss entspricht.

Sei $|\Psi\rangle$ der momentane Grundzustand des Systems, so kann der Erwartungswert der y -Komponente des Stromoperators über das Hellmann-Feynman-Theorem berechnet werden:

$$\langle \Psi | \mathcal{J}_y | \Psi \rangle = \frac{\partial E}{\partial \Phi}. \quad (2.19)$$

Wird dieser Ausdruck, unter der Annahme einer langsamen (adiabatischen) Einbringung des Flusses Φ , diskretisiert, gilt

$$I_y = \frac{\Delta E}{\Delta \Phi}. \quad (2.20)$$

Dabei beschreibt ΔE die Änderung der Energie infolge des Flusses. Für den Fall, dass das System isolierend im Volumen ist, findet, außer eventuell an den Kanten, keine Veränderung statt. Solange das System topologisch trivial ist, wird sich aber auch dort nichts ändern.

Um dies zu zeigen, wird angenommen, dass im System N Zustände existieren, die das Fermi-Niveau kreuzen (N kann auch null sein). Sei weiterhin der Fluss exakt ein Flussquant $\Phi = \Phi_0 = 1$. Wird ein ganzzahliges Vielfaches des Flussquants adiabatisch eingebracht, so gilt: Das von $n\Phi_0$ durchflossene System ist eichäquivalent zum System ohne Fluss, denn das ganzzahlige Vielfache von Φ_0 kann durch eine Eichung entfernt werden $|\psi_\alpha\rangle \longmapsto e^{in\chi} |\psi_\alpha\rangle$. Für nicht-ganzzahlige Werte wären die Randbedingungen verletzt. Aufgrund der Eichäquivalenz sind die Spektren des Systems für $\Phi = 0$ und $\Phi = \Phi_0$ identisch. In Abbildung 2.2 ist der sogenannte Spektralfluss schematisch dargestellt. Der Totalraum ist der Hilbert-Raum, welcher zu jedem Wert von Φ eine Familie an Eigenzuständen beinhaltet. Diese unterscheiden sich durch eine Phase.

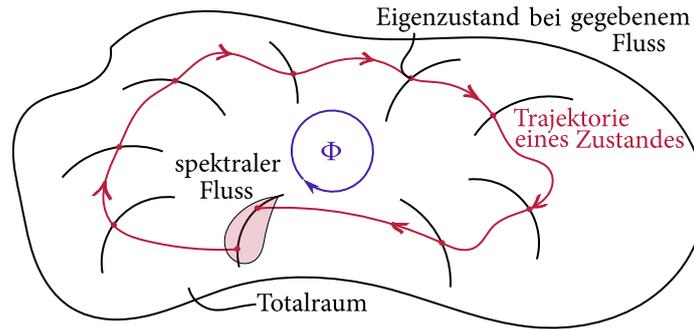


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung des spektralen Flusses bei adiabatischer Einbringung des Flussquants Φ_0 .

Das Spektrum des Hamiltonians geht bei diesem Prozess in sich selbst über. Wie verhalten sich die Zustände? Nach Gl. (2.17) ändert sich der Impuls eines besetzten Zustandes um $2\pi/L_y$. Das ist der Abstand (energetisch) zweier benachbarter Niveaus in k_y -Richtung. Jeder Zustand, der die Fermi-Energie kreuzt, besitzt dann ein besetztes Niveau oberhalb und ein unbesetztes unterhalb. Diese beiden Zustände aber sind räumlich separiert auf der oberen und unteren Kante des Zylinders. Da während des ganzen Prozesses eine Spannung V_x anliegt, muss die Energieänderung exakt derjenigen entsprechen, die nötig ist, um N Elektronen (bzw. Löcher) durch diese Potentialdifferenz zu bewegen: $\Delta E = NV_x$. Da $\Delta \Phi = 1$, folgt eine quantisierte Hall-Leitfähigkeit

$$\sigma_{xy} = I_y/V_x = N. \quad (2.21)$$

Im Ergebnis ist die Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit eine unmittelbare Konsequenz von Kantenzuständen, mit Energien innerhalb der Bandlücke der Volumenzustände. Dieses rein auf der Eichinvarianz basierende Ergebnis behält seine Gültigkeit bei Anwesenheit von Unordnung, vorausgesetzt die Mobilitätskante ist offen (siehe Abschnitt 3.1) und die Kantenzustände sind delokalisiert.

2.4. Nicht-adiabatische Effekte im Ladungstransport

Da die transportierte Ladung pro Periode in adiabatisch getriebenen Systemen quantisiert ist, soll nun verstanden werden, warum dies für den Fall, dass das System nicht-adiabatisch getrieben wird, nicht mehr möglich ist.

AFI-Modell Es wird der Ladungstransport im nicht-adiabatischen Fall, am Beispiel des AFI-Modells (siehe Abschnitt 1.1), untersucht. Die Berechnung des Ladungstransportes erfolgt wiederum für eine Zylindergeometrie, wobei der Zylinder von einem Fluss Φ durchsetzt wird, welcher parallel zur Zylinderachse gerichtet ist. Der Fluss tritt im Hamiltonian über $k_x \longmapsto k_x + \frac{2\pi}{L_x}\Phi$ auf. Durch geeignete Wahl der Eichung kann das Problem auf TBC zurückgeführt werden [25]. Anstatt jeder parallelen Linie eine Phase $e^{ix2\pi\Phi/L_x}$ zu geben, wird sich auf eine Linie, welche eine Phase $e^{i\Phi}$ erhält, beschränkt³. Dies entspricht exakt den TBC. Der Fluss Φ wird hier noch nicht benötigt, allerdings die Periodisierung in einer der Raumkoordinaten, da es sonst keine Möglichkeit gibt den Stromoperator im Ortsraum sinnvoll zu definieren (siehe Abschnitt 2.1). Um den Anfangszustand eindeutig zu charakterisieren, wird der Zylinder von der oberen Kante an bis zur Hälfte mit Elektronen besetzt. Des Weiteren sei der Anfangszustand als Slater-Determinante aus Floquet-Zuständen initialisiert, womit der Projektor auf die initialen Floquet-Zustände $|\psi_\alpha\rangle$ durch

$$\mathcal{P} = \sum_{\alpha\alpha'} c_{\alpha\alpha'} |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_{\alpha'}|, \quad \text{mit } c_{\alpha\alpha'} = \sum_{\mathbf{r} \in \Gamma_{\text{occ}}} \langle\psi_\alpha|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi_{\alpha'}\rangle \quad (2.22)$$

gegeben ist. Dabei enthält Γ_{occ} die Gitterplätze $\mathbf{r} \in \Gamma$, welche besetzt werden.

In der hier gewählten Situation können die Resultate aus Abschnitt 2.1 verwendet werden. Dafür muss sowohl die Ersetzung $k \equiv k_x \longmapsto \Phi$ als auch die Spur über Floquet-Moden $|\phi_\alpha\rangle$ durchgeführt werden. Da der Hamiltonian eine Summe über k_x und Φ ist, gilt

$$\mathcal{J}_x = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_x} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \Phi}. \quad (2.23)$$

Damit ergibt sich für Gl. (2.6)⁴:

$$Q(T)^{\text{diag}} = T \sum_{\alpha} n_{\alpha} \partial_{\Phi} \tilde{\epsilon}_{\alpha}, \quad (2.24)$$

$$Q(T)^{\text{off-diag}} = i \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \alpha' \neq \alpha}} e^{iT(\tilde{\epsilon}_{\alpha'} - \tilde{\epsilon}_{\alpha})} c_{\alpha\alpha'} \langle\phi_{\alpha}|\partial_{\Phi}\phi_{\alpha'}\rangle. \quad (2.25)$$

Dabei ist $n_{\alpha} = c_{\alpha\alpha}$ die Besetzungswahrscheinlichkeit des α -ten Floquet-Zustandes. Wir werden immer den kumulativen Ladungstransport über lange Zeiten betrachten, sodass

$$Q(NT)^{\text{diag}}/N = T \sum_{\alpha} n_{\alpha} \partial_{\Phi} \tilde{\epsilon}_{\alpha} = Q(T)^{\text{diag}} \quad (2.26)$$

und

$$Q(NT)^{\text{off-diag}}/N = \frac{i}{N} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \alpha' \neq \alpha}} e^{iNT(\tilde{\epsilon}_{\alpha'} - \tilde{\epsilon}_{\alpha})} c_{\alpha\alpha'} \langle\phi_{\alpha}|\partial_{\Phi}\phi_{\alpha'}\rangle \quad (2.27)$$

³Siehe Abschnitt 3.5, Abbildung 3.7.

⁴Der Faktor $1/L$ kommt in dieser Gleichung nicht vor. Dies hängt mit der Wahl der Eichung zusammen.

die Ausgangsgleichungen darstellen. Für ein nicht-entartetes Spektrum folgt $\lim_{N \rightarrow \infty} Q(NT)/N = Q(T)^{\text{diag}}$ (siehe Abschnitt 2.1).

Da der konkrete Wert von Φ im thermodynamischen Limes irrelevant ist, ergibt sich für die transportierte Ladung

$$Q(T)^{\text{diag}} = \frac{T}{2\pi} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int_0^{2\pi} \partial_{\Phi} \tilde{\epsilon}_{\alpha} d\Phi. \quad (2.28)$$

Dabei tritt die Windungszahl des α -ten Floquet-Bandes um die FBZ, bei Variation des Flusses von 0 zu 2π , auf. Da die Quasienergien glatte Funktionen von Φ sind und für $\Phi = 0$ und 2π übereinstimmen müssen, kann eine Quantisierung der Windungszahl gefolgert werden. Im Folgenden werden Volumen- und Kantenzustände getrennt betrachtet. Ein Volumenzustand kann dispersiv auf den Fluss reagieren, jedoch kann er keine nicht-triviale Windung aufweisen, womit $\partial_{\Phi} \tilde{\epsilon}_{\alpha} \approx 0$ gilt. Für den Fall $\mathcal{U}(T) = \mathbb{1}$, ist das Volumenband nicht-dispersiv und die Kantenzustände kreuzen dies ohne jegliche Kopplung (Hybridisierung). Dies impliziert eine stetige Windung der Kantenzustände um die FBZ. Für diesen Fall könnte also höchstens die Besetzungswahrscheinlichkeit eine Abweichung verursachen. Dies ist in der gewählten Variante der Besetzung initialer Zustände nicht möglich. Da die gesamte obere Hälfte des Zylinders mit Teilchen besetzt ist, ist ein Kantenzustand, welcher auf der oberen bzw. unteren Kante lokalisiert ist, mit Wahrscheinlichkeit eins bzw. null besetzt.

Für den Fall eines dispersiven Volumenbandes $\mathcal{U}(T) \neq \mathbb{1}$ können die Kantenzustände das Band nicht kreuzen, es kommt zu einer Kopplung zwischen dem Volumen und den Kanten. Damit existiert implizit eine Kopplung zwischen beiden Kanten. Der Zustand muss also das Volumenband passieren. Dort sind vermiedene Kreuzungen vorhanden, welche kleine Bandlücken darstellen. Diese öffnen sich an Resonanzpunkten (für $\Omega > 0$), welche einen Entartungspunkt von Zuständen mit nicht verschwindendem Überlapp darstellen. Es konnte gezeigt werden, dass die Bandlücke, welche sich dort öffnet, exponentiell klein in $1/\Omega$ ist [54].

Zusammenfassend kann gefolgert werden: Die vermiedenen Kreuzungen verursachen exponentiell kleine Abweichungen in der Windungszahl. Die Größe der Bandlücken steht im Zusammenhang mit der Frequenz, mit der das System getrieben wird, und die Abweichung des Transportes von der Quantisierung ergibt sich als Summe über alle Bandlücken. Ein Floquet-Band kann sich nicht stetig um die FBZ winden [46, 47, 55].

Angewandt auf das AFI-Modell bedeutet dies einen Verlust der Quantisierung des Ladungstransportes abseits perfekter Kopplung.

Numerische Betrachtung Für die numerische Berechnung wird folgende Darstellung der Transportgleichungen verwendet (siehe Anhang B):

$$Q(T) = i \sum_{\alpha\alpha'} c_{\alpha\alpha'} \langle \psi_{\alpha} | \tilde{\mathcal{U}}^{\dagger}(T) \partial_{\Phi} \tilde{\mathcal{U}}(T) | \psi_{\alpha} \rangle. \quad (2.29)$$

Für die Berechnung der transportierten Ladung nach dieser Gleichung ist eine Bestimmung der Eigenvektoren $|\psi_{\alpha}\rangle$ von $\tilde{\mathcal{U}}(T)$ notwendig. Diese erfolgt mittels linearer Algebra Routinen von NumPy [56]. Die Berechnung von $\partial_{\Phi} \tilde{\mathcal{U}}$ erfolgt teils analytisch, teils mittels numerischer Matrixmultiplikation. Da durch die Wahl der Eichung nur der erste und dritte Zeitschritt des Anregungsprotokolls im AFI-Modell betroffen sind, existiert eine explizite Φ -Abhängigkeit nur für $\tilde{\mathcal{U}}_1(T) = \tilde{\mathcal{U}}_1(T, \Phi)$ und $\tilde{\mathcal{U}}_3(T) = \tilde{\mathcal{U}}_3(T, \Phi)$. Damit folgt (Abhängigkeiten unterdrückt):

$$\partial_{\Phi} \tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}}_5 \tilde{\mathcal{U}}_4 [\partial_{\Phi} \tilde{\mathcal{U}}_3] \tilde{\mathcal{U}}_2 \tilde{\mathcal{U}}_1 + \tilde{\mathcal{U}}_5 \tilde{\mathcal{U}}_4 \tilde{\mathcal{U}}_3 \tilde{\mathcal{U}}_2 [\partial_{\Phi} \tilde{\mathcal{U}}_1]. \quad (2.30)$$

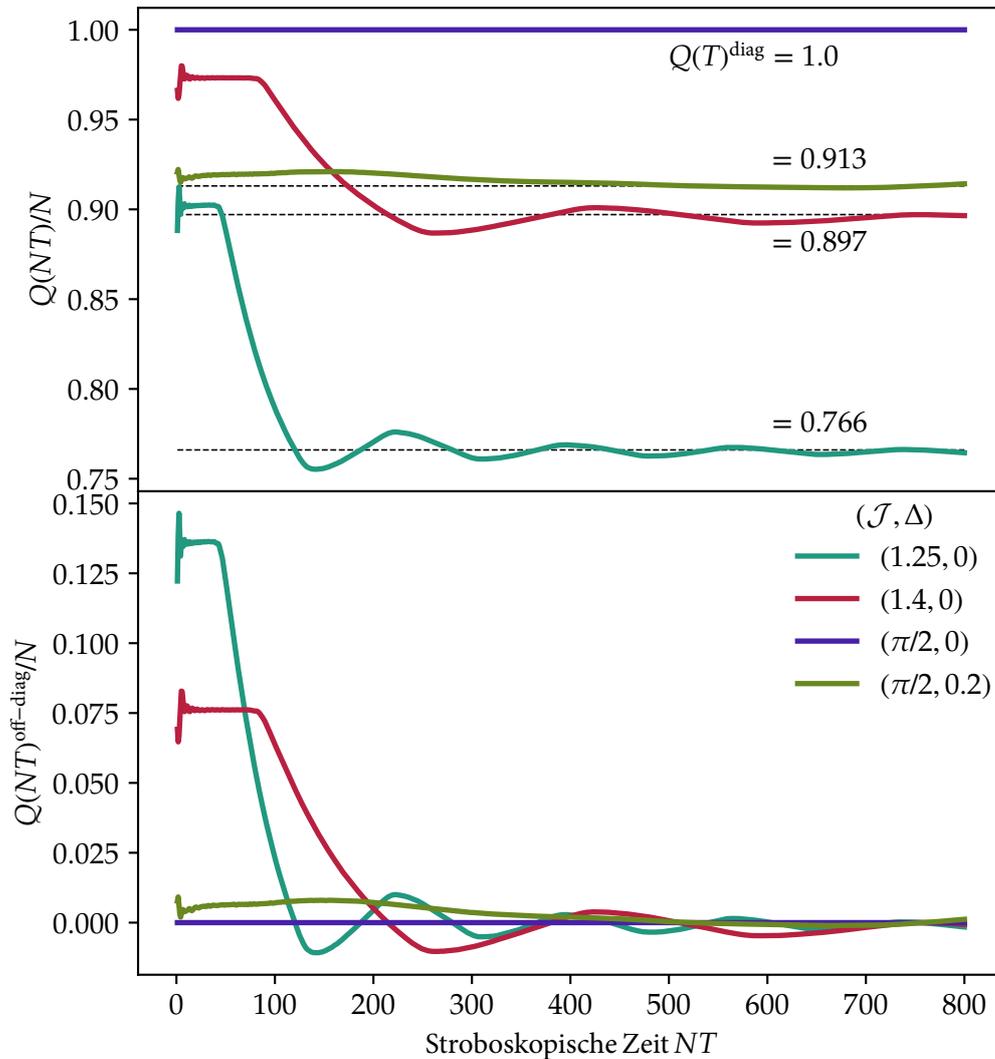


Abbildung 2.3.: Darstellung von $Q(NT)/N$ (oben) und $Q(NT)^{\text{off-diag}}/N$ (unten) für verschiedene Parameterpaare (\mathcal{J}, Δ) über eine stroboskopische Zeit von $800T$ und Systemgröße $L = 50 \times 50$.

Es wird der Transport für die in Tabelle 1.1 gelisteten Parameter betrachtet. Die berechneten Daten für ein $L = 50 \times 50$ Gitter sind in Abbildung 2.3 dargestellt. Im oberen Diagramm ist die kumulativ gemittelte transportierte Ladung $Q(NT)/N$ in Abhängigkeit von der stroboskopischen Zeit NT dargestellt. Für perfekte Kopplung (blau) ist, wie erwartet, quantisierter Transport für alle Zeiten zu erkennen. Für alle anderen betrachteten Parameterpaare sind zu Beginn des Transports die Werte nicht quantisiert; für lange Zeiten stellt sich ein oszillierendes Verhalten ein, welches gegen den diagonalen Anteil konvergiert (der ebenfalls nicht quantisiert ist). In Abbildung 2.3 (unteres Bild) ist das Verschwinden des nicht-diagonalen Anteils $Q(NT)^{\text{off-diag}}/N$ für lange Zeiten gezeigt. Dies zeigt, dass im nicht-adiabatisch getriebenen AFI-Modell für lange Zeiten kein quantisierter Transport auftritt. Dieses Ergebnis lässt sich für allgemeine d -dimensionale nicht-adiabatisch getriebene Systeme verallgemeinern.

Unordnungseffekte in Floquet-topologischen Isolatoren

In diesem Abschnitt wird die Auswirkung verschiedener Unordnungsarten auf den Ladungstransport in Floquet-Systemen untersucht. Dafür wird eine kurze Einführung in die Anderson-Lokalisierung gegeben. Es wird eine neue topologische Phase, der sogenannte AFAI, eingeführt, welche bemerkenswerte physikalische Eigenschaften hat, wie z. B. einen quantisierten Ladungstransport, eine quantisierte Leitfähigkeit sowie eine quantisierte Magnetisierungsdichte [25, 29, 30, 57]. Es sollen die grundlegenden Eigenschaften dieser Phase verstanden werden, insbesondere warum sich eine Quantisierung des Ladungstransportes ausbildet. Dabei wird der Arbeit aus Ref. [25] gefolgt.

3.1. Anderson-Lokalisierung

P. W. ANDERSON stellte 1958 in seiner Originalarbeit [39] fest, dass Zustände in zufälligen Potentialen lokalisieren können. Anderson-Lokalisierung kann als Quanteninterferenzeffekt aufgefasst werden. Mögliche Pfade des Teilchens durch das Gitter können miteinander interferieren und zum Einfrieren der Dynamik führen.

Betrachtet wird eine Wellenfunktion $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ auf einem Gitter \mathbb{Z}^d , welche initial auf dem Gitterplatz \mathbf{r}_0 lokalisiert ist. Diese weist in der zeitlichen Entwicklung ein diffusives Verhalten auf, d. h. die Wellenfunktion breitet sich in der Zeit über das gesamte Gitter aus. Wenn zusätzlich Unordnung, z. B. in Form eines zufälligen Potentials der Gitterplätze (nicht jede Art der Unordnung ist zur Anderson-Lokalisierung fähig) eingeführt wird, kann dieses Verhalten verloren gehen. Der Verlust des diffusiven Verhaltens resultiert in einer Beschränkung der Ausbreitung der Wellenfunktion in der zeitlichen Entwicklung. Damit bleibt $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$, für alle Zeiten t , beschränkt. Die Verteilung der Wellenfunktion nimmt in der Regel eine charakteristische Exponentialform an:

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 \sim e^{-|\mathbf{r}|/l_{\text{loc}}} . \quad (3.1)$$

Dabei ist l_{loc} die Lokalisierungslänge. Das Teilchen befindet sich, für lange Zeiten, am wahrscheinlichsten, in einem Bereich des Gitters, welcher durch l_{loc} abgesteckt wird.

Anderson-Lokalisierung hängt von der Dimensionalität des Gitters und der Stärke der Unordnung ab. Falls $d = 1, 2$ gilt, konnte gezeigt werden, dass alle Zustände, unabhängig von der Stärke der Unordnung, lokalisieren. In den Dimensionen drei oder höher ist eine kritische Unordnungsstärke notwendig, um alle Zustände zu lokalisieren [40]. Für Unordnungsstärken, welche kleiner als die kritische sind, existieren lokalisierte und delokalisierte Zustände, die durch sogenannte Mobilitätskanten energetisch separiert sind. Beim Erreichen des kritischen Wertes berühren sich die Mobilitätskanten und es kommt zu einem Metall-Isolator-Übergang (Anderson-Übergang). Eine experimentelle Messung dessen findet sich in Ref. [58]. Die Phase, welche bei überkritischen Unordnungsstärken auftritt nennen wir Anderson-Isolator.

Die vollständige Lokalisierung aller Zustände in 2D Systemen, bei jeder Unordnungsstärke, kann nur auftreten wenn es topologisch trivial ist. In einem topologisch nicht-trivialen System (Chern-Zahl

ungleich null) dagegen sind die Kantenzustände bis zu einer kritischen Unordnungsstärke geschützt. Dieser kritische Wert ist dadurch bestimmt, dass ein Kantenzustand nur dann vernichtet werden kann, wenn die Bandlücke (in der er spektral existiert) mit zunehmender Unordnung geschlossen wird [35, 59]. Das hängt damit zusammen, dass die Bänder, welche die Chern-Zahlen tragen, erst zusammenkommen müssen, um diese zu ändern. Damit hat die nicht-triviale Topologie einen entscheidenden Einfluss auf das Lokalisierungsverhalten in niederdimensionalen Systemen.

3.2. Anomaler Floquet-Anderson-Isolator

Ein FI wird, unter dem Einfluss von Unordnung, AFAI genannt, falls

1. die Kantenzustände bei *allen Quasienergien* existieren und mit den Volumenzuständen koexistieren, sowie
2. die Volumenzustände *vollständig lokalisiert* sind.

Existenz Im Hinblick auf die Existenz des AFAI wird das AFI-Modell (siehe Abschnitt 1.1) mit folgender Modifikation betrachtet: Im fünften Segment des Anregungsprotokolls besitzt jeder Gitterplatz ein zufälliges Potential. Dieses wirkt sich derart aus, dass jeder Zustand eine Änderung seiner Phase erfährt $\varepsilon_\alpha \longmapsto \varepsilon_\alpha + \chi$. Dabei sei $\chi \in [-\phi, \phi]$, mit ϕ als Unordnungsstärke, gleichverteilt. Bei perfekter Kopplung, hat diese Art der Unordnung keinerlei Auswirkung auf das System, außer einer Phasenrandomisierung. Das ohne Unordnung flache Volumenband wird auf einen Bereich $[-\phi, \phi]$ ausgedehnt, bleibt jedoch vollständig lokalisiert. Die Kantenzustände sind weiterhin bei allen Quasienergien vorhanden. Damit ist die Koexistenz von Kanten- und Volumenzuständen bei allen Quasienergien, falls $\phi = \pi$, gegeben. Unter diesen Bedingungen kann von der Erhaltung des bisher quantisierten Transportes ausgegangen werden.

Dies zeigt prinzipiell die Existenz des AFAI. Was daraus nicht hervorgeht, ist die Stabilität bei Variation der Parameter \mathcal{J} und Δ . Die Invarianz unter Parametervariationen ist essentiell für die Charakterisierung des AFAI als topologische Phase. Dies wird im Folgenden genauer untersucht.

Rechtfertigung der Definition Gemäß seiner Definition besitzt der AFAI Eigenschaften, die sich stark von jenen unterscheiden, die in statischen Systemen realisierbar sind. Im statischen Fall sind delokalisierte Kantenzustände immer an die Existenz delokalierter Zustände im Volumen gebunden [35]. Dazu betrachten wir ein System in Zylindergeometrie, welches von einem magnetischen Fluss durchsetzt wird. Die möglichen Änderungen der Eigenzustände während des adiabatischen Anschaltens des Flusses sind gegeben durch

1. die Erhaltung der Energie, oder
2. einem Fluss zu einer neuen.

Wie bereits bekannt, zeigen Kantenzustände letzteres und Volumenzustände ersteres Verhalten. Wenn der Fluss auf ein Flussquant angewachsen ist, ist der Hamiltonian eichäquivalent zu dem Hamiltonian ohne Fluss. Dies bedeutet, dass der spektrale Fluss der Kantenzustände endlich bleibt, was nur möglich ist wenn die Kantenzustände an delokalisierte Volumenzustände koppeln. Dieses Argument stützt sich darauf, dass in statischen Systemen das Spektrum beschränkt ist und von Volumenzuständen begrenzt

werden muss, welche delokalisiert (dispersiv) sind. Im periodisch getriebenen Fall handelt es sich um ein periodisches Spektrum, welches nicht durch Volumenzustände begrenzt werden muss, sondern es können Kantenzustände existieren, welche über die Quasienergiezone hinweg Volumenzustände koppeln. Damit der spektrale Fluss endlich bleibt, ist kein delokalisierte Volumenzustand notwendig, welcher mit dem Kantenzustand koppelt. Die Terminierung des spektralen Flusses hat in der Periodizität der FBZ eine Lösung. Es kann sich ein Kantenzustand stetig und geschlossen um die FBZ winden. Damit dies möglich ist, müssen die Volumenzustände vollständig lokalisiert sein, da andernfalls der Kantenzustand mit Volumenzuständen hybridisieren würde. Diese Überlegungen führen genau auf die Definition des AFAI, wobei Unordnung genutzt wird um die Lokalisierung der Volumenzustände zu erreichen.

3.3. AFI-Modell mit Unordnung

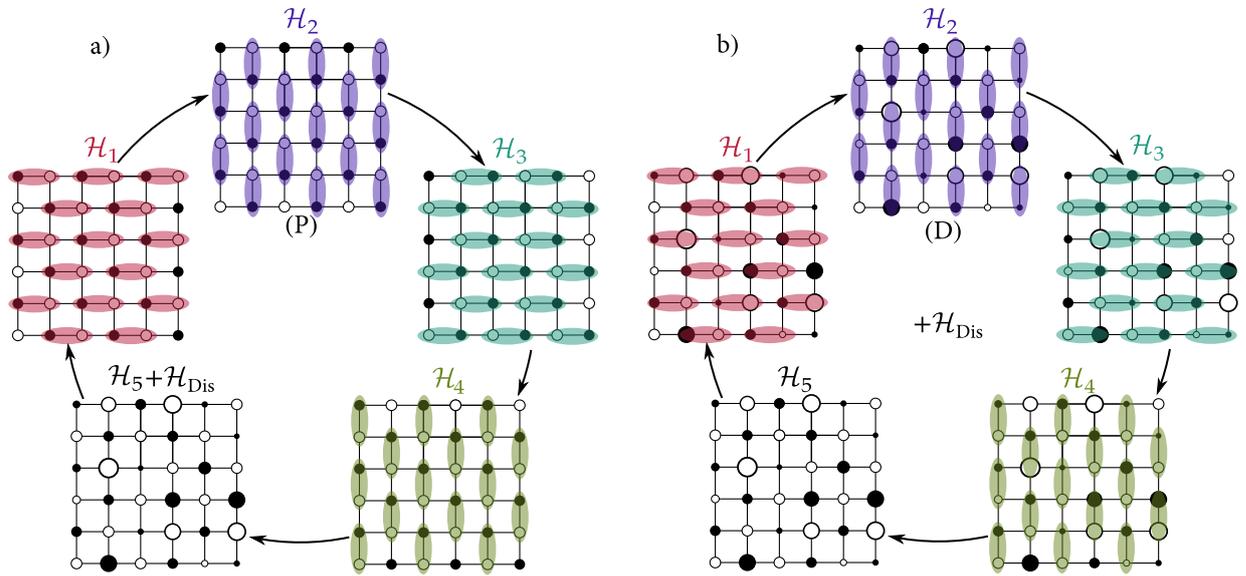


Abbildung 3.1.: a) AFI-Modell unter dem Einfluss von Unordnungsvariante (P). Diese Unordnung wirkt ausschließlich im fünften Segment des Anregungsprotokolls. b) AFI-Modell unter dem Einfluss von Unordnungsvariante (D). Diese Unordnung wirkt in allen fünf Segmenten.

Um den Einfluss der Unordnung im AFAI zu untersuchen, werden zwei verschiedene Unordnungsarten diskutiert.

Die erste Unordnungsart, im folgenden Phasenunordnung (P) genannt, wurde für die Begründung der Existenz des AFAI bereits verwendet. Sie tritt im Modell in der Form

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_{\text{clean}}(t) + f_5(t) \sum_{\mathbf{r} \in \Gamma} \zeta_{\mathbf{r}}^P c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

auf, mit den Definitionen und $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_{\text{clean}}(t)$ aus Gl. (1.1). Dabei ist $\zeta_{\mathbf{r}}^P$ eine gitterplatzabhängige Zufallsvariable, welche gleichverteilt aus $[-\chi, \chi]$ gewählt wird. Eine schematische Darstellung der Änderung des Anregungsprotokolls findet sich in Abbildung 3.1 a).

Häufig besteht nur ein Interesse an dem Ergebnisse für maximale Unordnungsstärke $\chi = \pi$, da diese eine eindeutige Einordnung des Regimes (AFAI oder Anderson-Isolator) ermöglicht. Die Wirkung von (P) auf einen Zustand tritt erst nach seiner Propagation ein. Im geordneten Fall hätte $|\psi_\alpha\rangle$ nach

einer Periode eine Phase $e^{-i\varepsilon_\alpha T}$ erhalten. Durch Unordnung wird die Phase neu verteilt. Für perfekte Kopplung hat der Zustand nach einer Periode eine Phase $e^{-i\varepsilon_\alpha T + \zeta_r}$, wenn er auf dem Gitterplatz $\mathbf{r} \in \Gamma$ endet. Für den Fall $\chi = \pi$ erfährt der Zustand eine vollständige „Phasenrandomisierung“ über den komplexen Einheitskreis. Weiterhin können, unter der Wirkung von (P), Zustände Anderson-lokalisieren (siehe Abschnitt 3.1). Die Volumenzustände lokalisieren, im Falle einer trivialen Chern-Zahl, vollständig (unabhängig von der Unordnungsstärke). Die zweite Unordnungsvariante (D) platziert in jedem Zeitschritt zufällige Potentiale auf den Gitterplätzen. Dabei sind diese in jedem Schritt gleich. Diese Unordnungsart wird durch

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_{\text{clean}}(t) + \sum_{\mathbf{r} \in \Gamma} \zeta_{\mathbf{r}}^D c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}} \quad (3.3)$$

beschrieben. Dabei ist $\zeta_{\mathbf{r}}^D$ eine ortsabhängige Zufallsvariable, welche gleichverteilt dem Intervall $[-W/2, W/2]$ zu entnehmen ist. Eine schematische Darstellung dessen findet sich in Abbildung 3.1 b). Diese Art der Unordnung greift explizit in die Kopplungen ein und verändert damit zufällig die Wahrscheinlichkeiten für ein Teilchen zwischen gekoppelten Gitterplätzen zu „hüpfen“. Es ist bekannt, dass diese Art der Unordnung zur Anderson-Lokalisierung führt, sodass, in 2D, alle Volumenzustände lokalisieren, falls $\mathcal{C} = 0$ [39, 40].

Im Folgenden soll verstanden werden, welche topologischen Eigenschaften im geordneten System vorhanden sein müssen, sodass der AFAI erwartet werden kann. Dabei werden zwei Fälle unterschieden: $\mathcal{C} = 0$ und $\mathcal{C} = \pm 1$, wobei eine nicht-triviale \mathcal{W}_3 Invariante vorausgesetzt wird.

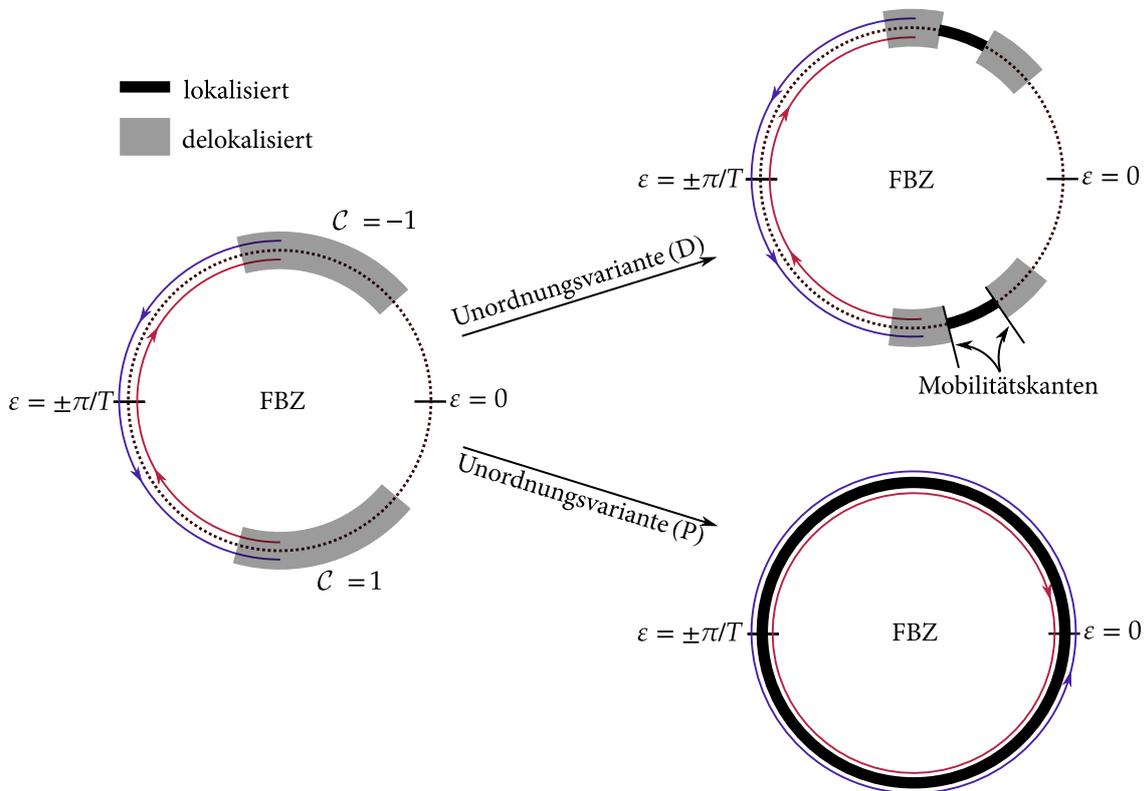


Abbildung 3.2.: Auswirkungen der Unordnungsvarianten auf die Quasienergieverteilung, für den Fall $\mathcal{C} = \pm 1$. Dabei werden in blau und rot die delokalisierten Kantenzustände und in schwarz und grau die lokalisierten, respektive delokalisierten, Volumenzustände gezeigt. Unordnungsvariante (P) ist für maximale Stärke gezeigt $\chi = \pi$. Dies ist der Fall, in dem die Kantenzustände nicht annihilieren.

Fall $C = \pm 1$ (Abbildung 3.2): Hier tritt ein Kantenzustand in das obere Volumenband von unten/oben ein.

Unordnungsvariante (D): Es ist bekannt, dass die Kantenzustände bis zu einer gewissen Unordnungsstärke Bestand haben können. Solange die Mobilitätskanten sich nicht berühren, ist die topologische Phase geschützt. Diese bezeichnen wir als Floquet-Anderson-Isolator. Im Floquet-Anderson-Isolator kann ein Kantenzustand nicht bei allen Quasienergien existieren, sondern ist durch die Mobilitätskanten des Volumenbandes eingeschränkt. Beim Schließen der Mobilitätskante annihilieren die Kantenzustände und das System erfährt einen Phasenübergang zu einem Anderson-Isolator. Der Annihilationsprozess ist unabhängig davon, welche der Bandlücken sich zuerst schließt.

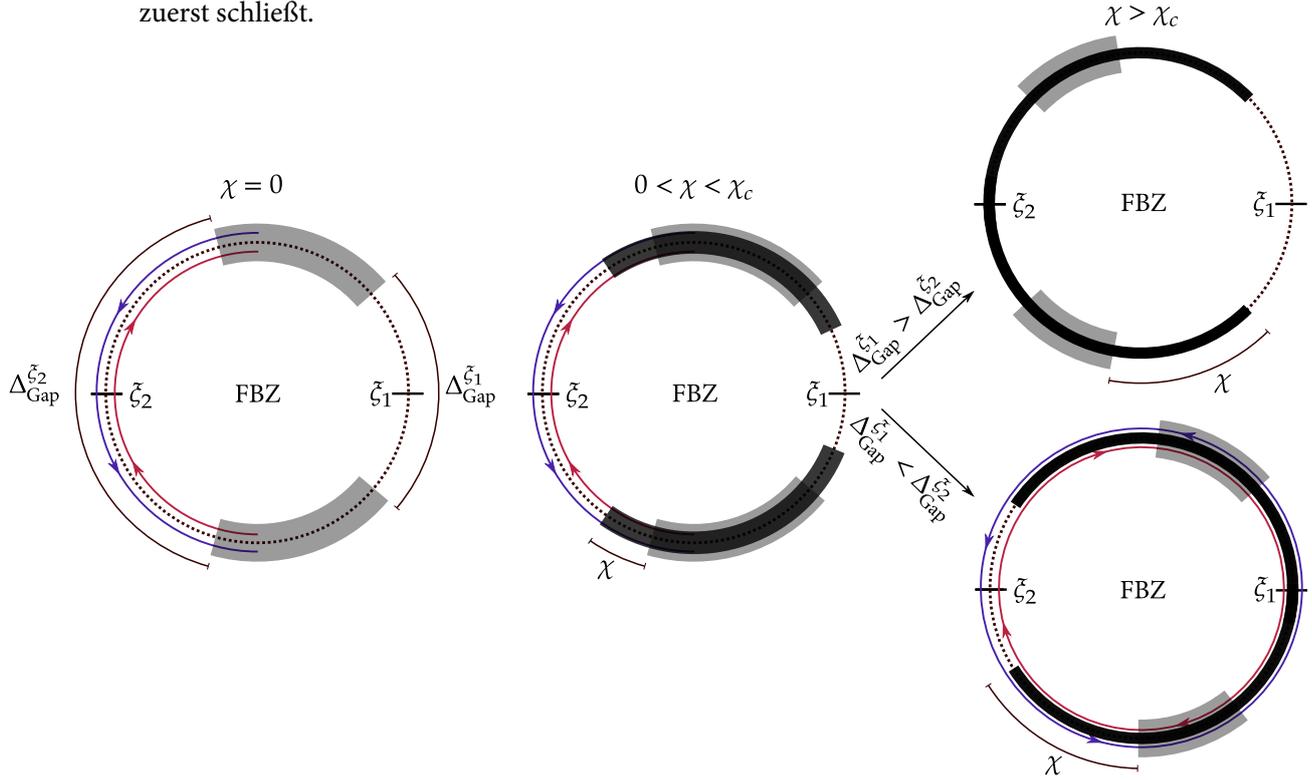


Abbildung 3.3.: Prozesse unter der Einwirkung von Unordnungsvariante (P). Für $\chi > 0$ repräsentieren die grauen Abschnitte die Bänder im geordneten Fall. Im Haupttext $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = \pm\pi/T$.

Unordnungsvariante (P): Die Volumenzustände lokalisieren nicht vollständig bis eine kritische Unordnungsstärke χ_c erreicht wird. Für $\chi < \chi_c < \pi$ ist keine der Bandlücken geschlossen worden. Damit ist das Volumenband, über einen Bereich $\pm\chi$, weiter ausgedehnt, als im geordneten Fall (siehe Abbildung 3.3). Hier koexistieren (delokalisierte) Kantenzustände und (lokalisierte) Volumenzustände bei den selben Quasienergien. Wenn $\chi = \chi_c$ erreicht wird, kommt es zum Schließen einer der beiden Bandlücken. Dabei muss unterschieden werden, welche zuerst schließt. Sei beispielsweise $\mathcal{W}_{\pi/T} = 1$ und $\mathcal{W}_0 = 0$. Die Größe der Bandlücken sei durch $\Delta_{\text{Gap}}^{\pi/T}$, respektive Δ_{Gap}^0 , gegeben. Falls $\Delta_{\text{Gap}}^0 > \Delta_{\text{Gap}}^{\pi/T}$ gilt, schließt sich bei $\chi = \chi_c$ die Bandlücke mit $\mathcal{W}_{\pi/T} = 1$, was eine Annihilation der Kantenzustände zur Folge hat, sowie eine vollständige Lokalisierung aller Zustände: in diesem Fall resultiert ein Anderson-Isolator. Falls $\Delta_{\text{Gap}}^0 < \Delta_{\text{Gap}}^{\pi/T}$ gilt, schließt sich die Bandlücke mit $\mathcal{W}_0 = 0$. Dies führt dazu, dass der Kantenzustand sich vollständig um die FBZ windet und die Volumenzustände vollständig lokalisieren: in diesem liegt ein AFAI vor. Beide Fälle werden durch die Bedingung $\Delta_{\text{Gap}}^0 = \Delta_{\text{Gap}}^{\pi/T}$ separiert. In Abbildung 3.2 ist letzterer Fall, für $\chi = \pi$, dargestellt.

Fall $C = 0$ (Abbildung 3.4): Hier tritt ein Kantenzustand in das obere Volumenband von unten/ oben ein und verlässt dieses von oben/ unten. Dies ist der interessanteste Fall in Floquet-topologischen Systemen, da dieser den Zusammenbruch der Chern-Zahl als topologische Invariante nach sich zieht. Da die Volumenzustände vollständig lokalisiert sind, muss der Kantenzustand diese kreuzen. Die Kopplung zum Volumenband ist ausgeschlossen, somit windet sich der Kantenzustand stetig um die FBZ. Dies setzt die *vollständige* Lokalisierung voraus. Damit ist die Koexistenz von lokalisierten Volumen- und delokalisierten Kantenzuständen gewährleistet. Diese Betrachtung ist unabhängig von den Unordnungsvarianten.

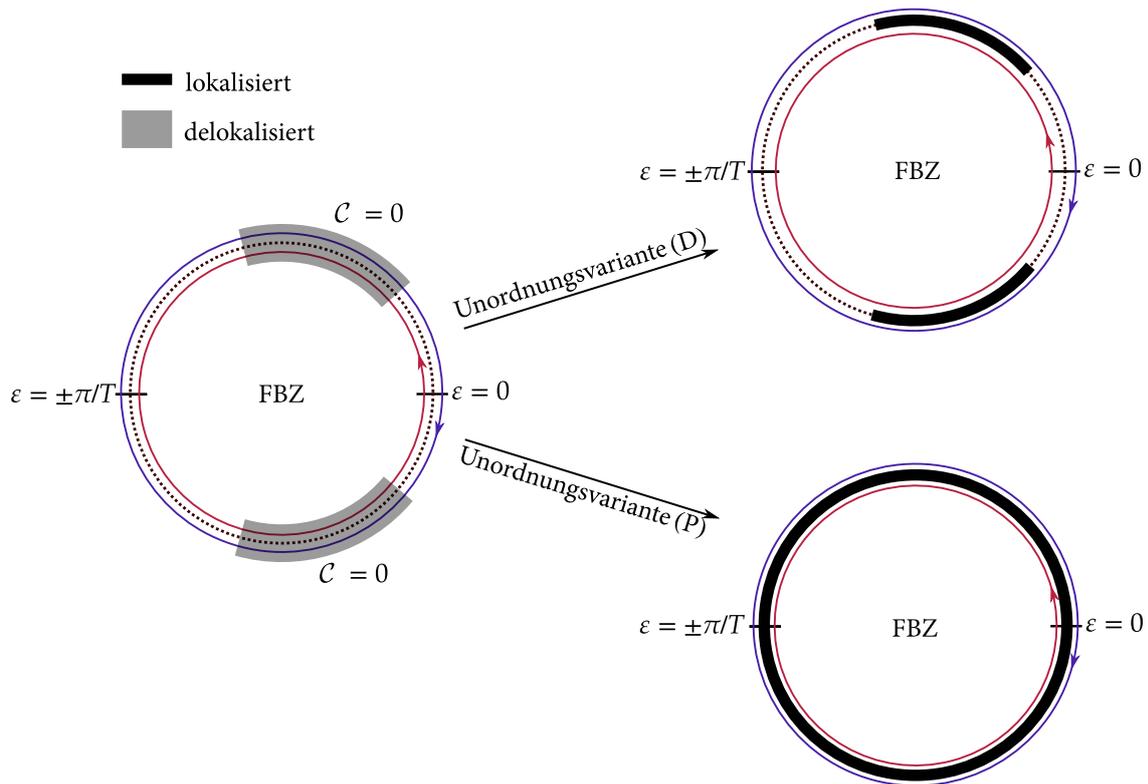


Abbildung 3.4.: Auswirkungen der Unordnungsvarianten auf die Quasienergieverteilung, für den Fall $C = 0$. Dabei werden in blau und rot die delokalisierten Kantenzustände und in schwarz und grau die lokalisierten, respektive delokalisierten, Volumenzustände gezeigt. Unordnungsvariante (P) ist für maximale Stärke $\chi = \pi$ gezeigt.

An dieser Stelle sei der wesentliche Unterschied beider Varianten hervorgehoben: Die zufällige Verteilung von Potentialen auf den Gitterplätzen in jedem Segment, erfordert die Anwesenheit von Kantenzuständen in beiden Bandlücken, damit möglicherweise ein AFAI realisiert wird. Bei Phasenunordnung wird im Allgemeinen nur die Anwesenheit eines Kantenzustandes benötigt, um einen AFAI zu realisieren.

3.4. Statistische Methoden zur Beschreibung ungeordneter Systeme

In diesem Abschnitt werden zwei Methoden zur Klassifizierung von Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergängen diskutiert und auf das AFI-Modell (Abschnitt 1.1) angewendet.

3.4.1. Level spacing ratio

Die Untersuchung der Verteilung von Eigenwerten von Floquet-Hamiltonians kann genutzt werden, um Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergänge zu studieren [60]. Es wurde bereits bemerkt, dass die Quasienergie-Dispersionen von delokalisierten Volumenzuständen (mit nicht verschwindendem Überlapp) sich nicht kreuzen dürfen, womit eine Abstoßung zwischen den Energieniveaus herrscht. Sind hingegen alle Volumenzustände vollständig lokalisiert, sodass der Überlapp zwischen räumlich separierten Zuständen vernachlässigbar klein ist, können sich die Energieniveaus beliebig nahe kommen. Diese Betrachtungsweise führt zu einer wichtigen Unterscheidung in der Statistik beider Quasienergie-Verteilungen. Die sogenannte „level spacing ratio“ (LSR) ist definiert als:

$$\mathfrak{s}_\alpha := \frac{\min\{\delta_\alpha, \delta_{\alpha-1}\}}{\max\{\delta_\alpha, \delta_{\alpha-1}\}} \in [0, 1], \text{ mit } \delta_\alpha = \varepsilon_{\alpha+1} - \varepsilon_\alpha. \quad (3.4)$$

Hier beschreibt $\delta_{\alpha, \alpha-1}$ den spektralen Abstand vom α -ten Floquet-Zustand zum darüber- bzw. darunterliegenden Zustand. Die LSR ist das Verhältnis der beiden Abstände, welches derart gewählt wird, dass es immer zwischen null und eins liegt. Anhand der Verteilung $\mathcal{P}(\mathfrak{s})$ der LSR \mathfrak{s}_α kann zwischen lokalisierten und delokalisierten Zuständen unterschieden werden [60]. Für delokalisierte Zustände erwartet man eine Verteilung

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathfrak{s}) := \mathcal{P}_{\text{GUE}}(\mathfrak{s}) = \frac{32}{\pi^2} \mathfrak{s}^2 e^{-4\mathfrak{s}^2/\pi}, \quad (3.5)$$

die dem sogenannten „gaussian unitary ensemble“ (GUE) folgt. In dieser Verteilung scheinen sich Energieniveaus abzustoßen ($\mathcal{P}_{\text{ext}}(0) = 0$), so wie es für delokalisierte Zustände mit endlichen räumlichen Überlapp zu erwarten ist. Für lokalisierte Zustände mit vernachlässigbarem Überlapp sollten Quasienergien unabhängig voneinander verteilt sein, was zur Poisson-Verteilung

$$\mathcal{P}_{\text{loc}}(\mathfrak{s}) := \mathcal{P}_{\text{Poi}}(\mathfrak{s}) = e^{-\mathfrak{s}}. \quad (3.6)$$

führt. Als Indikator für lokalisierte oder delokalisierte Zustände, können wir den Erwartungswert der Verteilungen als Kontrollparameter nutzen. Dieser ist durch

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathfrak{s}) \rangle \approx 0.603, \text{ und } \langle \mathcal{P}_{\text{loc}}(\mathfrak{s}) \rangle \approx 0.386 \quad (3.7)$$

gegeben [61].

LSR im AFI-Modell Es wird die LSR genutzt, um die vollständige Lokalisierung der Volumenzustände im AFI-Modell, unter dem Einfluss von Unordnung, zu bestätigen. Falls dies erfüllt ist, folgt die Existenz der Kantenzustände bei allen Quasienergien aus bisherigen Diskussionen. Für eine anschauliche Darlegung dessen, kann auch das Propagationsverhalten eines initial angeregten Gitterzustandes betrachtet werden, wie in Ref. [25].

Das AFI-Modell wird unter PBC verwendet, sodass ausschließlich Informationen über die Volumenzustände erhalten werden. In Abbildung 3.5 ist die gemittelte LSR $\langle \mathfrak{s} \rangle_\alpha$ für beide Unordnungsvarianten

in Abhängigkeit von der jeweiligen Unordnungsstärke dargestellt. Es wurde dabei über 300 Unordnungsrealisierungen, sowie über die LSR aller Zustände gemittelt. Dabei wurde eine Systemgröße von $L = 70 \times 70$ verwendet. In Teilbild a) ist die Unordnungsvariante (D) zu sehen. Die LSR $\langle s \rangle_\alpha$ geht mit steigender Unordnungsstärke von der GUE- in die Poisson-Verteilung über. Die kleinen Abweichungen vom exakten Wert verschwinden im thermodynamischen Limes. Nur das Parameterpaar $(\mathcal{J}, \Delta) = (1.25, 0)$ ist noch weit von der Poisson-Verteilung entfernt. In Teilbild b) ist die Unordnungsvariante (P) zu sehen, welche für alle Parameterpaare, bei maximaler Unordnungsstärke, eine sehr genaue Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung zeigt. Selbst das kritische Parameterpaar aus a) zeigt hier eine deutliche Annäherung an die Verteilung, welche für $L \rightarrow \infty$ exakt sein sollte.

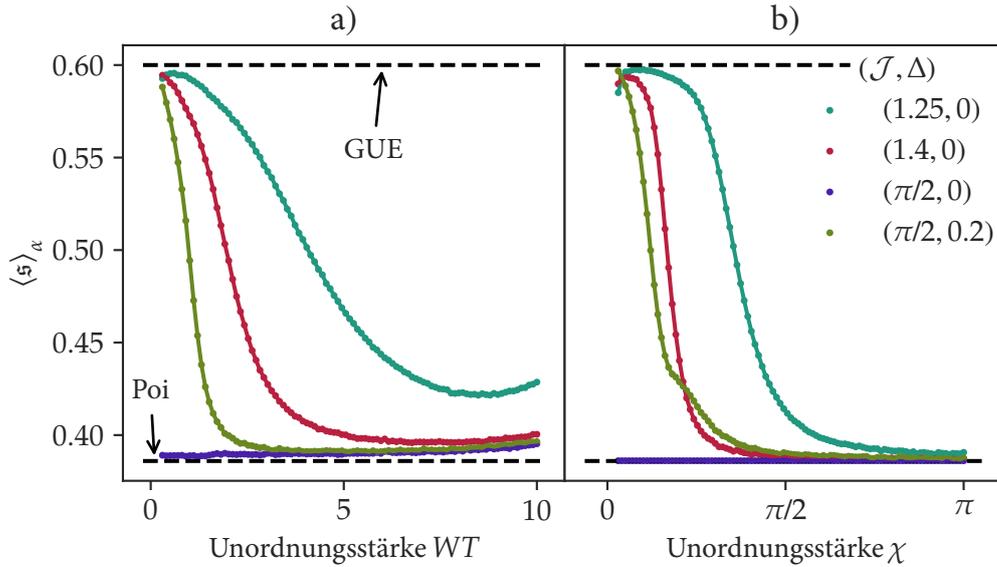


Abbildung 3.5.: Darstellung der gemittelten LSR $\langle s \rangle_\alpha$, in Abhängigkeit der jeweiligen Unordnungsstärke, für ein System der Größe $L = 70 \times 70$. Gemittelt wurde über 300 Unordnungsrealisierungen. a) Zeigt die Ergebnisse unter dem Einfluss von Unordnungsvariante (D) und b) von Unordnungsvariante (P).

3.4.2. Inverse participation ratio

Die „inverse participation ratio“ (IPR) ist eine weitere Größe, um Anderson-Lokalisierung zu quantifizieren. Die IPR ist als zweites Moment der räumlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Wellenfunktion definiert. Auf einem d -dimensionalen Gitter \mathbb{Z}^d ist die IPR des α -ten Zustandes definiert als:

$$p_\alpha = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} |\langle \mathbf{r} | \psi_\alpha \rangle|^4. \quad (3.8)$$

Um zu verstehen, wie die IPR zwischen lokalisierten und delokalisierte Zuständen unterscheidet, betrachten wir ein Gitter mit L Plätzen. Ist der Zustand $|\psi_\alpha\rangle$ delokalisiert, und damit im Wesentlichen über die gesamten L Gitterplätze gleichverteilt, so ist $p_\alpha \sim 1/L$. Im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ verschwindet also die IPR. Für einen lokalisierten Zustand, der im Wesentlichen auf eine endliche Zahl an Gitterplätzen eingeschränkt ist, bleibt die IPR dagegen endlich. Insbesondere für einen streng auf einen Gitterplatz lokalisierten Zustand gilt $p_\alpha = 1$, unabhängig von L . Damit kann für große L entschieden werden, ob ein Zustand (eher) lokalisiert ist (für $p_\alpha \gg 1/L$) oder delokalisiert ist (für $p_\alpha \ll 1/L$).

Des Weiteren kann die IPR als Abschätzung der Lokalisierungslänge verwendet werden:

$$p_\alpha^{-1} \gtrsim l_{\text{loc}}^\alpha. \quad (3.9)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich für ein 1D System leicht verstehen. Sei $|\psi_\alpha\rangle$ ein lokalisierter Zustand, also $|\langle \mathbf{r} | \psi_\alpha \rangle|^2 \sim e^{-|\mathbf{r}|/l_{\text{loc}}^\alpha}$. Bei der Berechnung von p besitzen nur die Gitterplätze innerhalb des Intervalls $I = [-l_{\text{loc}}^\alpha/2, l_{\text{loc}}^\alpha/2]$ einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag. Damit ist $p_\alpha \gtrsim 1/n$, wobei n die Anzahl an Gitterplätzen in I beschreibt. Die Anzahl ist proportional zu l_{loc}^α , sodass (3.9) folgt. Für höhere Dimensionen $d \geq 1$, gilt die Verallgemeinerung $n \sim (l_{\text{loc}}^\alpha)^d$ und damit $p_\alpha \simeq (l_{\text{loc}}^\alpha)^{-d}$.

IPR und Lokalisierungslängen im AFI-Modell Die Lokalisierung der Volumenzustände des AFI-Modells unter dem Einfluss von Unordnung kann nun auf einem zweiten Weg bestätigt werden. Für eine Untersuchung des AFI-Modells bei großen Unordnungsstärken und dem zugehörigen Phasenübergang wird auf Ref. [25] verwiesen. Über $p_\alpha \simeq (l_{\text{loc}}^\alpha)^{-2}$ liegt zusätzlich eine Abschätzung der Lokalisierungslänge bei gegebener Unordnungsstärke vor. Es werden nur gemittelte Größen $\langle p \rangle_\alpha$ und $\langle l_{\text{loc}} \rangle_\alpha$ betrachtet. Dabei wird einerseits über die Unordnungsrealisierungen, als auch über alle Zustände gemittelt. In

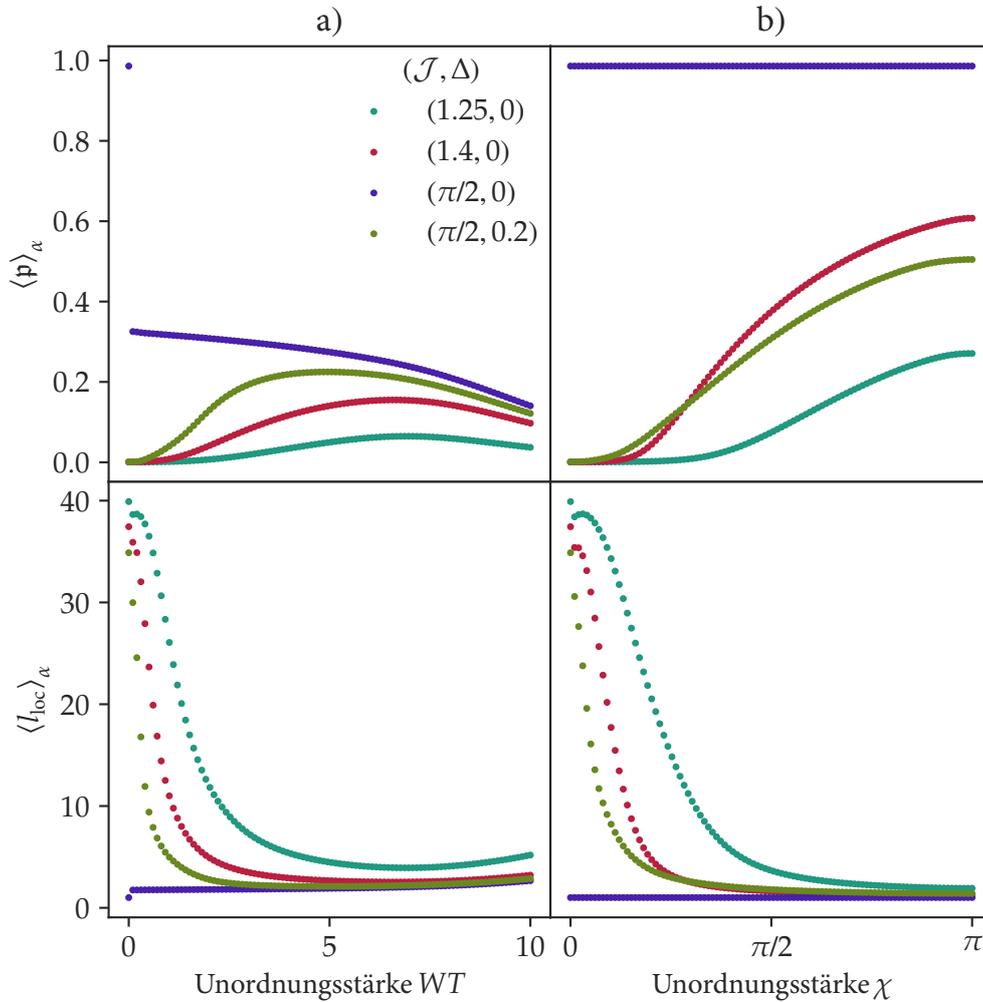


Abbildung 3.6.: Mittlere IPR $\langle p \rangle_\alpha$ und Lokalisierungslänge $\langle l_{\text{loc}} \rangle_\alpha$ für eine Systemgröße von $L = 70 \times 70$. Es wurde jeweils eine Mittelung über 300 Unordnungsrealisierungen durchgeführt. a) Zeigt die Ergebnisse unter dem Einfluss von Unordnungsvariante (D) und b) von Unordnungsvariante (P).

Abbildung 3.6 ist die mittlere IPR und die Lokalisierungslänge (diese stellt nur eine Abschätzung dar) für eine Systemgröße von $L = 70 \times 70$ dargestellt. In Teilbild a) ist Unordnungsvariante (D) dargestellt. Es ist zu sehen, dass für mittlere Unordnungsstärken $WT \in [4, 8]$ die mittlere Lokalisierungslänge viel kleiner als die Systemgröße ist, was auf eine vollständige Lokalisierung der Zustände schließen lässt. Auch hier ist eine größere Abweichung des Parameterpaares $(\mathcal{J}, \Delta) = (1.25, 0)$ zu erkennen (im Vergleich zu den übrigen). Für Unordnungsstärken > 8 beginnen die Zustände zu delokalisieren. Dieses Verhalten ist mit einem Anderson-Übergang bei größeren Unordnungsstärken ($WT \approx 20$) zu begründen [25]. In Teilbild b) ist Unordnungsvariante (P) dargestellt. Wir sehen für maximale Unordnungsstärke, dass für alle Parameterpaare eine Lokalisierungslänge vorliegt, welche weit kleiner als die Systemgröße ist.

Aus den Resultaten beider Abschnitte kann eine vollständige Lokalisierung der Volumenzustände für beide Unordnungsvarianten geschlossen werden. Für das Parameterpaar $(\mathcal{J}, \Delta) = (1.25, 0)$, unter Einwirkung von (D), ist diese Aussage nicht gesichert.

3.5. Ladungstransport unter dem Einfluss von Unordnung

In Abschnitt 2.4 wurde der Ladungstransport im AFI-Modell diskutiert und festgestellt, dass außerhalb der perfekten Kopplung kein quantisierter Transport stattfinden kann. Dies war der Kopplung von Kantenzuständen in die Volumenbänder geschuldet womit sich die Quasienergiebänder der Kantenzustände nicht mehr vollständig um die FBZ winden.

Allgemeine Betrachtungen An dieser Stelle können die Resultate für den Ladungstransport aus Abschnitt 2.4 übernommen werden, da in Anwesenheit von Unordnung die Herleitung des Ladungstransportes Bestand hat. Es muss beachtet werden, dass zusätzlich über die Unordnungsrealisierungen gemittelt werden muss. Dies wird, wie bereits zuvor, gekennzeichnet mit $\langle \dots \rangle$. Es gibt eine weitere Möglichkeit der Mittelung: wie in Abschnitt 2.4 erwähnt, ergibt die Wahl des Stromoperators $\mathcal{J}_x = \partial_\Phi \tilde{\mathcal{H}}$ nur Sinn, wenn eine Eichung festgelegt wurde. Diese wird derart gewählt, dass alle Gitterplätze $\mathbf{r} \in \Gamma$ mit $x = x_0$ eine Phase $e^{-i\Phi}$ erhalten (siehe Abbildung 3.7 b)). Die Bestimmung der transportierten Ladung sollte unabhängig von der Wahl des x_0 sein. Es kann für alle $x_0 \in \Gamma_x$ der Transport berechnet, welcher über dieser Linie stattfindet und anschließend gemittelt werden. Diese Mittelung ist äquivalent zu der über die Unordnungsrealisierungen. Dafür wird keine weitere Notation verwendet.

Der Ladungstransport ist durch Gl. (2.29) gegeben. Analog zu den dort gemachten Überlegungen kann auch hier $\langle Q \rangle_T$ in einen diagonalen und nicht-diagonalen Anteil aufgeteilt werden. Jedoch ist das Verschwinden des nicht-diagonalen Anteils für lange Zeiten nicht gesichert und bedarf einer gesonderten Untersuchung, die letztlich auf die Quantisierung des Ladungstransportes im AFAI führt. Vor der genaueren (numerischen) Untersuchung dieser Situation soll zunächst ein physikalisches Argument gegeben werden, wie die Quantisierung des Ladungstransportes im AFAI ermöglicht wird.

Quantisierter Transport im idealen AFAI Die Begründung ist der von Laughlin zur Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit ähnlich. Wenn das System in der Zylindergeometrie von einem Fluss Φ durchsetzt wird, und alle Bedingungen des AFAI erfüllt sind, gilt:

- die Wirkung des Flusses auf vollständig lokalisierte Zustände verschwindet. Diese besitzen eine triviale Antwort auf den Fluss $\partial_\Phi \tilde{\epsilon} = 0$. Präziser ausgedrückt können die Energien sich um einen

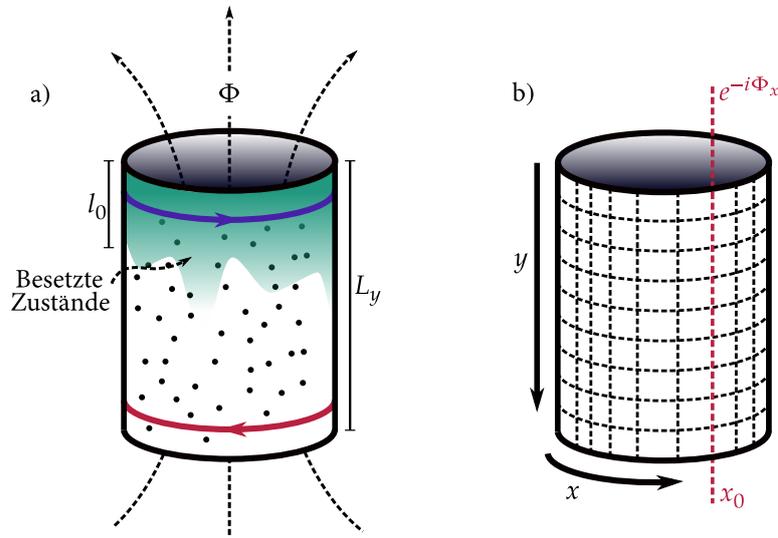


Abbildung 3.7.: a) Darstellung der Besetzung des Gitters und die Durchsetzung dessen durch den Fluss Φ . b) Darstellung der Wahl der Eichung.

Betrag proportional zu $e^{-L/l_{\text{loc}}}$ ändern. Für ein System, welches groß genug ist ($L \gg l_{\text{loc}}$), gilt $\partial_{\Phi} \tilde{\epsilon} \approx 0$.

- die Wirkung des Flusses auf Kantenzustände entspricht beim Einbringen von exakt einem Flussquant der Verschiebung (energetisch) von einem Zustand in den nächsten. Die Quasienergien benachbarter Zustände unterscheiden sich um $2\pi/(L_x T)$, sodass $\partial_{\Phi} \tilde{\epsilon} = \pm 2\pi/(TL_x)$ gilt. Daraus kann gefolgert werden, dass, im Falle der Summierung über alle Zustände nahe einer Kante, die transportierte Ladung pro Periode quantisiert ist.

Die Eichäquivalenz des Hamiltonians nach der Einbringung eines Flussquants ist für die Folgerungen entscheidend. An dieser Stelle sei das etwas technischere Argument aus Ref. [25] dargelegt.

Zunächst wird eine Deformation des Hamiltonians betrachtet, um die Invariante ν_{Φ} (siehe Gl. (1.17)) nutzen zu können. Diese kann mit der Zahl der Kantenzustände n_{edge} identifiziert werden. Da diese jedoch nur wohldefiniert ist, wenn der Zeitentwicklungsoperator im Volumen der Identität gleicht, muss dieser homotop abgeändert werden. Wie bereits bekannt, ist dies über die „pull-back“-Abbildung möglich. Diese zieht den Zeitentwicklungsoperator $\tilde{\mathcal{U}}(T)$ auf die Identität zurück (siehe Anhang A Gl. (A.7)). Diese Abbildung soll derart abgeändert werden, dass sie die Kanten des Systems unberührt lässt und das Volumen auf die Identität zurückzieht (siehe Abbildung 3.8). Der deformierter Propagator erhält eine Blockstruktur (siehe Gl. (1.18)). Dabei wirken die Operatoren $\tilde{\mathcal{U}}_{\epsilon,1/2}(T)$ ausschließlich in einer Umgebung der Kante, welche bis zu einer Tiefe von l_0 in den Zylinder hineinragen soll (genauer dazu findet sich in Ref. [25]). Der exakte Wert von $l_0 > 0$ ist nicht relevant, solange er viel größer als die Lokalisierungslängen der Volumenzustände im undeformierten Fall ist. Damit gilt

$$|\nu_{\Phi}^{1/2}| = n_{\text{edge}}^{1/2}, \quad (3.10)$$

mit 1/2 als Indizierung für $\tilde{\mathcal{U}}_{1/2}(T)$. Eine von null verschiedene Windungszahl ν_{Φ} impliziert die Existenz von delokalisierten Kantenzuständen, da alle Volumenzustände lokalisiert sind und einen vernachlässigbaren spektralen Fluss aufweisen. Damit ist auch begründet, weshalb der exakte Wert von l_0 nicht relevant sein kann: wenn l_0 größer gewählt wird, kommen lokalisierte Zustände hinzu, welche keinen Beitrag leisten. Damit kann n_{edge} nicht geändert werden.

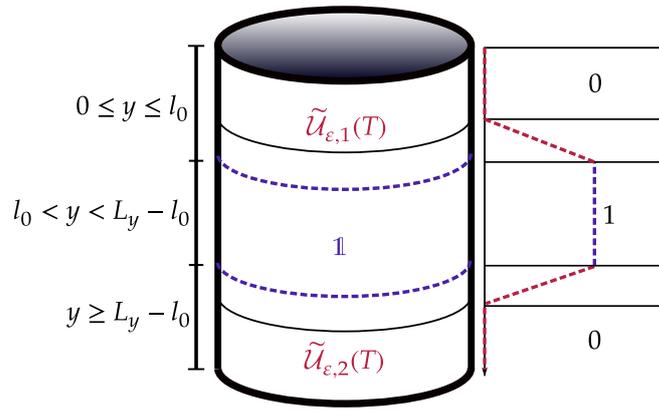


Abbildung 3.8.: Schematische Darstellung der Deformation und der Blockstruktur welche $\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon(T)$ dadurch erhält. Rechts ist die Struktur der Deformation dargestellt, welche auf \mathcal{H}_F^ϵ angewendet werden muss, um den gewünschten Effekt zu erzielen. Die Abänderung des Volumenpropagators ist notwendig um die Invariante (Windungszahl) sauber definieren zu können.

Diese Konstruktion weist die idealisierte Eigenschaften für einen quantisierten Transport unter dem Einfluss von Unordnung auf. Im Folgenden soll verstanden werden, weshalb, bis auf exponentiell kleine Korrekturen, diese Konstruktion mit dem undeforinierten Propagator identifiziert werden kann. Es muss $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}} = n_{\text{edge}}$ für den AFAI gelten, selbst wenn $\mathcal{U}(T) \neq \mathbb{1}$ gilt.

Quantisierter Transport im AFAI Betrachtet wird ein System in Zylindergeometrie, welches von einem Fluss Φ durchsetzt wird. Weiterhin wird das Gitter von der oberen Kanten an bis zu einer Länge $l_0 \gg l_{\text{loc}}$ mit Elektronen besetzt. Die Bestimmung des Anfangszustandes ist analog zu Abschnitt 2.4, sodass der Projektor auf die initial besetzten Zustände durch Gl. (2.22) bestimmt ist. Damit können die bisher bekannten Gleichungen zur Berechnung der transportierten Ladung verwendet werden (siehe Gl. (2.29)). Unter der Annahme, dass für lange Zeiten der nicht-diagonale Anteil verschwindet, wird zur Diskussion nur der diagonale Anteil benötigt. Dieser ist durch

$$\langle Q \rangle_T^{\text{diag}} = \frac{T}{2\pi} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int_0^{2\pi} \partial_{\Phi} \tilde{\epsilon}_{\alpha} d\Phi \quad (3.11)$$

gegeben (siehe Gl. (2.28)). Damit ist der einzige Unterschied im Vergleich zu n_{edge} (siehe Gl. (1.16) und (1.19)) die Anwesenheit der initialen Besetzungswahrscheinlichkeit $n_{\alpha} = c_{\alpha\alpha}$ sowie die Tatsache, dass $\tilde{\mathcal{U}}(T)$ nicht zwangsläufig der Identität im Volumen gleicht. Es sei angemerkt, dass nur, wenn der Anfangszustand als Slater-Determinante aus Floquet-Eigenzuständen gewählt wird, die Besetzungswahrscheinlichkeiten exakt null oder eins sind, im Allgemeinen aber auch andere Werte annehmen kann. Die möglichen Beiträge aus Gl. (3.11) werden genauer betrachtet:

- Bei der Variation von Φ kommt es zu vermiedenen Kreuzungen, sodass z. B. ein Zustand, welcher sehr nahe der Kante lokalisiert ist $y \ll l_0$, mit einem Zustand, welcher nahe dem Ende des Füllstandes $y \sim l_0$ lokalisiert ist, hybridisiert. Falls bei der Variation von Φ ein derartiger Resonanzpunkt auftritt, wird sowohl $\partial_{\Phi} \tilde{\epsilon}_{\alpha}$ als auch n_{α} beeinflusst. Aufgrund dessen, dass die Zustände räumlich separiert sind, sind deren Kopplungen exponentiell klein. Damit die Hybridisierung signifikant wird, müssen die Energien mit exponentieller Genauigkeit eingestellt werden. Die Abweichungen sind exponentiell klein $\sim e^{-l_0/l_{\text{loc}}}$ und die Anzahl solcher Resonanzen wächst

nur polynomial in der Systemgröße, sodass für $L_y \gg l_0 \gg l_{\text{loc}}$ (und $L_x \sim L_y$) der Effekt auf $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ vernachlässigbar klein ist [25].

Die restlichen Beiträge, welche zu Abweichungen führen, können in 3 Kategorien eingeteilt werden.

1. Zustände, welche weit weg von der besetzten Region lokalisiert sind $y \gg l_0$, haben nur exponentiell kleine Besetzungswahrscheinlichkeiten n_α , sodass deren Beitrag zum Ladungstransport vernachlässigbar klein ist.
2. Zustände, welche nahe der Kante in der gefüllten Region lokalisiert sind $y \ll l_0$, haben nahezu perfekte Besetzungszahlen $n_\alpha \approx 1$. Der Beitrag dieser Zustände zum Transport, als auch die Zustände selber, sollten insensitiv gegenüber dem Deformationsprozess sein.
3. Zustände, welche nahe dem Rand der gefüllten Region lokalisiert sind $y \sim l_0$, können Besetzungszahlen aufweisen, welche weder nahe null noch nahe eins sind. Sie sind wie alle Volumenzustände des AFAI lokalisiert, womit $\partial_\Phi \tilde{\epsilon}_\alpha$ einen exponentiell kleinen Beitrag liefert, welcher vernachlässigbar ist.¹

Damit kann man schließen, dass im thermodynamischen Limes die exponentiell kleinen Fehler verschwinden und alle relevanten Beiträge zu $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$, bis auf exponentiell kleine Änderungen unter der Deformation, erhalten bleiben, sodass

$$\langle Q \rangle_T^{\text{diag}} = n_{\text{edge}} \quad (3.12)$$

für den AFAI gelten muss. Insbesondere ist die transportierte Ladung quantisiert.

Numerische Ergebnisse

Zur numerischen Untersuchung wurde das AFI-Modell mit beiden Unordnungsvarianten (D), (P) implementiert, und der Ladungstransport mittels Gl. (2.29) berechnet. Eine Beschreibung der numerischen Methoden findet sich in Abschnitt 2.4, wobei nun bei der Erstellung der Matrizen $\tilde{U}(T)$ bzw. $\partial_\Phi \tilde{U}(T)$ die Unordnung zu berücksichtigen ist. Für beide Unordnungsvarianten werden die Parameterpaare aus Abschnitt 1.2 Tabelle 1.1 untersucht.

In Abbildung 3.9 ist der diagonale Anteil $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$, der transportierten Ladung, für beide Unordnungsvarianten gezeigt. Es wurde eine Systemgröße von $L = 50 \times 50$ verwendet und über 300 Unordnungsrealisierungen gemittelt. Teilbild a) zeigt den Fall für Unordnungsvariante (D). Für die perfekte Kopplung (blau) ist die Quantisierung erst im thermodynamischen Limes exakt. Dies hängt mit dem expliziten Eingreifen von (D) in das Kopplungsverhalten zusammen. Für zwei weitere Parameterpaare (rot und grün) liegt der Transport sehr nahe bei eins, und man kann annehmen, dass der Transport im thermodynamischen Limes quantisiert ist. Für das letzte Parameterpaar (türkis), welches bei der Untersuchung der Lokalisierungseigenschaften schon Abweichungen aufwies (siehe Abbildung 3.5), kann selbst im thermodynamischen Limes keine Quantisierung des Transportes erwartet werden. Teilbild b) zeigt den Fall für Unordnungsvariante (P). Es ist für alle vier Parameterpaare eine Quantisierung des Transportes für den Fall maximaler Unordnungstärke ($\chi = \pi$) zu sehen. Hervorgehoben sei, dass die perfekte Kopplung ihren perfekt quantisierten Wert von eins für alle Unordnungsstärken beibehält. Alle anderen

¹An dieser Stelle kann zusätzlich angemerkt werden, dass Volumenzuständen keinen persistenten Strom tragen können, sodass für die Langzeitbetrachtung des Systems klar ist, dass diese Zustände keinen Beitrag liefern können.

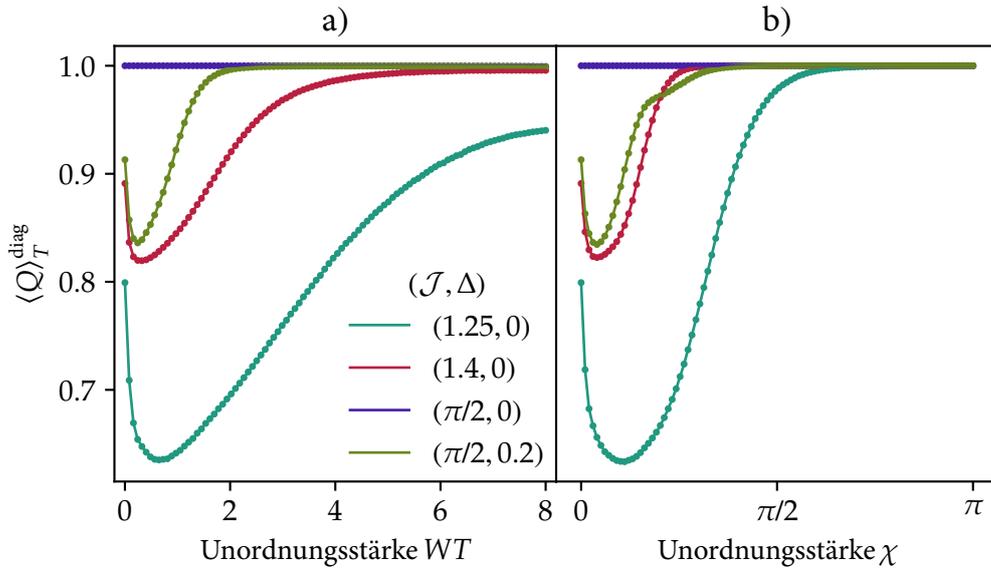


Abbildung 3.9.: Transportierte Ladung $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ in Abhängigkeit der jeweiligen Unordnungstärke. Das System hat eine Größe von $L = 50 \times 50$ und es wurde über 300 Unordnungsrealisierungen gemittelt. In a) ist die Unordnungsvariante (D) und in b) ist die Unordnungsvariante (P) dargestellt.

Parameterpaare kommen der eins so nahe, dass bei dieser Systemgröße ein relativer Fehler von 10^{-10} besteht.

Die Daten aus Abbildung 3.9 können nicht unabhängig von der Betrachtung des nicht-diagonalen Anteils diskutiert werden. In Abbildung 3.10 ist zusätzlich $\langle Q \rangle_{NT}^{\text{off-diag}}$ in Abhängigkeit der stroboskopischen Zeit NT dargestellt. In Teilbild b) ist für alle vier Parameterpaare ein oszillatorisches Verschwinden des nicht-diagonalen Anteils zu sehen. Der Transport in dem System wird demnach für lange Zeiten durch den diagonalen Anteil beschrieben. Dieser ist nach Abbildung 3.9 im Limes $L \rightarrow \infty$ quantisiert. Für Teilbild a) existieren zwei Beiträge (rot und türkis) welche nicht gegen null konvergieren. Dieses Verhalten ist in der endlichen Systemgröße begründet, sodass für den Limes $N, L \rightarrow \infty$ ein Verschwinden des nicht-diagonalen Anteils erwartet wird. Wird weiterhin auf die Skalierung der Achsen in a) geachtet, so ist eindeutig, dass, z. B. für die türkise Kurve, der gezeigte Wert keine Korrektur zur Quantisierung des Parameterpaares beitragen kann.

Weiterhin sind die Skalierungseigenschaften mit der Systemgröße zu untersuchen. Dazu wird der Fall $\mathcal{J} \in [0, \pi/2)$ und $\Delta = 0$ betrachtet. In Abbildung 3.11 ist die Abhängigkeit des diagonalen Anteils der transportierten Ladung in Abhängigkeit von \mathcal{J} und der Systemgröße L gezeigt. Die gestrichelten (roten) Linien markieren die Phasengrenzen, welche Abbildung 1.4 entnommen sind. In Teilbild a) ist die Unordnungsvariante (D) zu sehen. Innerhalb der ersten Phase ($C = 0$ und triviale Windungszahl) ist bis kurz vor der Phasengrenze $\mathcal{J} \approx \pi/4$ kein Transport zu sehen. Die Skalierung, die der Transport am Ende aufweist, ist so schwach, dass sich keine eindeutige Aussage über das Verhalten für $L \rightarrow \infty$ treffen lässt. In der zweiten Phase ($C = \pm 1$) ist ein nahezu linearer Anstieg des Transportes zu erkennen. Hier lässt sich ebenfalls keine eindeutige Aussage treffen. In der letzten Phase lässt sich eine Konvergenz zum quantisierten Ladungstransport vermuten. Es wird vermutet, dass die letzte Phase (für $\Delta = 0$) durch die Unordnungsvariante (D), im thermodynamischen Limes, perfekt quantisierten Transport aufweist. In Teilbild b) ist Unordnungsvariante (P) dargestellt. Hier ist zu erkennen, analog zu Teilbild a), dass in der ersten Phase kein Transport bis kurz vor der Phasengrenze stattfindet. Die Skalierung lässt darauf

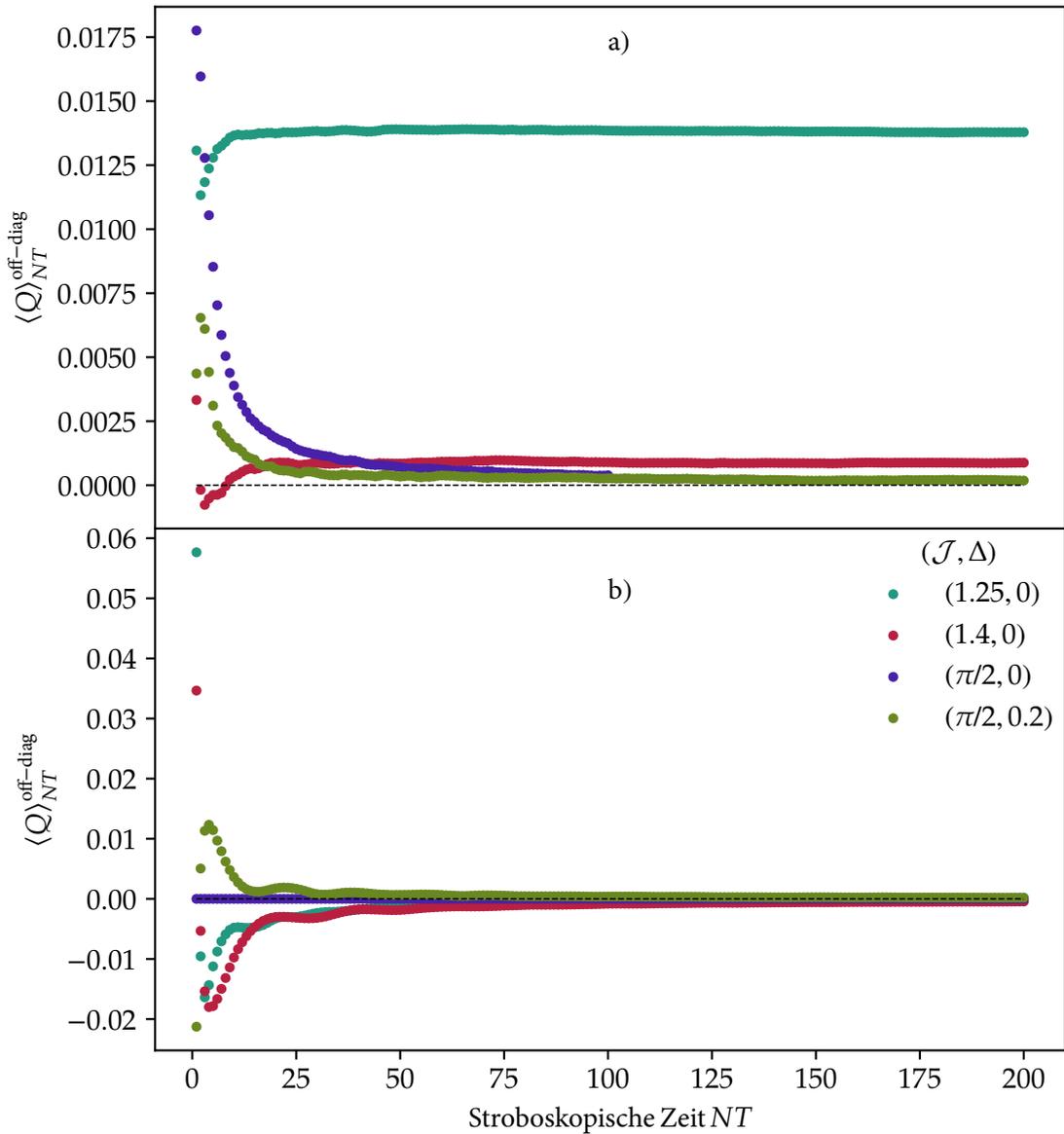


Abbildung 3.10.: Transportierte Ladung $\langle Q \rangle_{NT}^{\text{off-diag}}$ in Abhängigkeit der stroboskopischen Zeit NT . Das System hat eine Größe von $L = 50 \times 50$ und es wurde über 300 Unordnungsrealisierungen gemittelt. In a) ist die Unordnungsvariante (D) und in b) die Unordnungsvariante (P) dargestellt.

schließen, dass der Transport für $L \rightarrow \infty$ verschwindet. Damit ist diese Phase dem Anderson-Isolator zuzuordnen. Für die zweite und dritte Phase ist zu vermuten, dass im thermodynamischen Limes ein AFAI vorliegt. Genauer wird vermutet, dass sich für $L \rightarrow \infty$ eine Stufenfunktion ausbildet, welche in der ersten Phasen den Wert null und in der zweiten und dritten Phase den Wert eins annimmt. Diese Vermutung ist den in Abbildung 3.11 zu beobachtenden Skalierungseigenschaften geschuldet, die rechts bzw. links vom näherungsweisen Fixpunkt bei $\mathcal{J} = \pi/4$ zu monoton fallendem bzw. steigendem Verhalten von $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ als Funktion von L führt. Die Beobachtungen zu Abbildung 3.11 decken sich mit bisherigen Diskussionen (siehe Abschnitt 3.3).

Abschließend soll der Transport in demselben Parameterraum $((\mathcal{J}, \Delta) \in [0, \pi/2]^2)$ untersucht werden, wie es für die Chern-Zahl getan wurde (siehe Abbildung 1.4). Eine Darstellung beider Phasendiagramme ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Dabei wurde eine Systemgröße von $L = 50 \times 50$ verwendet. Im rechten

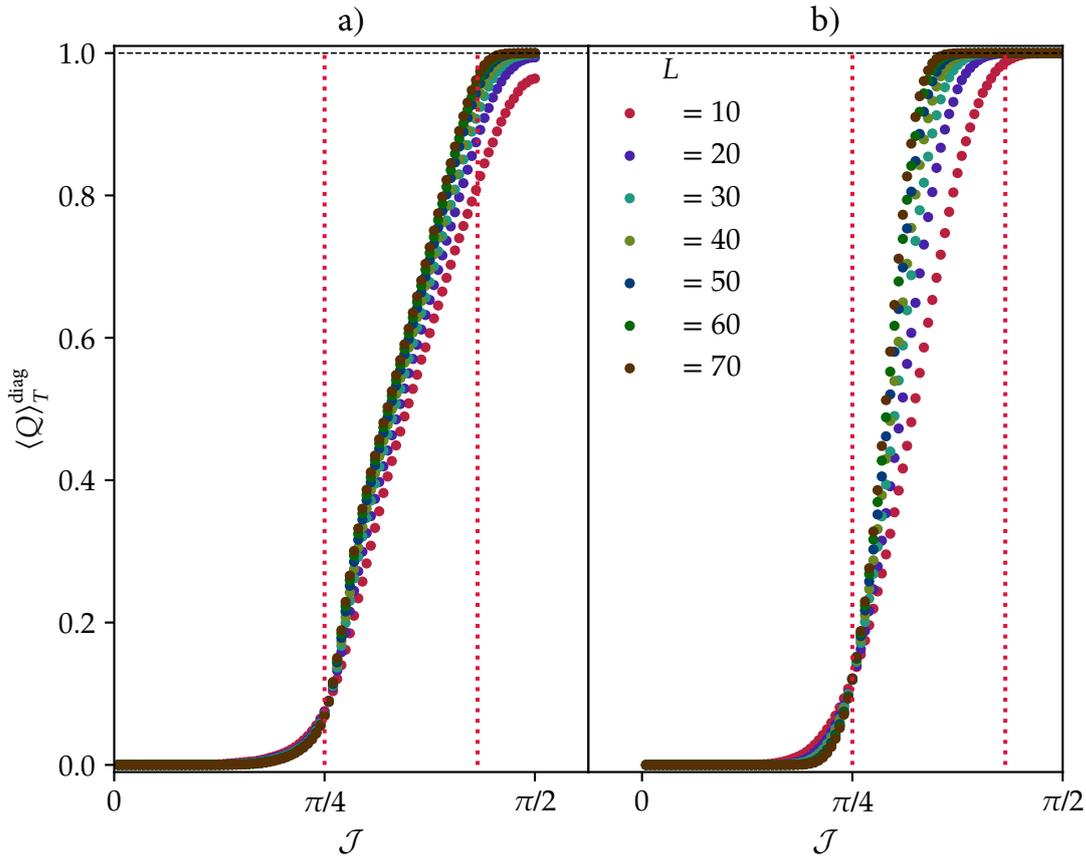


Abbildung 3.11.: Abhängigkeit des diagonalen Anteils $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ der transportierten Ladung vom Parameter \mathcal{J} für verschiedene Systemgrößen. Alle Daten wurden über 300 Unordnungsrealisierungen gemittelt. In a) ist die Unordnungsvariante (D) und in b) die Unordnungsvariante (P) gezeigt. Die gestrichelten (roten) Linien markieren die Phasengrenzen, welche Abbildung 1.4 entnommen wurden.

Bild ist Unordnungsvariante (D) dargestellt. Hier ist es, aufgrund der nicht eindeutigen Skalierung von $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ (siehe Abbildung 3.11), nicht möglich eine verlässliche Erwartung für die Phasengrenzen im thermodynamischen Limes anzugeben. Es ist jedoch zu erkennen, dass in einem endlichen Intervall von \mathcal{J} und Δ der Transport sehr nahe am quantisierten Wert liegt. In diesem Bereich ist eine perfekte Quantisierung für $L \rightarrow \infty$ zu erwarten. Im rechten Bild ist das Phasendiagramm der Unordnungsvariante (P) gezeigt. Im Vergleich zu (D) ist der Bereich, welcher einen (nahezu) quantisierten Transport aufweist, größer. Dies deckt sich mit bisherigen Diskussionen. Angelehnt an Abschnitt 3.3 wurde durch die blaue Linie der Bereich gekennzeichnet, welcher die Phasengrenze für $L \rightarrow \infty$ bestimmt. Der Bereich des AFAI ist durch die Bedingung:

$$\begin{cases} \Delta_{\text{Gap}}^0 \geq \Delta_{\text{Gap}}^{\pi/T} & , \quad \text{falls } \mathcal{C} = \pm 1 \text{ (oberes Volumenband)} \\ \text{vollständig} & , \quad \text{falls } \mathcal{C} = 0, \mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_{\pi/T} \neq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

gegeben. Der Bereich, welcher durch diese Bedingung nicht erfasst wird, ist dem Anderson-Isolator zuzuordnen.

Zusammenfassend zeigen diese Daten, dass es in einem endlichen Parameterbereich (\mathcal{J}, Δ) , unter dem Einfluss beider Unordnungsvarianten, zu einer näherungsweisen Quantisierung des Transportes kommt. Dies entspricht einem diagonalen Anteil $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ des Ladungstransportes, der nahe dem quantisierten

Wert von eins ist, wobei der nicht-diagonale Anteil für lange Zeit gegen null konvergiert. Die Frage, ob das hier betrachtete Modell einen AFAI als topologische Phase im strengen Sinn realisiert, lässt sich mit unseren numerischen Daten nicht beantworten. Dafür wären Untersuchungen größerer Systeme notwendig, um die jetzt vermuteten Konvergenzen bestätigen zu können.

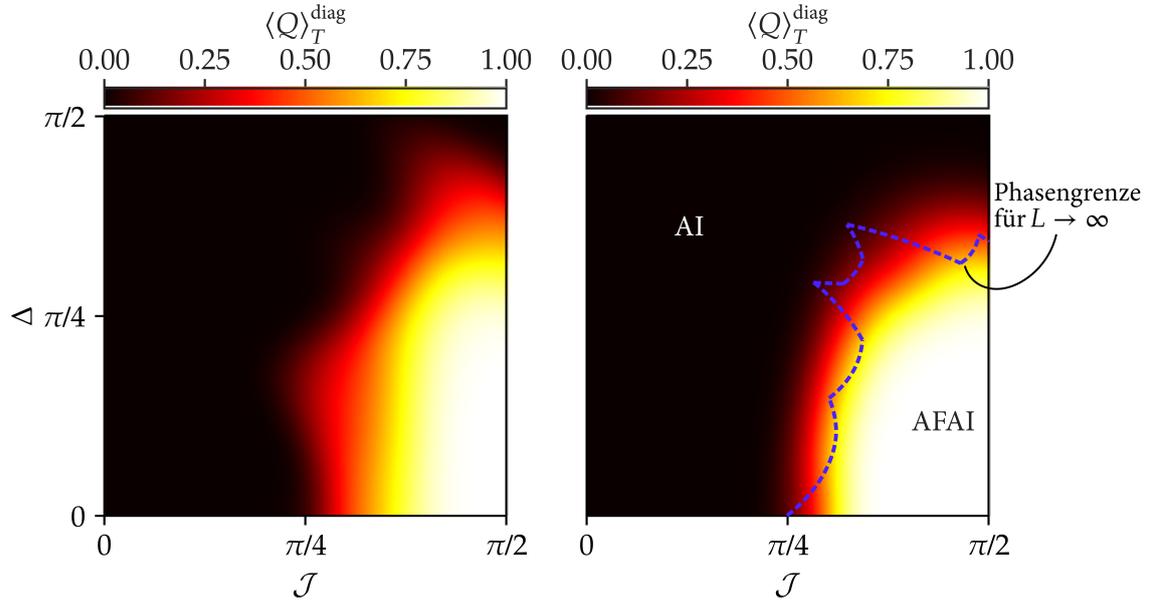


Abbildung 3.12.: Diagonaler Anteil des Ladungstransportes $\langle Q \rangle_T^{\text{diag}}$ für $(\mathcal{J}, \Delta) \in [0, \pi/2]^2$. Es ist $L = 50 \times 50$ und es wurde über 300 Unordnungsrealisierungen gemittelt. Linkes Bild: stellt Unordnungsvariante (D) dar. Rechtes Bild: stellt Unordnungsvariante (P) dar. Es ist zusätzlich in blau, die im thermodynamischen Limes erwartete, Phasengrenze angegeben (siehe Abschnitt 3.3 und Gleichung (3.13)).

Zusammenfassung und Ausblick

Unter dem Einfluss von Unordnung kann sich in periodisch getriebenen Systemen eine neue topologische Phase ausbilden, der sogenannte AFAI, welcher erstmals von Titum et al. in Ref. [25] eingeführt wurde.

In der vorliegenden Arbeit wird einerseits die Möglichkeit untersucht, mit verschiedenen Unordnungsarten ein periodisch getriebenes System in die AFAI Phase zu überführen, andererseits werden die dabei auftretenden Effekte auf den Ladungstransport studiert. Insbesondere widmet sich die Arbeit der Frage, unter welchen Bedingungen der Ladungstransport quantisiert ist.

In Kapitel 1 wird zunächst der AFI vorgestellt, als Beispiel einer topologischen Phase in periodisch getriebenen Systemen, welche kein Gegenstück in statischen Systemen besitzt. Hierzu wird das von Rudner et al. in Ref [24] vorgeschlagene Modell benutzt. Am Beispiel dieses Modells wird diskutiert, dass die Chern-Zahl keine geeignete Invariante ist, um die Volumen-Kanten-Korrespondenz in periodisch getriebenen Systemen zu formulieren. Stattdessen werden die Invarianten ν und \mathcal{W}_3 verwendet, welche die Homotopieklassen von $\pi_1(U(N))$ bzw. $\pi_3(U(N))$ beschreiben. Aus physikalischer Sicht liefert ν den Ladungstransport pro Periode, während \mathcal{W}_3 die Topologie des Volumens klassifiziert. Die Volumen-Kanten-Korrespondenz in periodisch getriebenen Systemen besteht nun darin, dass ν und \mathcal{W}_3 denselben Wert haben.

In Kapitel 2 wird analysiert, wie sich der Ladungstransport in periodisch getriebenen Systemen beschreiben lässt. Dazu wird der formale Zusammenhang zwischen der transportierten Ladung und der Invariante ν abgeleitet.

Während für adiabatisch getriebene Systeme die Arbeiten von Thouless und Laguhlin die Quantisierung des Transportes bzw. der Leitfähigkeit erklären, zeigt sich, dass für nicht-adiabatisch getriebene Systeme die Quantisierung im Allgemeinen verloren geht. Als Ursache hierfür werden vermiedene Kreuzungen in Volumenbändern und ein mangelnder Überlapp zwischen initialen und momentanen Zuständen identifiziert. Quantisierter Transport im nicht-adiabatischen Fall tritt nur bei bestimmten Parametern auf, so im AFI-Modell in perfekter Kopplung $(\mathcal{J}, \Delta) = (\pi/2, 0)$. Diese Situation zeichnet sich durch flache Volumenbänder aus, sodass sich die Quasienergie-Dispersion eines Kantenzustandes vollständig um die FBZ windet.

In Kapitel 3 werden Unordnungseffekte auf den Ladungstransport untersucht und das Konzept der Anderson-Lokalisierung eingeführt. In Kombination mit topologischen Kantenzuständen kann Anderson-Lokalisierung zum AFAI führen, der durch die Koexistenz von delokalisierten Kantenzuständen und vollständig lokalisierten Volumenzuständen bei allen Quasienergien charakterisiert ist. Es wird erklärt, warum der AFAI quantisierten Ladungstransport nicht nur bei bestimmten Parametern, sondern in einem endlichen Parameterbereich aufweist, und damit eine eigenständige topologische Phase darstellt. Für das AFI-Modell wird anhand zweier Unordnungsvarianten die Möglichkeit untersucht, den AFAI zu realisieren. Die numerische Untersuchung dieses Modells bestätigt die Existenz des AFAI insoweit, dass die Volumenzustände unter dem Einfluss beider Unordnungsvarianten lokalisieren und der Ladungstransport bis auf Korrekturen quantisiert ist, die der endlichen Systemgröße zugeschrieben werden können.

Ein strenger Nachweis der perfekten Quantisierung des Ladungstransportes, und damit der eindeutigen Existenz des AFAI als topologische Phase, kann durch die numerischen Untersuchungen endlicher Systeme allerdings nicht erreicht werden. In nachfolgenden Arbeiten sollte daher eine numerische Behandlung größerer Systeme zusammen mit einem „*finite-size-scaling*“ erfolgen, mit dem die (in der Systemgröße exponentiell kleinen) Korrekturen zur exakten Quantisierung erfasst werden können. Darüber hinaus wäre es interessant zu sehen, ob sich die in Ref [62] für nicht-hermitesche periodisch getriebene 1D Ketten gefundene perfekte Quantisierung des Ladungstransportes auch auf ungeordnete 2D Systeme übertragen und mit dem Konzept des AFAI verbinden lässt. Hierzu müsste das in der vorliegenden Arbeit verwendete Modell eines AFAI so erweitert werden, dass sich Kantenzustände durch eine imaginäre Bandlücke trennen lassen.

A.1.

Beweis des Matrixexponentials (1.8)

Zunächst wird Gl. (1.6) Umformuliert zu

$$\mathcal{H}_n(t, \mathbf{k}) = \langle \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad (\text{A.1})$$

mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)^\tau$ und $\mathbf{A}_n = (-\mathcal{J} \cos(\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}_n \rangle), -\mathcal{J} \sin(\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}_n \rangle), \Delta)^\tau$. Es gilt $\mu \mathbf{a}_n = \mathbf{A}_n$, mit $\mu = \|\mathbf{A}_n\| = \sqrt{\mathcal{J}^2 + \Delta^2}$. Zu berechnen ist demnach das Exponential $e^{-i\mu \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle}$. Um dies geschickt anzugehen werden die Antikommutatorrelationen der Pauli-Matrizen $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$ sowie $(\sigma^j)^2 = \mathbb{1}$, für $j = x, y, z$, genutzt. Die Potenzen von $\langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ ergeben sich zu:

$$\langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 = \underbrace{[(a_n^x \sigma^x)^2 + (a_n^y \sigma^y)^2 + (a_n^z \sigma^z)^2]}_{=\|\mathbf{a}_n\|^2 \mathbb{1} = \mathbb{1}} + \underbrace{\left[a_n^x a_n^y \{\sigma_x, \sigma_y\} + a_n^x a_n^z \{\sigma_x, \sigma_z\} + a_n^y a_n^z \{\sigma_y, \sigma_z\} \right]}_{=0}$$

$$= \mathbb{1}$$

$$\langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle^3 = \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle$$

⋮

$$\langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle^{2n} = \mathbb{1} \quad (\text{A.2})$$

$$\langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle^{2n+1} = \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (\text{A.3})$$

Mit der Kenntnis der Relationen (A.2) und (A.3) lässt sich das Matrixexponential bestimmen:

$$\begin{aligned} e^{i\mu \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\mu \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle)^k}{k!} = \mathbb{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} \mu^{2k}}{(2k)!} + i \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} \mu^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \mathbb{1} \cos \mu + i \langle \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle \sin \mu \\ &= \mathbb{1} \cos \mu + i \langle \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\sigma} \rangle \frac{\sin \mu}{\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Einsetzen von \mathbf{A}_n liefert das Resultat (1.8), mit $\sigma^0 = \mathbb{1}$ und der Exponentialdarstellung von Sinus und Kosinus.

Beweis der Identität (1.11)

Es sei $\mathcal{U}(T+t, T) = \mathcal{U}(t, 0)$ für einen Zeitentwicklungsoperator zu Zeigen, welcher von einem T -Periodischen Hamiltonian erzeugt wird.

Der Zeitentwicklungsoperator ist bekanntermaßen durch die Eigenschaft $\mathcal{U}(t)|\psi_\alpha(0)\rangle = |\psi_\alpha(t)\rangle$ charakterisiert. Aufgrund dessen erfüllt $\mathcal{U}(t)$ die Bewegungsgleichung

$$i\partial_t \mathcal{U}(t) = \mathcal{H}(t)\mathcal{U}(t), \quad (\text{A.5})$$

welche Gl. (1.3) als Lösung hat. Sei $\mathcal{V}(t) := \mathcal{U}(T+t, T) = \mathcal{U}(T+t, 0)\mathcal{U}^\dagger(t, 0)$ so kann dies in Gl. (A.5) eingesetzt werden, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
i\partial_t \mathcal{V}(t) &= i\partial_t(\mathcal{U}(T+t, 0)\mathcal{U}^\dagger(t, 0)) \\
&= \mathcal{H}(t+T)\mathcal{U}(T+t, 0)\mathcal{U}^\dagger(t, 0) \\
&= \mathcal{H}(t)\mathcal{U}(T+t, 0)\mathcal{U}^\dagger(t, 0) \\
&= \mathcal{H}\mathcal{V}(t)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Unter Beachtung, dass $\mathcal{V}(0) = \mathbb{1} = \mathcal{U}(0, 0)$ gilt, erfüllen $\mathcal{V}(t)$ und $\mathcal{U}(t, 0)$ dieselbe Bewegungsgleichung zum gleichen Anfangswert, sodass $\mathcal{V}(t) = \mathcal{U}(t, 0)$ geschlussfolgert werden kann.

Propagator ungleich Identität

Für den Fall, dass der Zeitentwicklungsoperator nach einer Periode nicht der Identität gleicht, kann er über die sogenannte „pull-back“-Abbildung

$$\mathcal{V}_\varepsilon(t) = \mathcal{U}(t)e^{-it\mathcal{H}_F^\varepsilon}, \text{ mit } \mathcal{H}_F^\varepsilon = \frac{i}{T} \log_\varepsilon \mathcal{U}(T) \tag{A.7}$$

transformiert werden [24, 44]. Die Quasienergieabhängigkeit ist dem Fakt geschuldet, dass ein Hauptzweig des Logarithmus gewählt werden muss. Da eine Homotopie von $\mathcal{U}(t)$ zu $\mathcal{V}_\varepsilon(t)$ existiert [44], besitzt $\mathcal{V}_\varepsilon(t)$ selbige Invariant. Dies rechtfertigt die Transformation.

B.1.

Beweis der Identität (2.2)

Zu Zeigen sei die Identität (2.2). Dabei sei $\mathcal{H}(\lambda)$ ein vom Parameter λ explizit abhängiger Hamiltonian, welcher den Zeitentwicklungsoperator erzeugt. Dann gilt für die Ableitung des Propagators nach dem Parameter λ :

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda \mathcal{U}(T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \partial_\lambda \prod_{n=N}^0 e^{-i\mathcal{H}(n\Delta t)\Delta t} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} (-i\Delta t) \sum_{k=0}^N \prod_{p=N}^{k-1} e^{-i\mathcal{H}(p\Delta t)\Delta t} \partial_\lambda \mathcal{H}(k\Delta t) \prod_{l=k}^0 e^{-i\mathcal{H}(l\Delta t)\Delta t} \\
 &= -i \int_0^T \mathcal{U}(T, t) \partial_\lambda \mathcal{H}(t) \mathcal{U}(t, 0) dt
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Transportgleichung

Hier gelten alle Annahmen für das AFI-Modell aus dem Haupttext (siehe Abschnitt 2.4). Den Ausgangspunkt zur Herleitung von Gleichung 2.29 bildet die Integration des Erwartungswertes des Stromes $\mathcal{J}(t)$ über eine Periode T :

$$Q(T) = \frac{1}{L} \int_0^T \text{Tr} \{ \rho(t) \mathcal{J}(t) \} dt . \tag{B.2}$$

Dabei ist L der Umfang des Zylinders, ρ die momentane Dichtematrix in Floquet-Basis, explizit als:

$$\rho(t) = \sum_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha\beta} |\psi_\alpha(t)\rangle \langle \psi_\beta(t)| , \text{ mit } \rho_{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{r} \in \Gamma_{\text{occ}}} \langle \psi_\alpha(0) | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi_\beta(0) \rangle . \tag{B.3}$$

Es gilt $\rho(t) = \tilde{\mathcal{U}}(t, 0) \rho_0 \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(t, 0)$ sowie $\mathcal{J}(t) \equiv \partial_\Phi \tilde{\mathcal{H}}(t)$. Damit lässt sich die transportierte Ladung darstellen als

$$Q(T) = \frac{1}{L} \int_0^T \text{Tr} \left\{ \rho_0 \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(t, 0) \partial_\Phi \tilde{\mathcal{H}}(t) \tilde{\mathcal{U}}(t, 0) \right\} . \tag{B.4}$$

Die Nutzung von Gl. (2.2), $\tilde{\mathcal{U}}^\dagger(t, 0) = \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(T) \tilde{\mathcal{U}}(T, t)$ sowie die Spurbildung über Floquet-Moden $|\psi_\alpha\rangle$ führt zu der Darstellung:

$$Q(T) = \frac{i}{L} \sum_{\alpha\alpha'} c_{\alpha\alpha'} \langle \psi_\alpha | \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(T) \partial_\Phi \tilde{\mathcal{U}}(T) | \psi_\alpha \rangle . \tag{B.5}$$

Dabei gilt $\rho_{\alpha\alpha'} = c_{\alpha\alpha'}$ für die im Haupttext verwendete Notation.

Literatur

1. Fu, L. & Kane, C. L. Time reversal polarization and a \mathbb{Z}_2 adiabatic spin pump. *Phys. Rev. B* **74** (2006).
2. Fu, L., Kane, C. L. & Mele, E. J. Topological Insulators in Three Dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007).
3. Bernevig, B. A., Hughes, T. L. & Zhang, S.-C. Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells. *Science* **314** (2006).
4. König, M., Wiedmann, S., Brüne, C., Roth, A., Buhmann, H., Molenkamp, L. W., Qi, X.-L. & Zhang, S.-C. Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells. *Science* **318** (2007).
5. Hsieh, D., Qian, D., Wray, L., Xia, Y., Hor, Y. S., Cava, R. J. & Hasan, M. Z. A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase. *Nature* **452** (2008).
6. Klitzing, K. v., Dorda, G. & Pepper, M. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980).
7. Thouless, D. J., Kohmoto, M., Nightingale, M. P. & den Nijs, M. Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982).
8. Kane, C. L. & Mele, E. J. \mathbb{Z}_2 topological order and the quantum spin Hall effect. *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005).
9. McGinley, M. & Cooper, N. R. Classification of topological insulators and superconductors out of equilibrium. *Phys. Rev. B* **99** (2019).
10. Altland, A. & Zirnbauer, M. R. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Phys. Rev. B* **55** (1997).
11. Kitaev, A. *Periodic table for topological insulators and superconductors* in *AIP conference proceedings* **1134** (2009).
12. Yao, W., MacDonald, A. & Niu, Q. Optical control of topological quantum transport in semiconductors. *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007).
13. Lindner, N. H., Refael, G. & Galitski, V. Floquet topological insulator in semiconductor quantum wells. *Nature Physics* **7** (2011).
14. Oka, T. & Aoki, H. Photovoltaic Hall effect in graphene. *Phys. Rev. B* **79** (2009).
15. Calvo, H. L., Pastawski, H. M., Roche, S. & Torres, L. E. F. Tuning laser-induced band gaps in graphene. *Applied Physics Letters* **98** (2011).
16. Wang, Y., Steinberg, H., Jarillo-Herrero, P. & Gedik, N. Observation of Floquet-Bloch states on the surface of a topological insulator. *Science* **342** (2013).
17. Kitagawa, T., Berg, E., Rudner, M. & Demler, E. Topological characterization of periodically driven quantum systems. *Phys. Rev. B* **82** (2010).

18. Kitagawa, T., Oka, T., Brataas, A., Fu, L. & Demler, E. Transport properties of nonequilibrium systems under the application of light: Photoinduced quantum Hall insulators without Landau levels. *Phys. Rev. B* **84** (2011).
19. Rudner, M. S. & Lindner, N. H. Band structure engineering and non-equilibrium dynamics in Floquet topological insulators. *Nature Reviews Physics* (2020).
20. Jotzu, G., Messer, M., Desbuquois, R., Lebrat, M., Uehlinger, T., Greif, D. & Esslinger, T. Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions. *Nature* **515** (2014).
21. Fläschner, N., Rem, B., Tarnowski, M, Vogel, D, Lühmann, D.-S., Sengstock, K & Weitenberg, C. Experimental reconstruction of the Berry curvature in a Floquet Bloch band. *Science* **352** (2016).
22. Rechtsman, M. C., Zeuner, J. M., Plotnik, Y., Lumer, Y., Podolsky, D., Dreisow, F., Nolte, S., Segev, M. & Szameit, A. Photonic Floquet topological insulators. *Nature* **496** (2013).
23. McIver, J. W., Schulte, B., Stein, F.-U., Matsuyama, T., Jotzu, G., Meier, G. & Cavalleri, A. Light-induced anomalous Hall effect in graphene. *Nature Physics* **16** (2020).
24. Rudner, M. S., Lindner, N. H., Berg, E. & Levin, M. Anomalous Edge States and the Bulk-Edge Correspondence for Periodically Driven Two-Dimensional Systems. *Phys. Rev. X* **3** (2013).
25. Titum, P., Berg, E., Rudner, M. S., Refael, G. & Lindner, N. H. Anomalous Floquet-Anderson Insulator as a Nonadiabatic Quantized Charge Pump. *Phys. Rev. X* **6** (2016).
26. Nathan, F., Abanin, D., Berg, E., Lindner, N. H. & Rudner, M. S. Anomalous Floquet insulators. *Phys. Rev. B* **99** (2019).
27. Nathan, F. & Rudner, M. S. Topological singularities and the general classification of Floquet–Bloch systems. *New Journal of Physics* **17** (2015).
28. Quelle, A, Weitenberg, C, Sengstock, K & Smith, C. M. Driving protocol for a Floquet topological phase without static counterpart. *New Journal of Physics* **19** (2017).
29. Nathan, F., Rudner, M. S., Lindner, N. H., Berg, E. & Refael, G. Quantized magnetization density in periodically driven systems. *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017).
30. Nathan, F., Abanin, D. A., Lindner, N. H., Berg, E. & Rudner, M. S. *Hierarchy of many-body invariants and quantized magnetization in anomalous Floquet insulators* 2019. arXiv: 1907.12228 [cond-mat.mes-hall].
31. Maczewsky, L. J., Zeuner, J. M., Nolte, S. & Szameit, A. Observation of photonic anomalous Floquet topological insulators. *Nature Communications* **8** (2017).
32. Mukherjee, S., Spracklen, A., Valiente, M., Andersson, E., Öhberg, P., Goldman, N. & Thomson, R. R. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications* **8** (2017).
33. Peng, Y.-G., Qin, C.-Z., Zhao, D.-G., Shen, Y.-X., Xu, X.-Y., Bao, M., Jia, H. & Zhu, X.-F. Experimental demonstration of anomalous Floquet topological insulator for sound. *Nature Communications* **7** (2016).
34. Wintersperger, K., Braun, C., Ünal, F. N., Eckardt, A., Liberto, M. D., Goldman, N., Bloch, I. & Aidelsburger, M. *Realization of anomalous Floquet topological phases with ultracold atoms* 2020. arXiv: 2002.09840 [cond-mat.quant-gas].

35. Halperin, B. I. Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev. B* **25** (1982).
36. Thouless, D. J. Quantization of particle transport. *Phys. Rev. B* **27** (1983).
37. Niu, Q & Thouless, D. J. Quantised adiabatic charge transport in the presence of substrate disorder and many-body interaction. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **17** (1984).
38. Laughlin, R. B. Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B* **23** (1981).
39. Anderson, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Phys. Rev.* **109** (1958).
40. Abrahams, E., Anderson, P. W., Licciardello, D. C. & Ramakrishnan, T. V. Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979).
41. Floquet, G. *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques* in *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **12** (1883).
42. Holthaus, M. Floquet engineering with quasienergy bands of periodically driven optical lattices. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **49** (2015).
43. Rudner, M. S. & Lindner, N. H. *The Floquet Engineer's Handbook* 2020. arXiv: 2003 . 08252 [cond-mat.mes-hall].
44. Carpentier, D., Delplace, P., Fruchart, M., Gawędzki, K. & Tauber, C. Construction and properties of a topological index for periodically driven time-reversal invariant 2D crystals. *Nuclear Physics B* **896** (2015).
45. Fox, R. H. Homotopy Groups and Torus Homotopy Groups. *Annals of Mathematics* **49** (1948).
46. Privitera, L., Russomanno, A., Citro, R. & Santoro, G. E. Nonadiabatic Breaking of Topological Pumping. *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018).
47. Shih, W.-K. & Niu, Q. Nonadiabatic particle transport in a one-dimensional electron system. *Phys. Rev. B* **50** (1994).
48. Avron, J. E. & Kons, Z. Quantum response at finite fields and breakdown of Chern numbers. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **32** (1999).
49. Russomanno, A., Silva, A. & Santoro, G. E. Periodic Steady Regime and Interference in a Periodically Driven Quantum System. *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012).
50. Born, M. & Fock, V. Beweis des Adiabatsatzes. *Zeitschrift für Physik* **51** (1928).
51. Kato, T. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *Journal of the Physical Society of Japan* **5** (1950).
52. Berry, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **392** (1984).
53. Niu, Q. Towards a quantum pump of electric charges. *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990).
54. Lindner, N. H., Berg, E. & Rudner, M. S. Universal Chiral Quasisteady States in Periodically Driven Many-Body Systems. *Phys. Rev. X* **7** (2017).
55. Breuer, H. P., Dietz, K. & Holthaus, M. The role of avoided crossings in the dynamics of strong laser field—matter interactions. *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters* **8** (1988).
56. Oliphant, T. E. *A guide to NumPy* (Trelgol Publishing USA, 2006).

57. Kundu, A., Rudner, M., Berg, E. & Lindner, N. H. Quantized large-bias current in the anomalous Floquet-Anderson insulator. *Phys. Rev. B* **101** (2020).
58. Semeghini, G., Landini, M., Castilho, P., Roy, S., Spagnolli, G., Trenkwalder, A., Fattori, M., Inguscio, M. & Modugno, G. Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization. *Nature Physics* **11** (2015).
59. Mitchell, N. P., Nash, L. M., Hexner, D., Turner, A. M. & Irvine, W. T. M. Amorphous topological insulators constructed from random point sets. *Nature Physics* **14** (2018).
60. Shklovskii, B. I., Shapiro, B., Sears, B. R., Lambrianides, P. & Shore, H. B. Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition. *Phys. Rev. B* **47** (1993).
61. D'Alessio, L. & Rigol, M. Long-time Behavior of Isolated Periodically Driven Interacting Lattice Systems. *Phys. Rev. X* **4** (2014).
62. Höckendorf, B., Alvermann, A. & Fehske, H. Topological origin of quantized transport in non-Hermitian Floquet chains. *Phys. Rev. Research* **2** (2020).

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Fehske für die umfassende Betreuung während der Arbeit bedanken. Insbesondere für die zahlreichen Anregungen und konstruktiven Kritiken bei der Erstellung der Arbeit. Ebenso möchte ich mich bei Herrn Dr. Alvermann für die Betreuung und kritischen Fragen bedanken, welche ein tieferes Verständnis des Themas ermöglichten. Ebenso bedanke ich mich bei Bastian Höckendorf und Alexander Filusch für die Anregungen und zahlreichen Gesprächen, welche maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Meiner Freundin danke ich für eine umfassende sprachliche Beratung sowie dafür, dass sie meine Monologe ertragen hat.

Mein größter Dank geht an meine Eltern, welche mich immer unterstützen und mir mein Studium ermöglicht haben.