Übungsblatt 8 Abgabe: Dienstag 10.12.2019

Aufgabe 15 *(8 Punkte)*

Maxwell-Boltzmann-Verteilung:

Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass dass für ein klassisches ideales Gas freier Atome der Masse m die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ (d.h. im Volumenelement d^3v um den Endpunkt von $\vec{v}$ im Geschwindigkeitsraum) hat, durch

$$f(\vec{v})d^3v \;=\; \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} d^3v$$

gegeben ist (Maxwell-Boltzmann-Verteilung). Berechnen Sie für ein Teilchen (je 1 Punkt)

a) die mittlere Geschwindigkeit $\langle\vec{v}\rangle$,

b) den mittleren Geschwindigkeitsbetrag $\langle|\vec{v}|\rangle$,

c) das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\langle\vec{v}^2\rangle$,

d) den Mittelwert des inversen Geschwindigkeitsbetrags $\langle 1/|\vec{v}|\rangle$,

e) den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}|_w$,

f) Berechnen Sie den mittleren Betrag der Relativgeschwindigkeit zweier Atome $\langle|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\rangle$,

g) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle$ eines Gasatoms.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(E)dE$, daß ein Atom eine Energie zwischen E und $E + dE$ hat (1 Punkt)?

Aufgabe 16 *(5 Punkte)*

Pauli-Druck im idealen Fermi-Gas:
Ein Gas N fermionischer Punktteilchen befindet sich im Volumen V bei $T = 0$.

a) Berechnen Sie die Fermienergie $\varepsilon_F(V, N)$ für die Dispersion $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2/(2m)$.

b) Bestimmen Sie die innere Energie $U(V, N)$. Geben Sie den Druck $p(V, N) = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N$ an. Vergleichen Sie mit dem Boltzmann-Gas.

Aufgabe 17 *(2 Punkte)*

Ideales Fermi-Gas:
Ein ideales Gas aus N fermionischen Teilchen befindet sich im Volumen V. Die Zustandsdichte der Einteilchen-Energien sei $N(\varepsilon) = C_\nu \varepsilon^{\nu-1}$. Zeigen Sie, dass bei $T = 0$ gilt

$$N = \frac{C_\nu}{\nu}\varepsilon_F^\nu, \qquad U = \frac{C_\nu}{\nu+1}\varepsilon_F^{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1}N\varepsilon_F. \tag{1}$$

Aufgabe 18 *(5 Punkte)*

Ideales Bose-Gas:
Ein ideales Gas aus N bosonischen Teilchen befindet sich im Volumen V. Die Zustandsdichte der Einteilchen-Energien sei $N(\varepsilon) = C_\nu \varepsilon^{\nu-1}$.

a) Zeigen Sie, dass für hohe Temperaturen mit $-\mu \gg kT$ näherungsweise gilt

$$U = \nu NkT, \qquad C_v = \nu Nk. \tag{2}$$

b) Es sei nun $T \leqslant T_0$, wobei $T_0 \equiv T_0(V, N)$ die Bose-Kondensationstemperatur bezeichnet. In diesem Bereich ist $\mu = 0$. Zeigen Sie, dass

$$kT_0 = \left(\frac{n}{C_\nu \Gamma(\nu)\zeta(\nu)(2s+1)}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{3}$$

mit $n = N/V$. Hinweis: Zeta-Funktion:

$$\zeta(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x - 1}. \tag{4}$$

c) Zeigen Sie für $T \leqslant T_0$, dass

$$N_{\varepsilon>0} = N\left(\frac{T}{T_0}\right)^\nu, \qquad N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^\nu\right]. \tag{5}$$

d) Zeigen Sie für $T \leqslant T_0$, dass

$$U = C_\nu \Gamma(\nu+1)\zeta(\nu+1)(kT)^{\nu+1}V(2s+1). \tag{6}$$