Übungsblatt 7 Abgabe: Dienstag 3.12.2019

Aufgabe 13 *(10 Punkte)*

Harmonischer Oszillator als Beispiel eines ergodischen Systems:

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Frequenz ω und Masse m hat die Energie

$$E(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2. \tag{1}$$

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen lauten

$$q(t) = q(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t, \tag{2}$$

$$p(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega q(0)\sin\omega t, \tag{3}$$

a) Skizzieren Sie eine typische Trajektorie des Oszillators im Phasenraum (p, q) (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Energie erhalten ist (2 Punkte):

$$E\left(p(t), q(t)\right) = E\left(p(0), q(0)\right) \equiv \mathcal{E} \tag{4}$$

c) Zeigen Sie, dass das System ergodisch ist. Betrachten Sie dazu das Zeitmittel von p^2

$$\langle p^2 \rangle_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t dt' p^2(t') \tag{5}$$

und zeigen Sie, dass es äquivalent zum mikrokanonischen Ensemble-Mittelwert (Scharmittel) von p^2,

$$\langle p^2 \rangle_{ens} = \frac{\int dp\, dq\; p^2\, \delta\left(E(p,q) - \mathcal{E}\right)}{\int dp\, dq\; \delta\left(E(p,q) - \mathcal{E}\right)} \tag{6}$$

ist. (6 Punkte)
Hinweis: zur Berechnung des Integrals benötigen Sie die Identität

$$\delta\left(F(x)\right) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x - x_i)}{|F'(x_i)|} \tag{7}$$

wobei x_i die Nullstellen von $F(x)$ sind, d.h. es gilt $F(x_i) = 0$.

Aufgabe 14 *(10 Punkte)*

Sommerfeld-Entwicklung:

Das großkanonische Potential für ein ideales Fermigas lautet

$$\Omega = -kT \sum_{\alpha} \ln\left(1 + e^{-\frac{\varepsilon(\lambda_\alpha)-\mu}{kT}}\right) \tag{8}$$

Wir wollen den Tieftemperaturlimes $kT \ll \varepsilon_F$ betrachten, wobei ε_F die Fermienergie des Ferigases ist (die Energie bis zu der bei $T = 0$ alle Zustände mit Fermionen besetzt sind).

a) Skizzieren Sie die Ableitung der Fermifunktion

$$-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon(\lambda_\alpha)} \equiv -f' = \frac{1}{4kT\cosh^2\left(\frac{\varepsilon(\lambda_\alpha)-\mu}{2kT}\right)} \tag{9}$$

als Funktion von $\varepsilon(\lambda_\alpha)$ und zeigen Sie, dass die Fläche unter der Kurve den Flächeninhalt 1 hat.

b) Zeigen Sie, dass mittels der Zustandsdichte

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{V(2s+1)} \sum_{\alpha} \delta\left(\varepsilon - \varepsilon(\lambda_\alpha)\right) \tag{10}$$

(hier $s = \frac{1}{2}$ ist der Spin der Teilchen) das großkanonische Potential als

$$\Omega = -kTV(2s+1) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, N(\varepsilon) \ln\left(1 + e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\right) \tag{11}$$

geschrieben werden kann.

c) Führen Sie eine zweifache partielle Integration durch, um unter Verwendung der Funktionen

$$\phi(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon'\, N(\varepsilon'), \qquad \psi(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon'\, \phi(\varepsilon') \tag{12}$$

zu zeigen, dass

$$\Omega = -V(2s+1) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \psi(\varepsilon)\, [-f'(\varepsilon-\mu)] \tag{13}$$

gilt, wobei $f'(\varepsilon-\mu)$ die Funktion aus Gleichung (9) für $\varepsilon(\lambda_\alpha) = \varepsilon$ ist.

d) Entwickeln Sie die Funktion $\psi(\varepsilon)$ in eine Taylorreihe um $\varepsilon = \mu$ bis in zweite Ordnung (bis zum Term $\sim (\varepsilon-\mu)^2$) und zeigen Sie, dass damit Gleichung (13) näherungsweise als

$$\Omega = -V(2s+1)\left[\psi(\mu) - \frac{\pi^2}{6} N(\mu)(kT)^2\right] \tag{14}$$

geschrieben werden kann. [Hinweis: benutzen Sie $\psi'(\mu) = \phi(\mu)$ und $\psi''(\mu) = N(\mu)$ sowie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, (\varepsilon-\mu)^2[-f'(\varepsilon-\mu)] = \frac{\pi^2}{3}(kT)^2$.]

e) Zeigen Sie, dass $\phi(\varepsilon_F) \equiv \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} d\varepsilon' N(\varepsilon') = \frac{N}{V(2s+1)}$.