

|   |                         |
|---|-------------------------|
| <b>Versuch W08: Wärmetransport</b>                    |                         |
| Physik, Studentenfassung(10000) vom 3. September 2020 |                         |
| Gruppe/Versuchs-Nr.: /                                | Datum:                  |
| Name 1:<br>Note Testat:                               | Name 2:<br>Note Testat: |
| Note Protokoll:                                       | Betreuer:               |

- **Versuchsziel**

Erlangung von Grundkenntnissen zur Wärmeleitung und –strahlung, insbesondere zur Wärmeleitfähigkeit von Metallen und zum Strahlungsgleichgewicht zwischen Körpern und ihrer Umgebung.

- **Themen zur Vorbereitung**

Arten des Wärmetransports (Wärmeleitung und –strahlung sowie Konvektion); Wärmeleitungsgleichung, Wärmeleitfähigkeit, U-Wert; Wiedemann–Franz–Gesetz, Lorenz–Zahl; Plancksche Strahlungsformel, Stefan–Boltzmann–Gesetz der Wärmestrahlung

- **Messaufgaben**

Messen Sie die zeitlich veränderliche Temperaturverteilung in einem Metallstab, der an einer Grundfläche mit konstanter Leistung elektrisch beheizt und an der gegenüberliegenden Grundfläche mit Eiswasser gekühlt wird.

Hinweise: Der Stab besteht entweder aus Kupfer oder Aluminium, für welche Sie die Heizstromstärke 1,7 A bzw. 1,5 A wählen. Messen Sie die Temperaturverteilung nach Einschalten der Heizung an den zehn äquidistanten Messpunkten entlang der Stabachse alle 5 Minuten über die Dauer von 60 min.

Messen Sie mit der Wärmebildkamera (i) die Umgebungstemperatur und (ii) die Temperaturverteilung auf der Oberfläche der Wärmeisolierung sowie (iii) die Temperatur am Anschlussstutzen. Diese Temperaturen werden zur Berechnung der Leistungsverluste durch Wärmestrahlung benötigt. Es langt, sie einmalig nach 60 min zu messen. Beobachten Sie dennoch auch zwischenzeitlich die Entwicklung dieser Temperaturverteilung.

Nutzen Sie zur Aufzeichnung der Messwerte die Tabellen auf S. 18f.

- **Sicherheitshinweise**

Der Stromversorgung der Heizung ist ein Temperaturschalter TS1000 vorgeschaltet. Er wird mit einem Temperatursensor PT1000 angesteuert, der auf dem Metallstab in der Nähe des Heizstabes angebracht ist (Sensor verdeckt, Abgriff über blaue Buchsen am Anschlussstutzen). Die Abschalttemperatur ist auf 60 °C eingestellt und darf nicht erhöht werden. Bei Überschreitung dieser Schwelle würde die Fixierung der 10 (verdeckten) NTC–Temperatursensoren auf dem Metallstab irreversibel gelockert werden.

- **Auswertung**

**1. Wärmeleitfähigkeit:** Ermitteln Sie aus Ihren Messdaten die spezifische Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Geben Sie die Messabweichung mit der Konfidenz 95 % an. Beachten Sie die Hinweise im Abschnitt 5, S. 9 ff.

**2. Elektrische Leitfähigkeit:** Berechnen Sie aus dem ermittelten Wert für  $\lambda$  die elektrischen Größen spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  und Widerstand  $\rho$  bei Zimmertemperatur. Gehen Sie dabei von Gl. (5), S. 6, aus und verwenden Sie für die Lorenz–Zahl den theoretischen Wert (7). Geben Sie für beide Größen die Messabweichung zur Konfidenz 95 % an. Folgen Sie den Hinweisen im Abschnitt 5.4, S.11.

**Aufgabe zur Vorbereitung**

Ein Haus habe die Wohnfläche  $F = 180 \text{ m}^2$ . Es werde während der Dauer von 8 Monaten eines Jahres beheizt, wobei im Mittel der Temperaturunterschied zwischen dem Innen- und Außenbereich  $\Delta T = 10 \text{ K}$  beträgt. Die Außenhülle des Gebäudes bestehe aus folgenden Teilen:

| pos | Bauteil     | Aufbau und Eigenschaften   | Fläche in $\text{m}^2$ |
|-----|-------------|--|------------------------|
| 1   | Außenwand   | Gasbeton ( $L_1 = 36 \text{ cm}$ ) und Wärmedämmputz $L_2 = 4 \text{ cm}$                      | 150                    |
| 2   | Bodenplatte | Beton ( $L_1 = 15 \text{ cm}$ ) und Perimeterdämmung (Polystyrol, $L_2 = 15 \text{ cm}$ )      | 130                    |
| 3   | Dach        | Dämmung (Mineralfaser, $L = 25 \text{ cm}$ )   | 180                    |
| 4   | Fenster     | 3-fach-Verglasung, Kryptonfüllung, $U = 0,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ | 50                     |

Wie groß ist der jährliche Transmissionswärmeverlust  $Q$  der Bauhülle pro  $1 \text{ m}^2$  Wohnfläche?

Hinweise:

Die  $U$ -Werte können aus den angegebenen Schichtdicken und den spezifischen Wärmeleitfähigkeiten in Tab. 1, S. 5 berechnet werden. Dies geschieht für ein 1-Schicht-Bauteil (pos 3) nach Gl. (4), S. 5 und für ein 2-Schicht-Bauteil (pos 1 und 2) nach Gl. (31), S. 13. Geben Sie  $Q$  in der Einheit  $\text{kWh} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{a}^{-1}$  an.

# 1 Wärmetransport

Steht ein Vielteilchensystem, wie z. B. eine gewisse makroskopische Gas- oder Flüssigkeitsmenge oder ein starrer Körper, mit der Umgebung im Energie- oder Stoffaustausch, so kommt es im Allgemeinen zur Änderung  $dU$  der inneren Energie  $U$ , die sich nach dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre aus zwei Anteilen zusammensetzt,

$$dU = \delta Q + \delta W .$$

Darin bezeichnet  $\delta W$  die geleistete Arbeit, zum Beispiel eine isobare Volumenänderung  $\delta W = p dV$ , und  $\delta Q$  ist die zu- oder abgeführte Wärmemenge.

In diesem Experiment wird einem Metallstab über eine seiner Grundflächen mittels einer elektrischen Heizung der Leistung  $P$  in der Zeit  $dt$  die Energie (Wärme)  $dE = P \cdot dt$  zugeführt. Dies ändert seine innere Energie  $U$  um ebendiesen Betrag,  $dU = dE$ . Dehnt er sich dabei aus, so wird ein gewisser Teil von  $dE$  für die Arbeit  $\delta W = p dV$  gegen den äußeren Luftdruck  $p$  verwendet. Für die Änderung der Wärmemenge im Stab steht dann noch  $\delta Q = dU - \delta W$  zur Verfügung. Ist die Volumenänderung gering und wird auch sonst keine weitere Arbeit geleistet, finden insbesondere keine Phasenumwandlungen statt (keine Änderung der Kristallstruktur und keine anderen Phasenumwandlungen wie Schmelzen), dann gilt

$$\delta Q \lesssim dU$$

und die zugeführte Energie  $dE$  erhöht allein die Temperatur. Die Temperatur ist zu jenem Anteil der inneren Energie proportional, welcher die irregulären Bewegungen der Teilchen beschreibt, das sind die Schwingungsenergie der atomaren Gitterbausteine sowie die kinetische Energie der Elektronen.

Die Temperatur ist hierbei zunächst nicht gleichverteilt. Durch die Kraftwirkung zwischen den Teilchen wird die Wärmeenergie von wärmeren zu kälteren Regionen im Stab geleitet. Diese sogenannte *Konduktion* ist eine spezielle Form des Wärmetransports und führt in einem allseitig isolierten Stab asymptotisch zum Temperatenausgleich im Stab.

Allgemein unterscheidet man drei Arten des Wärmetransports:

## Wärmeleitung (Konduktion, Wärmediffusion):

Wärmetransport durch mikroskopische Teilchen-

stöße. Beispiel: Wärmeleitung durch die Außenhülle eines Hauses (Wände, Bodenplatte, Fenster, Türen, Dach)

## Konvektion:

Wärmetransport durch Stofftransport. Beispiel: Warmwasserkreislauf in Hausheizung

## Wärmestrahlung:

Wärmetransport durch elektromagnetische Wellen, mit Wellenlängen von etwa  $1 \dots 1000 \mu\text{m}$ , also vom langwelligen Rand des von Menschen sichtbaren Bereichs bis hin zu den Mikrowellen. Im Unterschied zu den anderen Transportarten setzt der Strahlungstransport kein Medium (Gase, Flüssigkeiten oder feste Körper) voraus, er findet also auch im Vakuum statt, dass dann nur mit ebendieser Strahlung erfüllt ist. Beispiele: Sonnenstrahlung auf die Erde sowie die Wärmeabstrahlung von der Erdoberfläche in die Luft bzw. den Weltraum.<sup>1)</sup>

Ist die räumliche Temperaturverteilung  $T(\mathbf{x}, t)$  in einem mit Materie gefüllten Raumbereich zu einem gewissen Zeitpunkt  $t$  nicht konstant, so kommt es zum Wärmetransport zwischen den Teilbereichen. Ist das System nach außen abgeschlossen (thermisch isoliert), dann stellt sich nach dem zweiten Hauptsatz der Wärmelehre asymptotisch eine Temperaturverteilung ein, die räumlich und zeitlich konstant ist. Der dafür nötige Wärmetransport kann vorrangig auf eine einzelne der drei Transportarten beruhen, in realen Systemen sind jedoch oftmals mehrere Transportarten relevant.

<sup>1)</sup>Über Wärmestrahlung transportiert der menschliche Körper einen Teil seiner Wärme, die vor allem in Muskeln und im Gehirn erzeugt wird, in die Umgebung. Dies ist nur möglich, wenn die Umgebung kälter als die Körperoberfläche ist, also kälter als ca.  $37^\circ\text{C}$ . Die Abstrahlung geschieht vor allem über unbedeckte Körperteile (Kopf, Hals, Hände). Ein anderer wesentlicher Beitrag für die Ableitung von Körperwärme geschieht durch Konvektion, indem Körperflüssigkeit verdunstet und an die Umgebung abgegeben wird. Dies geschieht z. B. durch den regelmäßigen Ausstoß feuchter Atemluft wie auch bei erhöhtem Energieumsatz (körperliche Arbeit, Sport) durch das Verdampfen von Hautschweiß. Bewegt man einen angefeuchteten Finger durch die Luft, spürt man die Kühlung besonders deutlich, weil dann der Dampf schneller abtransportiert wird und dadurch letztlich mehr Dampf pro Zeiteinheit entstehen kann, was die Kühlleistung erhöht.

## 2 Wärmeleitung

### 2.1 Wärmeleitungsgleichung

In einem stofflich homogenen Festkörper tritt nur Wärmeleitung auf. Dann genügt die raum-zeitliche Temperaturverteilung der *Wärmeleitungsgleichung*

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q \quad (1)$$

Darin sind  $c$  die spezifische Wärmekapazität ( $[c] = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $\rho$  die Massedichte ( $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) und  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit mit der Maßeinheit,

$$[\lambda] = \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{K} \cdot \text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}}.$$

Darüber hinaus ist  $q(\mathbf{x}, t)$  die volumenspezifische Leistung der Wärmequellen, die in der Einheit  $[q] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$  gemessen wird. Im Allgemeinen hängt sie vom Ort  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  und der Zeit  $t$  ab, im Experiment jedoch nur vom Ort.

### 2.2 Wärmeleitung im Stab

Ein zylinderförmiger Stab (Querschnittsfläche  $A$ , Länge  $L$ ) werde mit einer konstanten (elektrischen) Heizleistung  $P = \Delta Q / \Delta t$  an einer Grundfläche (am Ort  $x = L$ ) beheizt und an der gegenüberliegende Grundfläche ( $x = 0$ ) gekühlt, Abb. 1.

Die Mantelfläche sei zur Umgebung gut isoliert, so dass der Wärmestrom (idealisiert) nur entlang der Zy-

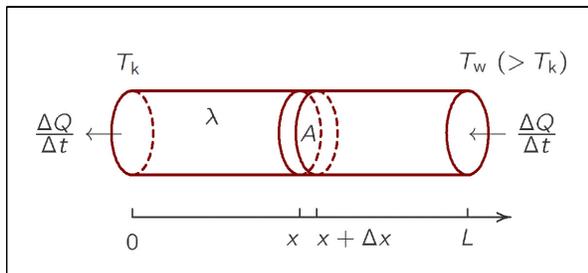


Abb. 1: Schema zur Wärmeleitung durch einen zylinderförmigen Stab mit der Länge  $L$  und der Querschnittsfläche  $A$ . Die Grundflächen werden auf den konstanten Temperaturen  $T_w$  bzw.  $T_k$  gehalten. Dann tritt im stationären Zustand pro Zeiteinheit  $\Delta t$  gleich viel Wärme  $\Delta Q$  auf der linken Seite ein wie rechts aus.

linderachse erfolgt. Die Temperatur ändert sich dann nur entlang der Zylinderachse ( $x$ -Achse), der Richtungssinn sei so gewählt, dass die Temperatur  $T$  mit  $x$  wächst,  $\partial T / \partial x > 0$ . Im angenommenen stationären Zustand gilt darüber hinaus  $\partial T / \partial t = 0$ . Es wird nun ein Volumenelement  $\Delta V(\mathbf{x}) = A(x) \cdot \Delta x$  an einer beliebigen Stelle  $x$ ,  $0 < x < L$ , betrachtet. Bei vorausgesetzter Stationarität der Temperaturverteilung strömt pro Zeiteinheit ebensoviel Wärme  $\Delta Q$  durch die Seitenfläche  $A$  an der Stelle  $x + \Delta x$  ein wie an der Stelle  $x$  aus. Die Wärmeflussstärke  $P = \Delta Q / \Delta t$  wird als proportional zur Fläche  $A$  wie auch zum Temperaturunterschied  $\Delta T = T(x + \Delta x) - T(x)$  zwischen den Seitenflächen angesetzt,

$$P = \lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Die Proportionalitätskonstante  $\lambda$  nennt man *spezifische Wärmeleitfähigkeit*. Ist sie ortsunabhängig (homogenes Material), dann stellt sich ein konstantes Temperaturgefälle ein, so dass

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_w - T_k}{L}$$

gesetzt werden kann. Darin sind  $T_k$  und  $T_w$  die Temperaturen an den Stabenden am kalten bzw. warmen Ende. Die volumenspezifische Wärmekapazität  $c\rho$  spielt wegen der vorausgesetzten Stationarität der Temperaturverteilung keine Rolle. Somit gilt schließlich,

$$P = \lambda \cdot A \cdot \frac{T_w - T_k}{L}. \quad (2)$$

Folglich kann man für gegebene Abmaße  $A$  und  $L$  des Stabes durch Messung der Temperaturen  $T_k$  und  $T_w$  an den Stabenden im stationären Zustand und bei bekannter konstanter Heizleistung  $P$  die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Stab-Materials bestimmen,

$$\lambda = \frac{P \cdot L}{A \cdot (T_w - T_k)} \quad (3)$$

Für einige ausgewählte Stoffe sind  $\lambda$ -Werte in Tab. 1 angegeben. Die obige Betrachtung liegt der Ableitung der Wärmeleitungsgleichung (1) zugrunde, s. Anhang, S. 12.

**Tab. 1: Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  verschiedener Stoffe. Falls keine Temperatur angegeben ist, bezieht sich der  $\lambda$ -Wert auf die Zimmertemperatur 20 °C.**

| Stoff                          | $\lambda$ in W/(m · K) |
|--------------------------------|------------------------|
| Krypton (1,14 ppm vol in Luft) | 0,00949                |
| SF <sub>6</sub> -Gas           | 0,014                  |
| Argon (0,934 % vol in Luft)    | 0,018                  |
| Luft                           | 0,026                  |
| Wasserdampf (100 °C)           | 0,025                  |
| Wasserdampf (200 °C)           | 0,033                  |
| Polystyrol Hartschaum          | 0,038(5)               |
| Mineralfaser-Dämmstoff         | 0,03 – 0,04            |
| Holz                           | 0,05 – 0,40            |
| Dämmputz                       | 0,09 – 0,11            |
| Gasbeton                       | 0,2–0,3                |
| Tonziegel                      | 0,5                    |
| Wasser (20 °C)                 | 0,60                   |
| Wasser (99,6 °C)               | 0,68                   |
| Schaumstoffe                   | 0,03–0,05              |
| Schnee 0 °C                    | 0,1 – 0,2              |
| Glas                           | 0,5 – 1,2              |
| Quarzglas                      | 1,36                   |
| Beton                          | 2,1                    |
| Granit                         | 2,4–3,8                |
| Stahl hochlegiert              | 10–28                  |
| Gusseisen                      | 30–52                  |
| Stahl unlegiert                | 45–65                  |
| Eisen                          | 80                     |
| Aluminium (technisch)          | 210                    |
| Kupfer (technisch)             | 380                    |
| Diamant                        | 1000–3300              |

## 2.3 Stationäres Nichtgleichgewicht

Wird der Stab an seinen beiden Grundflächen permanent beheizt bzw. gekühlt, so kann sich im Stab kein thermodynamisches *Nichtgleichgewicht* einstellen, das durch eine zeitlich und örtlich konstante Temperaturverteilung charakterisiert ist. Solch ein Gleichgewicht würde sich erst nach Abschalten der Heizung asymptotisch einstellen können, was durch den Zweiten Hauptsatz der Wärmelehre beschrieben wird. Das zeitlich stationäre Nichtgleichgewicht kann jedoch wegen der andauernden Heizung bzw. Kühlung an den Grundflächen des Stabes aufrecht erhalten werden. Der Stab ist also energetisch von seiner Umgebung nicht abgeschlossen. Andererseits gibt es innerhalb des Stabes ein Bestreben nach Temperaturengleichung was nach dem Zweiten Hauptsatz die Entropie des Stabes erhöht. Im stationären Zustand erhält man folgende Entropie-Bilanz: An der Heizung wird in der Zeitspanne  $\Delta t$  die Entropie  $\Delta S_w = \Delta Q/T_w$  in den Stab eingebracht und an der gekühlten Seite in der gleichen Zeitspanne die Entropie  $\Delta S_k = \Delta Q/T_k$  abgegeben, wobei  $\Delta S_w < \Delta S_k$  gilt. Somit

wird dem Stab in der gleichen Zeitspanne  $\Delta t$  mehr Entropie entzogen als eingebracht. Dies ermöglicht die Aufrechterhaltung des Nichtgleichgewichts in Form einer inhomogenen Temperaturverteilung im Stab. Da der Zustand aber stationär ist, muss in der Zeit  $\Delta t$  intern die Entropie  $\Delta S_k - \Delta S_w$  entstehen.<sup>2)</sup>

## 2.4 U-Wert

Unter Verwendung von  $P = \Delta Q/\Delta t$  kann man (3) nach dem sogenannten *U-Wert* umstellen,

$$U \equiv \frac{\Delta Q/\Delta t}{A \cdot (T_w - T_k)} = \frac{\lambda}{L} \quad (4)$$

Er wird in der Einheit

$$[U] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

gemessen und gibt im stationären Zustand an, wie viel Wärmeenergie  $\Delta Q$  in der Zeit  $\Delta t$  auf einen Quader mit der Vorderfläche  $A$  eingeleitet werden muss, damit bis zur gegenüberliegenden Rückfläche (gleicher Größe  $A$ ) der Temperaturunterschied  $(T_w - T_k)$  aufrecht erhalten wird, sofern keine Wärme über die Seitenflächen verloren geht. Diese Interpretation ist für bauphysikalische Berechnungen bedeutsam. Bestehe beispielsweise die Außenhülle eines Gebäudes im Bereich der gemauerten Wände allein aus gebrannten Tonziegel mit bekannter Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  (s. Tab. 1, S. 5) und der Wanddicke  $L = 0,36$  m. Will man nun bei der Außentemperatur 10 °C die Innentemperatur bei 20 °C konstant halten ( $(T_w - T_k) = 10$  K), so muss man die flächenspezifische Heizleistung

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot A} = U \cdot (T_w - T_k) = \frac{\lambda \cdot (T_w - T_k)}{L} \approx 14 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

aufbringen. Verwendet man Gasbeton statt Tonziegel, reduziert sich diese Leistung entsprechend der geringeren Wärmeleitfähigkeit um ca. 50%.

<sup>2)</sup>Eine analoge Betrachtung gilt für die Strahlungsbilanz zwischen Sonne und Erde. Die Sonne strahlt elektromagnetisch bei der Oberflächentemperatur von etwa  $T_w = 6000$  K in den Weltraum und somit auch auf die Erde, welche ihrerseits mit der mittleren Oberflächentemperatur von etwa  $T_k = 290$  K strahlt. Somit wird auch hier von der Erde in der gleichen Zeit mehr Entropie ex- als importiert, wodurch Strukturbildungen wie das Leben erst ermöglicht werden.

## 2.5 Analogie zur Elektrik

Nach Gl. (3) ist die Wärmestromstärke  $I \equiv \Delta Q / \Delta t$  durch einen Stab im stationären Zustand proportional zur Temperaturdifferenz ( $T_2 - T_1$ ), mit der Proportionalitätskonstante

$$G \equiv \frac{\lambda \cdot A}{L},$$

die als *Wärmeleitwert* interpretiert werden kann, mit der Einheit

$$[G] = \text{W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Seine Inverse ist der Wärmewiderstand,

$$R \equiv G^{-1} = \frac{L}{\lambda \cdot A}, \quad [R] = \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Somit gilt

$$R = \frac{T_2 - T_1}{I}.$$

Dies ist das Analogon zum Ohmschen Gesetz  $R = U/I$  in der Elektrizitätslehre, wobei dort  $R$  den elektrischen Widerstand bezeichnet sowie  $I$  und  $U$  die elektrische Stromstärke bzw. Spannung sind. Der elektrische Potentialdifferenz  $\Delta\varphi$ , also der Spannung  $U$ , entspricht die Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Folglich findet das elektrische Potential  $\varphi$  seine Entsprechung in der Temperatur  $T$ .

## 2.6 Wiedemann–Franz–Gesetz

Die Wärmeleitfähigkeit in Metallen beruht zum einen auf der Wechselwirkung zwischen den Gitteratomen, die nahezu ortsfest im Kristallverband um ihre Mittel-lage schwingen und dabei Bewegungsenergie weiter-leiten. Zum anderen wird die Wärmeleitung durch frei bewegliche Elektronen hervorgerufen, die ihrerseits auch die elektrische Leitfähigkeit bedingen. So liegt eine Beziehung zwischen beiden Leitfähigkeiten nahe. Solch ein Zusammenhang wurde von Gustav Heinrich Wiedemann (1826–1899) und Rudolph Franz (1826–1902) in dem nach ihnen benannten Gesetz auf em-pirischem Wege gefunden,

$$\sigma = \frac{\lambda}{L \cdot T} \quad (5)$$

Darin sind  $T$  die (absolute) Temperatur und  $\sigma$  die spezifische elektrische Leitfähigkeit, mit der Einheit

$$[\sigma] = \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Die Zahl  $L$  wird nach Ludvig Valentin Lorenz (1829–1891) benannt. Gleichung (5) gilt in guter Näherung für alle Metalle bei hinreichend großen Temperaturen,  $T \gtrsim 200 \text{ K}$ . Für viele Metalle gilt bei Zimmertempe-ratur

$$L_{T=293\text{K}} = (1,9 \dots 2,3) \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 / \text{K}^2. \quad (6)$$

Bis zu Temperaturen um 900 K steigt die Lorenz-Zahl nur ca. 5% nahezu linear an. Mit einem quan-tentheoretischen Ansatz haben Arnold Sommerfeld (1868–1951) und Paul Drude (1863–1906) die Lorenz-Zahl auf die Boltzmann-Konstante

$$k \approx 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Ws} / \text{K}$$

und die Elementarladung

$$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

zurückgeführt,

$$L_{\text{th}} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^2.$$

Dies ergibt den Zahlenwert

$$L_{\text{th}} \approx 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 / \text{K}^2 \quad (7)$$

Für einige ausgewählte Stoffe sind Werte des spezi-fischen elektrischen Widerstands  $\rho = \sigma^{-1}$  in Tab. 2, S. 7, angegeben.

Die Temperaturabhängigkeit wird üblicherweise mit dem linearen Ansatz

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_0 \cdot [1 + \alpha(T - T_0)] \\ &= \rho_0(1 - \alpha T_0) + \rho_0 \alpha \cdot T \end{aligned} \quad (8)$$

beschrieben, mit  $\rho_0 \equiv \rho(T_0)$ . Einige Werte für den Temperaturkoeffizient  $\alpha$  sind ebenfalls in der Tabelle angegeben. Der Vergleich von (8) mit (5) liefert unter Beachtung von  $\rho = \sigma^{-1}$ ,

$$\alpha \approx \frac{L}{\lambda \rho_0} \quad (9)$$

Dies gilt für Temperaturen  $T_0$  in der Nähe von 300 K.

Tab. 2: Werte des spezifischen elektrischen Widerstands  $\rho = \sigma^{-1}$  und des linearen Temperaturkoeffizienten  $\alpha$  verschiedener Stoffe bei der Referenztemperatur  $T_0 = 293 \text{ K}$  (gleich Zimmertemperatur  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

| Stoff  | $\rho / (\Omega \text{ m})$       | $\alpha / \text{K}^{-1}$ |
|--|-----------------------------------|--------------------------|
| <b>Leiter: <math>\rho \lesssim 10^{-4} \Omega \text{ m}</math></b>                 |                                   |                          |
| Silber   | $1,587 \cdot 10^{-8}$             | $3,8 \cdot 10^{-3}$      |
| Kupfer (Elektrokabel)  | $(1,69 \dots 1,75) \cdot 10^{-8}$ | $3,9 \cdot 10^{-3}$      |
| Gold   | $2,214 \cdot 10^{-8}$             | $3,9 \cdot 10^{-3}$      |
| Aluminium  | $2,65 \cdot 10^{-8}$              | $3,9 \cdot 10^{-3}$      |
| Wolfram  | $5,28 \cdot 10^{-8}$              | $4,1 \cdot 10^{-3}$      |
| Messing  | $7 \cdot 10^{-8}$                 | $1,5 \cdot 10^{-3}$      |
| Eisen  | $(1,0 \dots 1,5) \cdot 10^{-7}$   | $5,6 \cdot 10^{-3}$      |
| Zinn   | $1,09 \cdot 10^{-7}$              | $4,5 \cdot 10^{-3}$      |
| Blei   | $2,08 \cdot 10^{-7}$              | $4,2 \cdot 10^{-3}$      |
| Konstantan   | $5 \cdot 10^{-7}$                 | $5 \cdot 10^{-5}$        |
| Quecksilber  | $9,55 \cdot 10^{-7}$              | $8,6 \cdot 10^{-4}$      |
| Isaohm   | $1,32 \cdot 10^{-6}$              | $1 \cdot 10^{-6}$        |
| Graphit  | $8 \cdot 10^{-6}$                 | $-2 \cdot 10^{-4}$       |
| Kohlenstoff  | $3,5 \cdot 10^{-5}$               | $-2 \cdot 10^{-4}$       |
| <b>Halbleiter: <math>\rho \approx (10^{-4} \dots 10^6) \Omega \text{ m}</math></b> |                                   |                          |
| Wasser (typ. Meer)   | $5 \cdot 10^{-1}$                 |                          |
| Blut   | $1,6 \cdot 10^0$                  |                          |
| Muskelgewebe   | $2,0 \cdot 10^0$                  |                          |
| Wasser (typ. Leitung)  | $2 \cdot 10^1$                    |                          |
| Silizium (rein)  | $3,97 \cdot 10^3$                 |                          |
| Wasser (reinst)  | $1 \cdot 10^6$                    |                          |
| <b>Isolatoren (Nichtleiter): <math>\rho \gtrsim 10^6 \Omega \text{ m}</math></b>   |                                   |                          |
| Holz (trocken)   | $10^4 \dots 10^{10}$              |                          |
| Papier   | $10^9 \dots 10^{11}$              |                          |
| Aluminiumoxid  | $1 \cdot 10^{12}$                 |                          |
| Porzellan  | $1 \cdot 10^{12}$                 |                          |
| Quarzglas  | $7,5 \cdot 10^{17}$               |                          |

### 3 Wärmestrahlung

Ein jeder Körper strahlt elektromagnetische Wellen aus, was eine Folge der Wärmebewegung elektrisch geladener Teilchen ist, aus denen der Körper besteht. Die spektrale Energiedichte dieser Emission wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben (s. Anhang B.1, S. 14). Ein sogenannter *schwarzer Körper*<sup>3)</sup> mit der absoluten Oberflächen-Temperatur  $T_K$  gibt über seine Oberfläche  $A$  Wärme an die Umgebung ab. Nach Josef Stefan (1835–93) und Ludwig Boltzmann (1844–1906) wächst die entsprechende Strahlungsleistung  $P_{\sigma,K}$  (Einheit:  $[P_{\sigma,K}] = \text{W}$ ) mit

<sup>3)</sup>Ein schwarzer Körper ist dadurch definiert, dass er alle aus der Umgebung auf ihn treffende Strahlung absorbiert. Befindet er sich im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung, haben Körper und Umgebung also gleiche Temperatur, dann sind die Strahlungsleistungen der Absorption und Emission gleich groß (s. auch Anhang B.3, S. 16).

der vierten Potenz der Temperatur,

$$P_{\sigma,K} = A \cdot \sigma \cdot T_K^4 \quad (10)$$

Darin bezeichnet  $\sigma$  die *Stefan-Boltzmann-Konstante*, für welche man aus dem Planckschen Strahlungsgesetz den Wert

$$\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (11)$$

berechnet (Gl. 35, S. 15).

Ist die Temperatur  $T_U$  der Umgebung gleichverteilt und setzt man für die Umgebung näherungsweise den Emissionsgrad zu 1 (schwarzer Strahler), dann nimmt der Körper über seine Oberfläche die Strahlungsleistung

$$P_{\sigma,U} = A \cdot \sigma \cdot T_U^4 \quad (12)$$

aus der Umgebung auf. Die Strahlungsbilanz beträgt somit

$$\begin{aligned} P_\sigma &\equiv P_{\sigma,K} - P_{\sigma,U} \\ &= A \cdot \sigma \cdot (T_K^4 - T_U^4) \end{aligned} \quad (13)$$

Für  $T_U < T_K$  würde sich der Körper auch allein über die Wärmestrahlung asymptotisch auf die Temperatur  $T_U$  abkühlen. Hat der Körper innere Wärmequellen mit konstanter Leistung, dann heizt er sich bis auf eine solche Oberflächentemperatur auf, bei welcher  $P_\sigma$  gleich der Heizleistung ist.

Ist die Temperatur der Körperoberfläche nicht gleichmäßig verteilt, so muss (10) durch das Oberflächen-Integral

$$P_{\sigma,K} = \sigma \cdot \int_{\text{OberflächeA}} T_K^4(\mathbf{x}) \, dA(\mathbf{x})$$

ersetzt werden. Ist der Körper wie im Versuch ein Zylinder, über den die Temperatur zwischen den Grundflächen entlang der Manteloberfläche von  $T_k$  bis  $T_w$  linear ansteigt, so berechnet sich seine Strahlungsleistung  $P_{\sigma,K}$  nach Gl. (37) (s. Anhang B.2, S. 15). Für die effektive Strahlungsleistung folgt dann,

$$P_\sigma = A \cdot \sigma \cdot \left( \frac{T_w^5 - T_k^5}{5(T_w - T_k)} - T_U^4 \right) \quad (14)$$

## 4 Versuchsaufbau

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 2. Der zylinderförmige Metallstab ist wärmeisoliert und deshalb hier nicht sichtbar. Auf der rechten Seite befindet sich ein Anschlussstutzen mit Buchsen für die Temperatursensoren und die elektrische Heizung.

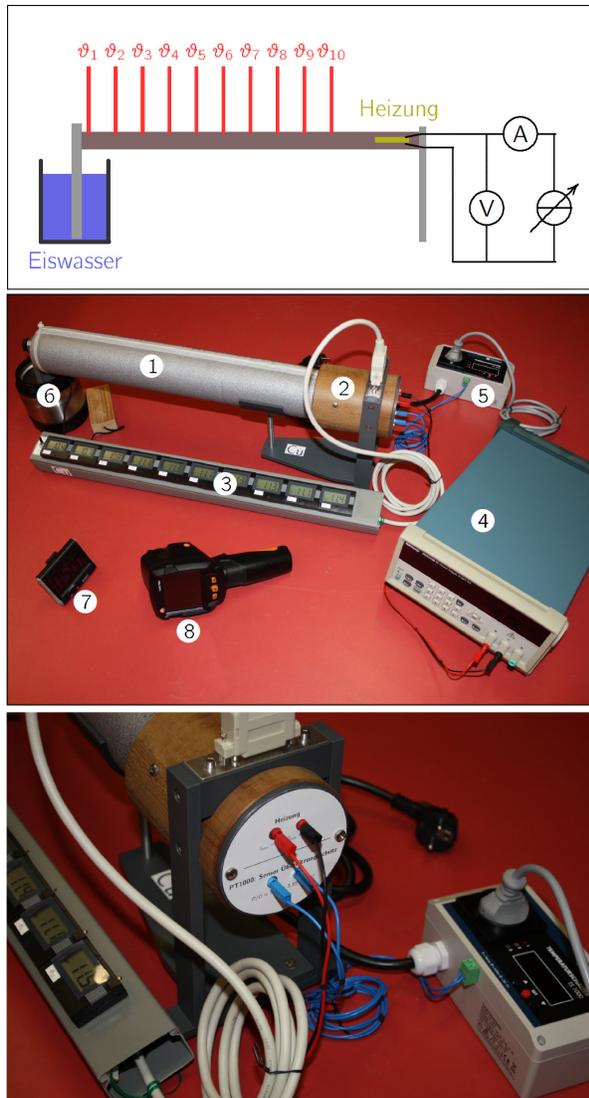


Abb. 2: Schema und Gesamtübersicht vom Versuchsaufbau, mit folgenden Teilen:

(1) Metallstab (umhüllt mit Wärmedämmstoffen), (2) Anschlussstutzen für Sensoren und die Heizung, (3) Zehnfach-Temperatur-Anzeige, (4) Stromversorgung mit integriertem Volt- und Amperemeter für die Heizung, (5) Temperaturschalter für Überhitzungsschutz, (6) Isoliergefäß mit Eiswasser, (7) Stoppuhr (Timer), (8) Wärmebildkamera.

Die Heizpatrone ist in den Metallstab zentrisch eingelassen, wie im obigen Schema angedeutet. Diese Grundseite ist zur Umgebung gut wärmeisoliert, hingegen wird die linke Grundfläche des Metallstabs über Aluminiumstützen mit Eiswasser gekühlt. Die Heizleistung  $P = U \cdot I$  erhält man aus dem Produkt der angelegten Gleichspannung  $U$  und der elektrischen Stromstärke  $I$ , welche am Labornetzteil direkt abgelesen werden können.

Die Temperaturen  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{10}$  werden mit zehn NTC10K-Sensoren<sup>4)</sup> an äquidistanten Punkten entlang des Metallstabs (Abstände 4 cm) abgegriffen und über ein Kabel (D-SUB-25) zur Anzeige gebracht. Zur Justierung der Temperaturanzeige eines jeden Kanals ist in Reihe mit dem Sensor ein Regelwiderstand ( $0 \dots 2,5 \text{ k}\Omega$ ) geschaltet.<sup>5)</sup> Die perlformigen Sensoren haben eine vergleichsweise kleine Wärmekapazität. Sie sind etwa 10 mm in den Metallstab mit Wärmeleitpaste eingelassen (Abb. 3 a)) und mit Heißkleber sowie einer Minaturschelle (Kupferdraht) fixiert, Abb. 3 b, c). Die Wärmeisolierung hat neben der von außen sichtbaren noch eine weitere innere Schicht, Abb. 3 d).

Am rechten Ende des Metallstabs, in Nähe der Heizpatrone, ist ein weiterer Temperatursensor PT1000<sup>6)</sup> angebracht, mittig in Abb. 3 c). Er wird vom externen Temperaturschalter TS 1000 ausgelesen, der das Stromversorgungsgerät der Heizung bei Überschreitung der eingestellten Schwelle ( $60 \text{ }^\circ\text{C}$ ) abschaltet. Dies dient dem Schutz vor Überhitzung der Anlage.<sup>7)</sup>

Die Tabelle 3 enthält Angaben zu den Abmessungen der Metallstäbe sowie zu einigen Stoffparametern, die sich in der einschlägigen Literatur finden.

<sup>4)</sup> NTC10K bedeutet Sensor mit negativem Temperaturkoeffizient, wobei der Widerstand bei  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  etwa  $10 \text{ k}\Omega$  beträgt.

<sup>5)</sup> Die Justierung auf Umgebungstemperatur kann erfolgen, wenn der Metallstab (raum-zeitlich) konstante Temperatur hat, wovon nach mehrstündiger Lagerung bei konstanter Umgebungstemperatur ausgegangen werden kann. Studierende sollten die Justierung nicht eigenmächtig ändern.

<sup>6)</sup> Sensor mit positiven Temperaturkoeffizienten und Widerstandsnennwert  $1 \text{ k}\Omega$  bei  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

<sup>7)</sup> Eine Überhitzung würde den Heißkleber aufweichen und somit die Fixierung der Sensoren beeinträchtigen.

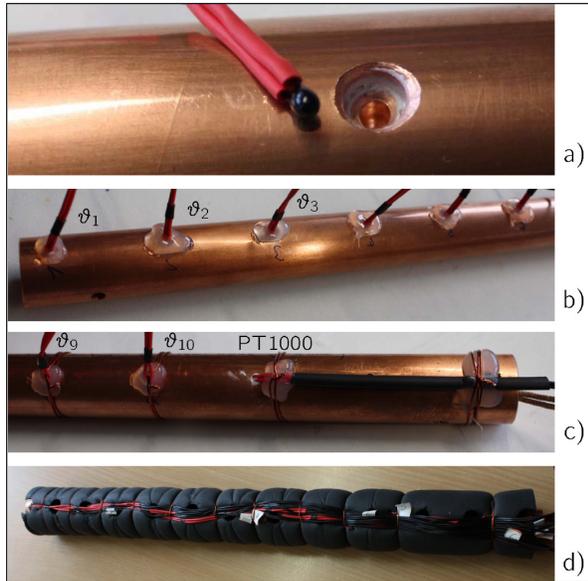


Abb. 3: Frei liegender Metallstab mit Temperatursensoren, a) bis c), und mit innerer Isolierschicht sowie Verkabelung der Sensoren, d). An den Stellen für  $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{10}$  sind die Temperatursensoren NTC10K verbaut. Mittig im Bild c) ist der Sensor PT1000 für den Überhitzungsschutz angebracht.

Tab. 3: Parameter der Metallstäbe.

| Abmessungen (für jeden Stab gleich)                            |   |
|--|---|
| Länge:   | $L = 0,500(1) \text{ m}$  |
| Durchmesser:   | $D = 25,0(1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$                               |
| Querschnittsfläche:  | $A = 4,90(5) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$                             |
| Abstand der Temp.-Sens.  | $\Delta x = 40,0(5) \text{ mm}$                                     |
| Stabmasse $m$  |   |
| Al (ohne Heizpatrone):   | $0,675(2) \text{ kg}$   |
| Cu (ohne Heizpatrone):   | $2,137(2) \text{ kg}$   |
| spezifische Wärmekapazität $c$ bei $25 \text{ }^\circ\text{C}$ |   |
| Al:  | $896(2) \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$         |
| Cu:  | $382(1) \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$         |
| Wärmeleitfähigkeit $\lambda$                                   |   |
| Cu (rein, $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ):                       | $401 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$             |
| Cu (Handelsware, $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ):                | $(240 \dots 380) \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| Al (99%, $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ):                         | $220 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$             |
| Al (99%, $200 \text{ }^\circ\text{C}$ ):                       | $205 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$             |
| Miniatur-Temperatursensoren (10 Stück)                         |   |
| NTC 10K, 1% Toleranz, Typ B57869S der Firma EPCOS              |   |
| Perform, Durchmesser ca. 2 mm                                  |   |

## 5 Auswertung der Messdaten

### 5.1 Regression

Im Experiment stellt sich nach längerer Zeit eine Temperaturverteilung ein, die von der gekühlten Seite des Stabes hin zur Heizung auf der gegenüberliegenden Seite näherungsweise linear anwächst, was durch eine Geradengleichung

$$\vartheta(t, x) = a_t + b_t \cdot x \quad (15)$$

beschrieben werden kann, Abb. 4. Die Regressionsparameter  $a_t$  und  $b_t$  steigen mit fortschreitender Zeit geringfügig an. Dies bedeutet, dass sich auch zum Ende der Messung (nach ca. 60 min) der gesamte Stab noch erwärmt, die elektrische Heizleistung  $P_e$  also nicht vollständig zum Eiswasser hin abgeleitet wird, sondern nur ein Anteil  $P_\lambda < P_e$ . Die Wärmeleitleistung  $P_\lambda$  kann aus einer entsprechenden Energiebilanz berechnet werden, was im nächsten Abschnitt unter Einbeziehung von Strahlungsverlusten genauer ausgeführt wird.

Im Folgenden wird der Bezugspunkt  $x = 0$  an das linke (kalte) Stabsende gesetzt. Dann befindet sich der erste Sensor für die Temperatur

$$\vartheta_1(t) \equiv \vartheta(t, x_1)$$

an der Stelle  $x_1 = 1 \text{ cm}$ . Die anderen Sensoren haben

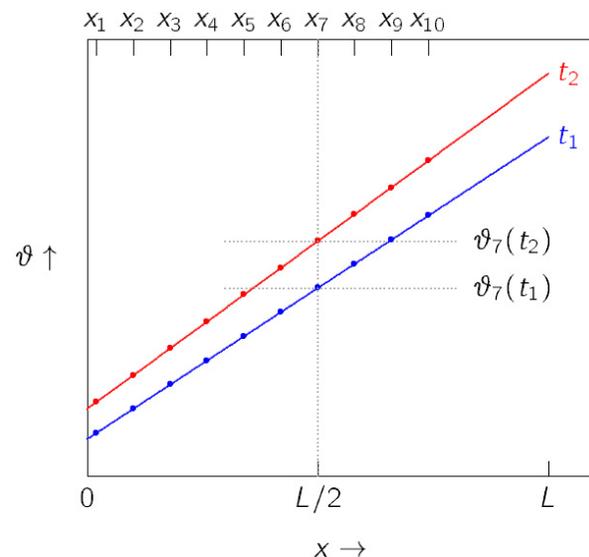


Abb. 4: Temperaturprofil zu Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2 > t_1$  (schematisch).

die Position

$$x_n = x_1 + (n - 1) \cdot 4 \text{ cm} \quad , \quad n = 2, 3, \dots, 10 \quad .$$

Folglich befindet sich der Sensor für  $\vartheta_{10}$  an der Stelle  $x_{10} = 37 \text{ cm}$ , und  $\vartheta_7$  wird in der Mitte, also an der Stelle  $x_7 = L/2 = 25 \text{ cm}$ , gemessen.

Setzt man nun in (3) für den Temperaturgradient

$$\frac{T_w - T_k}{L} = \frac{\partial \vartheta(t, x)}{\partial x} = b_t \quad ,$$

so folgt die Wärmeleitfähigkeit aus

$$\lambda = \frac{P_\lambda}{A \cdot b_t} \quad . \quad (16)$$

Dabei ist zu beachten, dass auch  $P_\lambda$  vom Zeitpunkt  $t$  abhängt. Die Größe der Querschnittsfläche  $A$  kann Tab. 3 (S. 9) entnommen werden. Nach (16) kann man für alle Zeitpunkte  $t$  die Wärmeleitfähigkeit berechnen, sofern man von einem linearen Anstieg (15) ausgehen kann. Dies trifft vor allem für spätere Zeitpunkte zu, also nach der Messdauer 50 ... 60 min.

## 5.2 Wärmeleit-Leistung

**Überblick:** Während der gesamten Dauer des Experiments wird die konstante elektrische Heizleistung

$$P_e = U \cdot I \quad (17)$$

erbracht, die sich aus den Messwerten für die Spannung  $U$  und den Strom  $I$  leicht berechnen lässt. Diese Leistung teilt sich in drei wesentliche Bestandteile auf,

$$P_e = P_\lambda + P_c + P_\sigma \quad .$$

Darin ist  $P_\lambda$  die Leistung, welche durch den Metallstab geleitet wird und folglich in (16) für die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit zu verwenden ist. Die Leistung  $P_c$  ist jene, die vor allem den Metallstab erwärmt und somit die vertikale Verschiebung der Graphen  $\vartheta(x, t)$  mit zunehmender Zeit  $t$  bewirkt. Sie wird durch die Wärmekapazität des Stabes bestimmt. Schließlich ist  $P_\sigma$  jene Leistung, welche über die Manteloberfläche des Metallstabs und den Anschlussstutzen effektiv in die Umgebung abgestrahlt wird.  $P_c$  und  $P_\sigma$  sind Leistungsverluste für die Wärmeleitung, in (16) muss also

$$P_\lambda = P_e - P_c - P_\sigma \quad (18)$$

gesetzt werden.

**Leistungsverluste durch Erwärmung:** Mit den Bezeichnungen von Abb. 4 gilt,

$$P_c = \frac{c \cdot m \cdot [\vartheta(t_2, L/2) - \vartheta(t_1, L/2)]}{t_2 - t_1} \quad .$$

Darin sind  $c$  und  $m$  die spezifische Wärmekapazität bzw. Masse des Metallstabs, s. Tab. 3, S. 9. Mit den Regressionsgeraden (15) erhält man,

$$P_c = \frac{c \cdot m \cdot [a_{t_2} - a_{t_1} + (b_{t_2} - b_{t_1})L/2]}{t_2 - t_1} \quad (19)$$

Als Zeitpunkte wählt man zum Beispiel  $t_1 = 55 \text{ min}$  und  $t_2 = 60 \text{ min}$ . Die Gleichung berücksichtigt, dass die Werte  $b_{t_1}$  und  $b_{t_2}$  des Anstiegs nicht für beide Zeitpunkte gleich groß sind.

**Leistungsverluste durch Strahlung:** Die Apparatur strahlt Wärme vor allem über die seitliche Isolierung des Metallstabs sowie über den Anschlussstutzen ab. Die entsprechenden Verlustleistungen  $P_{\sigma,1}$  bzw.  $P_{\sigma,S}$  sind gesondert zu berechnen.

Nach der Zeit  $t = 60 \text{ min}$  stellt sich auf der Oberfläche des Isolationsmaterials eine nahezu linear anwachsende Temperaturverteilung ein, mit der Temperatur  $T_k$  auf der kalten Seite bei  $x = 0$  und  $T_w$  auf der warmen Seite bei  $x = L_{\text{Iso}} \approx 48 \text{ cm}$ . Für den Radius des Isolationsmaterials gilt  $R_{\text{Iso}} = 4 \text{ cm}$ . Dies ergibt die Oberfläche

$$A_1 = 0,120(2) \text{ m}^2 \quad .$$

Somit strahlt die Apparatur nach (14) über die Seitenfläche des Isolationsmaterials mit der Leistung

$$P_{\sigma,1} = A_1 \cdot \sigma \cdot \left( \frac{T_w^5 - T_k^5}{5(T_w - T_k)} \right) \quad (20)$$

Die Oberfläche des Anschlussstutzens beträgt

$$A_S = 0,046(2) \text{ m}^2 \quad .$$

Sie ist zum Ende der Messdauer nahezu gleichmäßig auf eine Temperatur  $T_S$  erwärmt, was nach (10) die Strahlungsleistung

$$P_{\sigma,S} = A_S \cdot \sigma \cdot T_S^4 \quad (21)$$

ergibt.

Die beiden betrachteten Flächen empfangen nach (12) aus der Umgebung die Strahlungsleistung

$$P_{\sigma,U} = (A_I + A_S) \cdot \sigma \cdot T_U^4 \quad (22)$$

Damit betragen die effektiven Strahlungsverluste,

$$P_{\sigma} = P_{\sigma,I} + P_{\sigma,S} - P_{\sigma,U} \quad (23)$$

### 5.3 Wärmeleitfähigkeit

Nach (19) wird  $P_c$  als Mittelwert zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  berechnet. Folglich ist es angebracht, auch für den Anstieg  $b_t$  in (16) den Mittelwert  $(b_{t_1} + b_{t_2})/2$  zu verwenden. Dies führt letztlich auf die Gleichung,

$$\lambda = \frac{P_e - P_c - P_{\sigma}}{A \cdot (b_{t_1} + b_{t_2})/2} \quad (24)$$

Führt man diese Rechnung für verschiedene Zeitpunkt-Paare  $(t_1, t_2)$  aus, so erhält man mehrere Wert für  $\lambda(t_1, t_2)$ . Hierbei wählt man benachbarte Messzeitpunkte  $t_2 = t_1 - 5 \text{ min}$ . Trägt man nun  $\lambda$  als Funktion von  $t_2$  auf, so kann man erkennen, ab welchem Zeitpunkt  $t_2$  die Werte  $\lambda(t_2)$  keinen Trend mehr aufweisen. Über diese trendfreien Werte bildet man das arithmetrische Mittel und ermittelt nach dem Standardverfahren ein Konfidenzintervall.

In (24) ist zu beachten, dass auch die Größen  $P_c$ ,  $P_{\sigma,I}$  und  $P_{\sigma,S}$  von den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  abhängen, die sich wie folgt berechnen lassen:

Sei  $T_S^*$  die Temperatur der Oberfläche des Anschlussstutzens bei Versuchsende, also nach der Zeit  $t^* = 60 \text{ min}$ . Dann kann man die Temperatur zu früheren Zeitpunkten  $(t_1 + t_2)/2$  näherungsweise wie folgt berechnen,

$$T_S(t_1, t_2) = T_U + \beta \cdot (T_S^* - T_U) \quad , \quad \text{mit} \\ \beta = \frac{t_1 + t_2}{2t^*} \quad .$$

Hierbei geht man davon aus, dass die Oberflächentemperatur näherungsweise linear zeitlich ansteigt. Mit dieser Temperatur kann man nun die Leistung der entsprechenden Wärmestrahlung zu den verschiedenen Zeitpunkten  $(t_1 + t_2)/2$  berechnen,

$$P_{\sigma,S}(t_1, t_2) = A_S \cdot \sigma \cdot T_S^4(t_1, t_2) \quad .$$

Analog verfährt bei der Berechnung der Strahlungsleistung  $P_{\sigma,I}(t_1, t_2)$  zum Zeitpunkt  $(t_1 + t_2)/2$ , indem man in (20) für  $T_w$  den Wert

$$T_w(t_1, t_2) = T_k + \beta \cdot (T_w^* - T_k)$$

verwendet. Hierin ist  $T_w^*$  die Temperatur auf der Oberfläche an der warmen Seite der Isolierung bei Versuchsende. Darüber hinaus kann  $T_k \approx T_U$  gesetzt werden.

### 5.4 Elektrische Leitfähigkeit

Nach Gl. (5), S. 6, berechnet man die die Größen spezifische elektrische Leitfähigkeit und Widerstand  $\sigma$  bzw.  $\rho = \sigma^{-1}$  aus der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Wegen der linearen bzw. invers linearen Zusammenhänge haben alle Größen die gleiche relative Messabweichung,

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad .$$

## A Wärmeleitung

### A.1 Wärmeleitungsgleichung

Bei einer räumlich beliebigen Temperaturverteilung  $T(\mathbf{x})$  ist der Wärmestrom  $\mathbf{I} = \Delta Q / \Delta t$  an einer beliebigen Stelle des Raumes  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  immer in Richtung der maximalen Temperaturänderung gerichtet, also in Richtung von

$$\text{grad } T \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) .$$

Damit gilt allgemein

$$\mathbf{I} = -\lambda \cdot A \cdot \text{grad } T .$$

Hierbei zeigt der Vektor  $\text{grad } T$  in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}_A$  auf  $A$ , und der Richtungssinn von  $\mathbf{I}$  wird vom Ort mit der höheren zu dem mit der kleineren Temperatur definiert.

Um die zeitliche Veränderung der Temperaturverteilung  $T(\mathbf{x}, t)$  zu berechnen, denken wir uns ein dreidimensionales Volumenelement  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  an der Stelle  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Wir betrachten zunächst den Wärmestrom in  $x$ -Richtung durch die Seitenfläche  $\Delta A = \Delta y \cdot \Delta z$ , Abb.5.

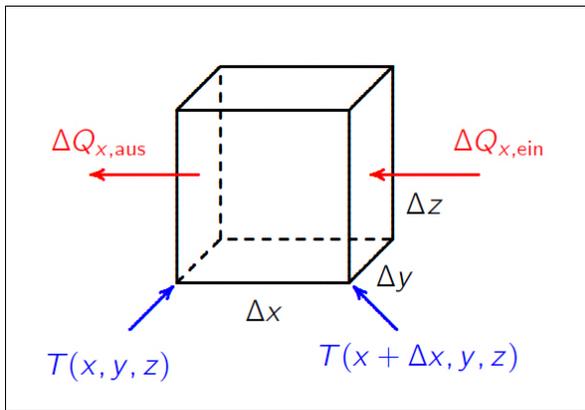


Abb. 5: Wärmestrom in Richtung der  $x$ -Achse durch ein Volumenelement  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \Delta x \cdot \Delta A$ , bei einem Temperaturunterschied  $\Delta T_x = T(x + \Delta x, y, z) - T(x, y, z)$  in dieser Richtung.

In der bereits bekannten Gleichung

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda \cdot \frac{A \cdot \Delta T}{\Delta L}$$

ersetzen wir nun  $\Delta T / \Delta L$  durch  $\partial T(\mathbf{x}) / \partial x$  und  $A$  durch  $\Delta A$ . Folglich strömen nun durch  $\Delta A$  in der Zeit

$\Delta t$  die Wärmemengen

$$\begin{aligned} \Delta Q_{x,\text{ein}} &= \lambda \cdot \Delta A \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial T(x + \Delta x)}{\partial x} \\ \Delta Q_{x,\text{aus}} &= \lambda \cdot \Delta A \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

ein bzw. aus. Die Sprechweise ein- bzw. ausströmend ist hier nur der Anschaulichkeit wegen verwendet. Sie trifft zu, wenn die Temperatur mit wachsendem  $x$  steigt, also für

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial T(x + \Delta x)}{\partial x} > 0 .$$

Unter Verwendung von

$$T(x + \Delta x) = T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \cdot \Delta x$$

folgt weiter,

$$\begin{aligned} \Delta Q_{x,\text{ein}} &= \lambda \cdot \Delta A \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial [T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \cdot \Delta x]}{\partial x} \\ &= \lambda \cdot \Delta A \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial x} \\ &\quad + \lambda \cdot \Delta V \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial^2 T(x)}{\partial^2 x} \end{aligned}$$

und somit unter Beachtung von (25) die Wärmebilanz,

$$\Delta Q_{x,\text{ein}} - \Delta Q_{x,\text{aus}} = \lambda \cdot \Delta V \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial^2 T(x)}{\partial^2 x} .$$

Eine analoge Betrachtung für die beiden anderen Raumrichtungen liefert die gesamte Wärmebilanz im Volumenelement  $\Delta V$

$$\Delta Q_{\text{ein}} - \Delta Q_{\text{aus}} = \lambda \cdot \Delta V \cdot \Delta t \cdot \Delta T(\mathbf{x}, t)$$

mit der *Divergenz* des Temperaturgradientenfeldes (sog. Laplace-Operator),

$$\begin{aligned} \Delta T &\equiv \text{div grad } T \\ &= \frac{\partial^2 T(\mathbf{x})}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{x})}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{x})}{\partial^2 z} . \end{aligned}$$

Sind die in der Zeit  $\Delta t$  ein- und ausströmenden Wärmemengen ungleich, so führt dies zu einer Temperaturänderung, die sich wie folgt berechnet. Das Volumenelement  $\Delta V$  hat die Masse  $\rho \cdot \Delta V$ , mit der Massendichte  $\rho$ . Beträgt die spezifische Wärme  $c$ , so sorgt die Wärmeänderung  $\Delta Q_{\text{ein}} - \Delta Q_{\text{aus}}$  für die Temperaturänderung

$$\Delta T = (\Delta Q_{\text{ein}} - \Delta Q_{\text{aus}}) / (\rho \cdot \Delta V \cdot c)$$

Folglich gilt auch

$$\Delta Q_{\text{ein}} - \Delta Q_{\text{aus}} = \Delta T \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot c$$

Zusammengefasst muss schließlich folgendes gelten:

$$\Delta T \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot c = \lambda \cdot \Delta V \cdot \Delta t \cdot \Delta T(\mathbf{x}, t)$$

Umgeschrieben für infinitesimal kleine Zeitspannen ( $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta T/\Delta t \rightarrow \partial T/\partial t$ )

folgt schließlich die *Wärmeleitungsgleichung*,

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \Delta T(\mathbf{x}, t) \quad (26)$$

Sofern der Wärmetransport allein durch Wärmeleitung erfolgt und im betrachteten Medium keine Wärmequellen vorhanden sind, muss das raum-zeitliche Temperaturfeld  $T(\mathbf{x}, t)$  dieser Gleichung genügen. Sind jedoch Wärmequellen  $q(\mathbf{x}, t)$  vorhanden, so geht (26) in (1) über.

## A.2 Wärmeleitung durch Mehrschichtsysteme

Die Analogie von Wärme- und Stromleitung ist besonders hilfreich bei der Betrachtung der Wärmeleitung durch mehrschichtige Systeme, wie sie gerade auch in der Bauphysik auftreten. Bestehe beispielsweise die Außenwand eines Gebäudes aus Gasbeton und einem äußeren Wärmedämmputz der Dicken  $L_1$  bzw.  $L_2$  mit den spezifischen Wärmeleitwerten  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ , Abb. 6. Für  $T_a < T_i$  fällt die Temperatur im stationären Zustand von innen nach außen stückweise linear ab, zunächst von  $T_i$  auf der Innenseite bis zu  $T_m$  an der Grenzfläche zwischen den beiden Schichten im Wandinneren und schließlich von dort

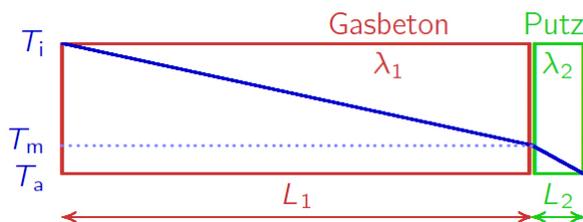


Abb. 6: Stationärer Temperaturverlauf innerhalb einer zweischichtigen Außenwand, die aus Materialien unterschiedlicher Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  und Schichtdicke  $L_1$  bzw.  $L_2$  aufgebaut ist, für die Innen- und Außentemperatur  $T_i$  bzw.  $T_a$ .

bis zur Temperatur  $T_a$  auf der Außenseite. Für die entsprechenden  $U$ -Werte gilt,

$$U_1 = \frac{\lambda_1}{L_1} = \frac{P}{A \cdot (T_i - T_m)} \quad (27)$$

$$U_2 = \frac{\lambda_2}{L_2} = \frac{P}{A \cdot (T_m - T_a)}$$

Folglich gilt

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_2 \lambda_1}{L_1 \lambda_2} = \frac{T_m - T_a}{T_i - T_m}$$

Dies kann nach der Temperatur

$$T_m = T_a + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot (T_i - T_a) \quad (28)$$

$$= T_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (T_i - T_a)$$

an der Berührungsstelle der Schichten umgeformt werden, unter Verwendung der Wärmewiderstände

$$R_n \equiv \frac{L_n}{\lambda_n \cdot A}, \quad \text{mit } n = 1; 2. \quad (29)$$

Gleichung (28) entspricht der Spannungsteilerregel in der Elektrik. Der gesamte Wärmewiderstand der Wandfläche  $A$  beträgt  $R_1 + R_2$ , was dem Gesamtwiderstand der Reihenschaltung zweier elektrischer Widerstände entspricht. Schließlich erhält man aus (27) unter Beachtung von (28) die Heizleistung

$$P = \frac{T_i - T_a}{R_1 + R_2} = \alpha \cdot \frac{T_i - T_a}{R_1}, \quad (30)$$

mit

$$\alpha \equiv \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Der Faktor  $\alpha \leq 1$  gibt den Bruchteil an, auf den sich die Heizleistung durch Aufbringung des Außenputzes auf das Mauerwerk reduziert. Für den gesamten  $U$ -Wert des Zweischichtsystems gilt,

$$U = \frac{P}{A(T_i - T_a)}$$

Unter Beachtung von (30) und (29) erhält man

$$U = \left( \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} \right)^{-1} \quad (31)$$

Für die Temperaturen  $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_a = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ , die Schichtdicken  $L_1 = 0,36 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0,04 \text{ m}$  und die

spezifischen Wärmeleitwerte von Gasbeton und Wärmedämmputz aus Tab. 1, S. 5 erhält man,

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{L_1 \lambda_2}{L_2 \lambda_1}\right)^{-1} \approx 0,22$$

und somit  $T_m \approx 12,2 \text{ }^\circ\text{C}$ . Den stückweise linearen stationären Temperaturverlauf innerhalb der Mauer illustriert Abb. 6.

## B Wärmestrahlung

### B.1 Plancksches Strahlungsgesetz

Ein jeder Stoff strahlt elektromagnetische Wellen aus, was eine Folge der Wärmebewegung der elektrisch geladenen Teilchen ist. Das von Planck (1858–1957)<sup>8)</sup> gefundene Strahlungsgesetz

$$M_\lambda^0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1} \quad (32)$$

beschreibt die spektrale Dichte  $M_\lambda^0(\lambda, T)$  der Strahlungsintensität bei der (absoluten) Temperatur  $T$ . Ihre Einheit ist  $[M_\lambda^0] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot (\mu\text{m})^{-1}$ . Der obere Index 0 verweist darauf, dass sich die Gleichung auf einen sogenannten *schwarzen Körper* bezieht (s.u., Abschn. B.3, S. 16). Die Gleichung enthält die drei Naturkonstanten

**Vakuumllichtgeschwindigkeit:**

$$c \equiv 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Plancksches Wirkungsquantum:**

$$h \equiv 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

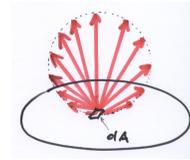
**Boltzmannkonstante:**

$$k \equiv 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

<sup>8)</sup>Planck veröffentlichte seine Form des Strahlungsgesetzes im Jahre 1900. Damit das Strahlungsgesetz die entsprechenden Messergebnisse für alle Wellenlängen richtig wiedergab, musste Planck bei seiner Ableitung annehmen, dass die Energie der oszillierenden Teilchen, welche die elektromagnetische Strahlung aussenden, nur diskrete Werte annehmen kann. Nach den damaligen Anschauungen war dies unverständlich, selbst Planck hielt dies zunächst nur für einen Rechenrick. Die fundamentale physikalische Bedeutung dieser Energiequantisierung wurde jedoch in den Jahrzehnten von vielen Physikern immer besser erkannt, so dass im Jahr 1918 der Nobelpreis in Physik Planck zuerkannt wurde. Er gilt heute als Begründer der Quantenmechanik, welche insbesondere für die moderne Festkörperphysik und Chemie sowie darauf aufbauende Technologien von fundamentaler Bedeutung ist.

Der Term

$$dA \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda$$



ist die Strahlungsenergie, die pro Zeiteinheit vom Flächenelement  $dA$  der Oberfläche eines schwarzen Körpers im Wellenlängenbereich  $\lambda_1 \dots \lambda_2$  in den Halbraum (Raumwinkel  $2\pi \text{ sr}$ ) gestrahlt wird. Abbildung 7 zeigt diese Strahlungsdichte (32) für verschiedene Temperaturen.

Erfolgt die Strahlung in ein voll transmittierendes Medium (nicht reflektierend oder absorbierend) mit der Brechzahl  $n > 1$ , so ist die Vakuumllichtgeschwindigkeit  $c$  durch die Geschwindigkeit im Medium,  $c/n$ , zu ersetzen. Die Wellenlänge ist dann  $\lambda/n$ , aber die

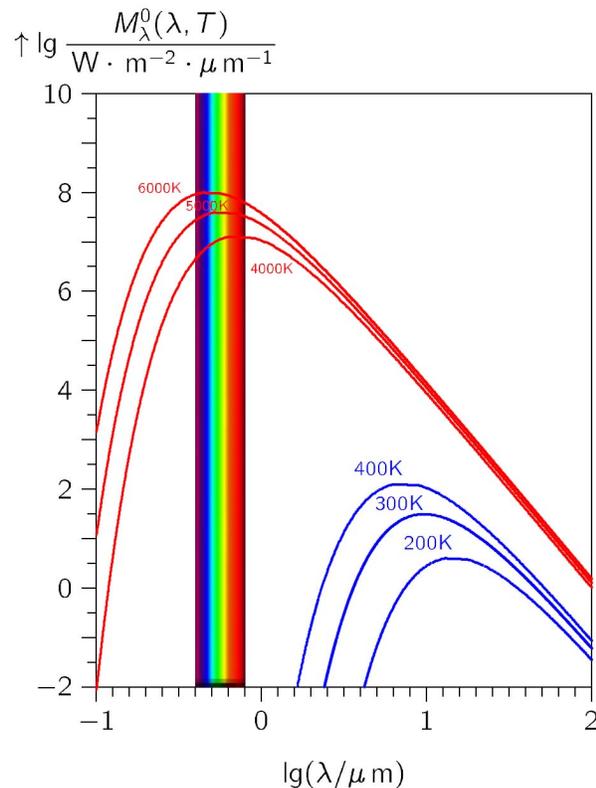


Abb. 7: Plancksche Strahlungsdichte (32) für niedrige Temperaturen, wie sie auf der Erdoberfläche auftreten sowie für hohe Temperaturen, wie sie auf der Sonnenoberfläche herrschen. Für irdische Temperaturen liegt das Intensitätsmaximum bei Wellenlängen um  $10 \mu\text{m}$  (Wärmestrahlung), und auf der Sonnenoberfläche mit der mittleren Temperatur von ca.  $5800 \text{ K}$  etwa bei  $0,50 \mu\text{m}$  (grünes Licht).

Frequenz ist unverändert  $f = (c/n)/(\lambda/n) = c/\lambda$ .

Der obere Index 0 in  $M_\lambda^0(\lambda, T)$  deutet an, dass sich die Formel auf einen schwarzen Körper (s.u.) bezieht. Der untere Index  $\lambda$  verweist darauf, dass diese Strahlungsdichte bezüglich der Wellenlänge angegeben ist.

Gibt man sie bezüglich der Frequenz an, so folgt aus  $\lambda = c/f$  das Differential  $d\lambda = -(c/f^2)df$  und damit die Frequenzdichte<sup>9)</sup>

$$M_f^0(f, T) = \frac{2\pi hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad (33)$$

mit der Einheit  $[M_f^0] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

Die gesamte Strahlungsleistung, welche pro Flächeneinheit von der Oberfläche eines Körpers in den Halbraum abgegeben wird, erhält man durch Integration der Strahlungsdichte (33) über alle Frequenzen. Unter Verwendung der Abkürzung  $x \equiv hf/(kT)$  und bei Beachtung von  $df = (kT/h)dx$  gilt,

$$\begin{aligned} M^0(T) &\equiv \int_0^\infty M_f^0(f, T) df \\ &= \frac{2\pi k^3 T^3}{h^2 c^2} \cdot \frac{kT}{h} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral liefert den Wert  $\pi^4/15$ .<sup>10)</sup> Dies ist das Stefan–Boltzmannsche–Strahlungsgesetz, wonach die Strahlungsleistung der vierten Potenz der Temperatur proportional ist,

$$M^0(T) = \sigma \cdot T^4, \quad (34)$$

mit der Stefan–Boltzmann–Konstante

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \frac{2\pi^5 k^4 T^4}{15h^3 c^2} \\ &= 5,670\,374\,419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}. \end{aligned} \quad (35)$$

<sup>9)</sup>Beachte, dass sich die Relation  $\lambda_1 < \lambda_2$  der Wellenlängen bei den entsprechenden Frequenzen vertauscht,  $f_1 > f_2$ . Zur Integration wählt man üblicherweise die untere Integrationsgrenze kleiner als die obere, so dass

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda = - \int_{f_1}^{f_2} M_f^0(f, T) df = \int_{f_2}^{f_1} M_f^0(f, T) df$$

gilt. Dies erklärt die Weglassung des Vorzeichens im Differential  $d\lambda = -(c/f^2) \cdot df$ .

<sup>10)</sup>Allgemein gilt für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(n) \cdot \Gamma(n),$$

mit der Gamma–Funktion  $\Gamma$  und der Riemannschen Zeta–Funktion  $\zeta$ . Insbesondere gelten  $\Gamma(4) = 3!$  und  $\zeta(4) = \pi^4/90$ .

Gleichung (32) beschreibt die spektrale Verteilungsdichte der Wärmestrahlung, die von einem Flächenelement  $dA$  eines schwarzen Körpers in den Halbraum (Raumwinkel  $2\pi$  sr) ausgesendet wird. Anstelle des gesamten Halbraums kann diese Strahlung auch bezüglich der Richtung angegeben werden, die durch den Azimutwinkel  $\varphi = 0 \dots 2\pi$  und den Polarwinkel  $\beta = 0 \dots \pi/2$  beschrieben wird. Dabei bezeichnet  $\beta$  den Winkel zwischen dem Normalenvektor auf dem Flächenelement  $dA$  und dem Sichtstrahl. Die Strahlungsdichte in Richtung des Sichtstrahl lautet dann,

$$\begin{aligned} L_{\lambda, \Omega}^0(\beta, \varphi, \lambda, T) \cos \beta \cdot dA \cdot d\lambda \cdot d\Omega \\ = \pi^{-1} \cdot M_\lambda^0(\lambda, T) \cos \beta \cdot dA \cdot d\lambda \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (36)$$

Der Term  $\cos \beta$  berücksichtigt, dass das Flächenelement  $dA$  auf der Sichtlinie unter dem Polarwinkel  $\beta$  um den Faktor  $\cos \beta$  kleiner erscheint. Bei Verwendung des Raumwinkelementes  $d\Omega = \sin \beta \cdot d\varphi \cdot d\beta$  folgt aus der Integration über den Halbraum die Gleichung (32),

$$\begin{aligned} \int_{\text{Halbraum}} L_{\lambda, \Omega}^0(\beta, \varphi, \lambda, T) \cos \beta \cdot d\Omega \\ = M_\lambda^0(\lambda, T) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \cos \beta \, d\beta \, d\varphi \\ = M_\lambda^0(\lambda, T) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \cdot \left[ \frac{\sin^2 \beta}{2} \right]_{\beta=0}^{\pi/2} \\ = M_\lambda^0(\lambda, T). \end{aligned}$$

## B.2 Strahlungskühlung bei inhomogener Oberflächentemperatur

Ein Zylinder der Länge  $L$  mit dem Radius  $R$  hat die Manteloberfläche

$$A = 2\pi RL.$$

Zwischen den Grundflächen an den Orten  $x = 0$  bzw.  $x = L$  steige die Temperatur entlang der Manteloberfläche vom Wert  $T_k$  bis  $T_w$  linear an,

$$T(x) = T_k + \frac{x}{L} \cdot (T_w - T_k)$$

Dies ist dann die Temperatur des Flächenelements  $dA(x) = 2\pi R \cdot dx$ , das nach dem Stefan–Boltzmann–Gesetz die Strahlungsleistung

$$dP_{\sigma, K} = \sigma \cdot dA(x) \cdot T(x)^4$$

liefert. Die Integration über die gesamte Manteloberfläche liefert dann die Strahlungsleistung,

$$\begin{aligned}
 P_{\sigma,K} &= \int dP_{\sigma,K} \\
 &= 2\pi R\sigma \int_0^L \left(T_k + \frac{x}{L} \cdot (T_w - T_k)\right)^4 dx \\
 &= \frac{2\pi RL\sigma}{5(T_w - T_k)} \left[\left(T_k + \frac{x}{L} \cdot (T_w - T_k)\right)^5\right]_0^L \\
 &= A \cdot \sigma \cdot \frac{T_w^5 - T_k^5}{5(T_w - T_k)} . \quad (37)
 \end{aligned}$$

### B.3 Schwarzer Körper

Fällt auf einen Körper elektromagnetische Strahlung der Intensität  $\phi$ , so wird diese im Allgemeinen in drei Anteile aufgeteilt, den reflektierten und transmittierten Anteil  $\rho\phi$  bzw.  $\tau\phi$  sowie den absorbierten Anteil  $\alpha\phi$ , (Abb. 8). Allgemein gelten,

$$0 \leq \alpha, \rho, \tau \leq 1, \quad \alpha + \rho + \tau = 1 .$$

Ein Körper wird *schwarz* genannt (auch *schwarzer Strahler* oder *planckscher Strahler*), wenn die gesamte einfallende Strahlung absorbiert wird, wenn also  $\rho = 1$  gilt, für alle Wellenlängen und Intensitäten. Folglich gilt dann auch  $\tau = 0 = \alpha$ , das heißt, ein *schwarzer Körper* transmittiert und reflektiert keine einfallende Strahlung. Gleichzeitig geht von ihm jedoch Wärmestrahlung aus, was durch das Plancksche Strahlungsgesetz entsprechend der Körper-Temperatur beschrieben wird.

Ist die Temperatur eines schwarzen Körpers groß genug ( $\gtrsim 450 \text{ }^\circ\text{C}$ ), so ist die von ihm ausgesandte Wärmestrahlung für das menschliche Auge teilweise sichtbar, nämlich dann, wenn im sichtbaren Wellenlängenbereich von etwa (380 ... 780) nm die Strahlungsintensität groß genug ist, so dass hinreichend viele Sinneszellen auf der Retina des Auges erregt werden. Umgangssprachlich würde man den Körper dann nicht als schwarz bezeichnen. Ein schwarzer Körper stellt eine Idealisierung dar, reale Stoffe wie Ruß kommen mit  $\alpha \approx 0,96$  dem Ideal  $\alpha \approx 1$  sehr nahe. Auch ein Hohlraum mit einer nicht transparenten Wand und einem kleinen Ein- bzw. Austrittsloch für die Strahlung kommt dem Ideal sehr nahe, weshalb man auch von einer Hohlraumstrahlung spricht.

### B.4 Emissionsgrad

Die Gleichungen (32) und (36) beschreiben die Wärmestrahlung von einem schwarzen Körper. Bei realen Körpern ist die Wärmestrahlung  $M_\lambda(\lambda, T)$  immer mehr oder weniger kleiner als die Strahlung  $M_\lambda^0(\lambda, T)$  eines Schwarzkörpers. Das Verhältnis

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T) \equiv \frac{M_\lambda(\lambda, T)}{M_\lambda^0(\lambda, T)}$$

nennt man *hemisphärischer spektraler Emissionsgrad*. Den *hemisphärischen Gesamt-Emissionsgrad* erhält man aus den entsprechenden spektral integrierten Emissionen,

$$\epsilon(T) \equiv \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{M(T)}{\sigma \cdot T^4} .$$

Den Gesamt-Emissionsgrad in Richtung der Flächennormale erhält man nach,

$$\epsilon_N(T) \equiv \frac{\int L_{\lambda,\Omega}(\beta = 0, \varphi, \lambda, T) d\lambda}{\int L_{\lambda,\Omega}^0(\beta = 0, \varphi, \lambda, T) d\lambda} .$$

Für reale Körper (Stoffe) liegt ein jeder der oben definierten Emissionsgrade zwischen 0 und 1.

Bei einem sog. *Lambert-Strahler* ist der gerichtete spektrale Emissionsgrad in alle Richtungen gleich groß. Seine Strahlung ist völlig diffus. Bei einem sog. *Grauen Körper* ist der gerichtete spektrale Emissionsgrad unabhängig von der Wellenlänge. Reale Körper werden häufig näherungsweise als Grauer Körper und

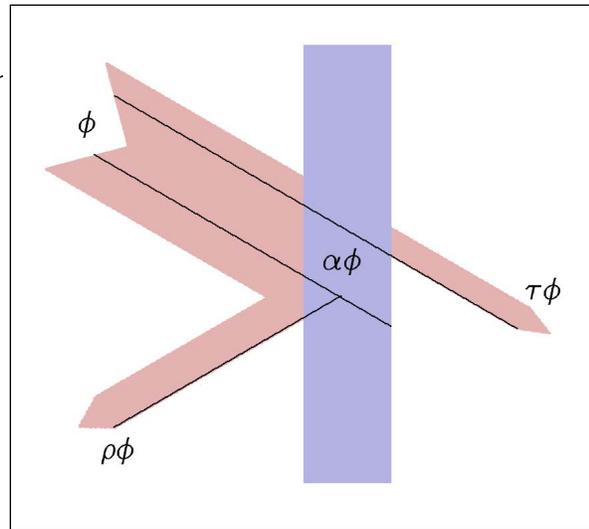


Abb. 8: Allgemeines Schema zur Aufteilung der auf einen Körper einfallenden Strahlung  $\phi$ .

Tab. 4: Hemisphärischer Gesamt-Emissionsgrad  $\epsilon$  und Gesamt-Emissionsgrad in Richtung der Flächennormale  $\epsilon_N$  verschiedener Stoffe.

|  | $\epsilon_N$    | $\epsilon$    |
|--|-----------------|---------------|
| <b>Eis (glatt, <math>-9,6\text{ °C}</math>, Dicke <math>&gt; 4\text{ mm}</math>)</b>                     |                 |               |
|  | 0,965           | 0,918         |
| <b>Raureif (<math>0\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,985           |               |
| <b>Wasser ((<math>10 \dots 50</math>) <math>\text{°C}</math>, Dicke <math>&gt; 0,1\text{ mm}</math>)</b> |                 |               |
|  | 0,965           | 0,91          |
| <b>Eisen (poliert, (<math>-73 \dots 727</math>) <math>\text{°C}</math>)</b>                              |                 |               |
|  | 0,04 ... 0,19   | 0,06 ... 0,25 |
| <b>Eisen (oxydiert, (<math>-73 \dots 727</math>) <math>\text{°C}</math>)</b>                             |                 |               |
|  | 0,32 ... 0,60   |               |
| <b>Eisen (Guß <math>100\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,80            |               |
| <b>Eisen (stark rostig, <math>20\text{ °C}</math>)</b>   |                 |               |
|  | 0,85            |               |
| <b>Kupfer (poliert, (<math>327 \dots 727</math>) <math>\text{°C}</math>)</b>                             |                 |               |
|  | 0,012 ... 0,019 |               |
| <b>Kupfer (oxidiert <math>130\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,76            | 0,725         |
| <b>Aluminium</b>   |                 |               |
|  |                 | 0,04          |
| <b>Buchenholz (<math>70\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,94            | 0,91          |
| <b>Kohle (<math>150\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,81            |               |
| <b>Papier (matt, weiß, <math>95\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,92            | 0,89          |
| <b>Sand (<math>20\text{ °C}</math>)</b>  |                 |               |
|  | 0,76            |               |

diffuser Strahler angesehen, was Strahlungsberechnungen vereinfacht.

Eine Wärmebildkamera misst die elektromagnetische Strahlung in einem gewissen Wellenlängenbereich, welche von der Oberfläche der erfassten Gegenstände ausgeht. Beispielsweise erfassen Kameras für Temperaturen im Messbereich ( $0 \dots 100$ )  $\text{°C}$  die Strahlung bei Wellenlängen um  $10\mu\text{m}$ . Die optischen Linsen bestehen aus Germanium. Damit sie die Temperatur richtig anzeigt, muss der Emissionsgrad des betrachteten Objektes vorab bekannt sein und entsprechend eingestellt werden. In Tab. 4 sind einige Emissionsgrade angegeben.

## C Parameter und Messergebnisse

---

Datum

Uhrzeit bei Beginn der Messungen

Material (Al oder Cu)

---

### Allgemeine Parameter

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| Länge Metallstab               | $L = (5,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-1} \text{m}$  |
| Durchmesser Metallstab         | $D = (2,50 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{m}$  |
| Querschnittsfläche Metallstab  | $A = (4,90 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{m}^2$  |
| Oberfläche seitliche Isolation | $A_I = (1,20 \pm 0,02) \cdot 10^{-1} \text{m}^2$  |
| Oberfläche Anschlussstutzen    | $A_S = (4,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \text{m}^2$  |
| Stefan–Boltzmann–Konstante     | $\sigma = (5,67 \pm 0,01) \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ |

### Stoffspezifische Parameter

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| Masse Al–Stab                      | $m = (6,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-1} \text{kg}$                                      |
| spezifische Wärmekapazität Al–Stab | $c = (8,96 \pm 0,10) \cdot 10^2 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| Masse Cu–Stab                      | $m = (21,37 \pm 0,05) \cdot 10^{-1} \text{kg}$                                     |
| spezifische Wärmekapazität Cu–Stab | $c = (3,82 \pm 0,05) \cdot 10^2 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |

---

### Messwerte

|   |           |
|---|-----------|
| Heizspannung  | $U =$     |
| Heizstrom   | $I =$     |
| Umgebungstemperatur   | $T_U =$   |
| Temperatur der Isolierung an kalter Seite nach $t = 60 \text{ min}$ | $T_k^* =$ |
| Temperatur der Isolierung an warmer Seite nach $t = 60 \text{ min}$ | $T_w^* =$ |
| Temperatur des Anschlussstutzens nach $t = 60 \text{ min}$          | $T_S^* =$ |

---



