

Versuch O07: Prismen–Spektroskop	
Physik, Studentenfassung(10000) vom 26. Oktober 2020	
Gruppe/Versuchs–Nr.: /	Datum:
Name 1: Note Testat:	Name 2: Note Testat:
Note Protokoll:	Betreuer:

- **Versuchsziel**

Bestimmung der Emissionsspektren von Edelgasen mit einem Prismen–Spektroskop nach Kirchhoff und Bunsen. Vorherige Kalibrierung des Gerätes mittels eines vorgegebenen Spektrums.

- **Themen zur Vorbereitung**

Bohrsches Atommodell, Spektralserien, Rydberg–Konstante, Emissions– und Absorptionsspektrum, Dispersion, Lichtbrechung am Prisma

- **Messaufgaben**

1. Kalibrieren Sie das Prismen–Spektroskop unter Verwendung des bekannten Heliumspektrums (Tab. 2, S.9). Identifizieren Sie dazu die 7 aufgelisteten Spektrallinien mit ihren bekannten Vakuum–Wellenlängen λ_k , $k = 1, 2, \dots, 7$, und ordnen Sie diesen die gemessenen Ablenkwinkel γ_k zu. Schätzen Sie den Größtfehler $\Delta\gamma$ für die Messungen der Ablenkwinkel ab.

Hinweis: Überprüfen Sie die Justierung des Spektroskopes, insbesondere den Nullpunkt des Goniometers und den Einfallswinkel $\alpha = 60^\circ$.

2. Messen Sie die Ablenkwinkel γ für jeweils 5 markante Linien des Neon– und Krypton–Spektrums.

- **Sicherheitshinweise**

Nehmen Sie die Anlage erst nach Einweisung durch den Betreuer in Betrieb. Als Lichtquelle dienen Geißlersche Röhren, die mit **Hochspannung im Bereich (1 .. 20) kV** betrieben werden. Berührungen mit spannungsführenden Teilen sind unbedingt zu vermeiden. Insbesondere ist vor dem Anlegen der Hochspannung der Trafo, welcher die Tesla–Spule ansteuert, vom Netz zu trennen! Die Glas–Röhren werden bei Betrieb sehr warm, es besteht **Bruch– und Verbrennungsgefahr**.

- **Auswertung**

Messaufgabe 1: Berechnen Sie aus den gemessenen Kalibrierdaten (λ_k, γ_k) die Konstanten a und b der Dispersionsgleichung (7) mittels linearer Regression. Beachten Sie die Hinweise auf S. 4. Geben Sie die Messabweichungen Δa und Δb an. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen:

Dispersionskurve:

$$n_g(\lambda), \text{ für } \lambda = (350 \dots 800) \text{ nm (Gl.(7), S.3)}$$

Kalibrierkurve:

$$\lambda(\gamma), \text{ für } \gamma = 47^\circ \dots 53^\circ \text{ (Gln. (15) und (16), S.5)}$$

relative Messunsicherheit:

$$\Delta\lambda/\lambda, \text{ für } \lambda = (380 \dots 780) \text{ nm (Gln. (15), (16) und (17), S.5)}$$

Messaufgabe 2: Bestimmen Sie aus den gemessenen Ablenkwinkeln für die Spektrallinien von Neon und Krypton die Wellenlängen und identifizieren Sie diese mit den im Anhang, S. 10, angegebenen Tabellenwerten.

1 Grundlagen

1.1 Spektralserien

Bohrsches Atommodell:

Emissionsspektren gestatten die Identifikation von Materialien, also chemischer Elemente oder Moleküle. Die ersten theoretischen Erklärungen zur Entstehung dieser Spektren hat Niels Bohr (1885–1962) gegeben. Um 1913 entwickelte er das bis dahin geltende Atommodell von Ernest Rutherford (1871–1937) weiter. Das Modell von Bohr beruht auf folgenden Postulaten:

1. Das elektrisch neutrale Atom besteht aus einem positiv geladenen Kern und wird von einer der Kernladungszahl entsprechenden Anzahl von Elektronen umkreist, Abb. 1. Der Umlauf kann nur auf gewissen, sog. „erlaubten“ Bahnen erfolgen, wo sie sich trotz Beschleunigung (Richtungsänderung) strahlungsfrei bewegen, was entgegen den Erwartungen der klassischen Physik ist. Die erlaubten Bahnen werden als stationäre Zustände des Atoms bezeichnet. Der Drehimpuls eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Elektrons kann nur ganzzahlige Vielfache von $h/2\pi$ betragen, mit dem Planckschen Wirkungsquantum h .¹⁾
2. Wechseln Elektronen von einem höherenergetischem Zustand E_m in einen Zustand E_n , wobei $E_n < E_m$, so wird elektromagnetische Strahlung emittiert, deren Frequenz f_{mn} nach Albert Einstein (1879–1955) proportional zur Energiedifferenz ist,

$$E_m - E_n = h \cdot f_{mn} \quad (1)$$

Auf der Grundlage der Bohrschen Postulate können die möglichen Frequenzen des Emissionsspektrums berechnet werden (Anhang, S. 6),

$$f_{mn} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2)$$

Darin bezeichnen Z die Kernladungszahl,

$$m_e = 9,109\,382\,91(40) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

¹⁾Heute kennt man den Wert des Wirkungsquantums sehr genau, $h = 6,626\,069\,57(29) \cdot 10^{-34} \text{ Ws}^2$.

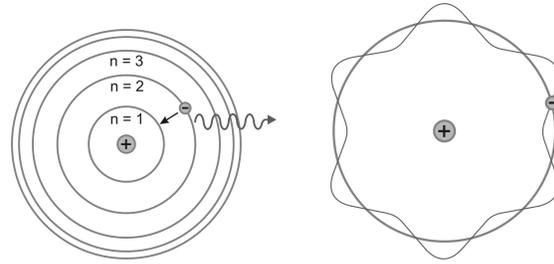


Abb. 1: Bohrsches Atommodell: Links: Emission eines Lichtquants (Photons) in Folge eines Elektronensprungs auf eine niederenergetische Umlaufbahn. Rechts: Positive Interferenz eines Elektrons mit sich selbst auf einer stationären Umlaufbahn (stationärer Zustand).

die Ruhemasse eines Elektrons,

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,817 \dots 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

die Dielektrizitätskonstante, und

$$e \equiv 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

die Elementarladung.

Für Wasserstoff gilt $Z = 1$. Hält man hier das untere Energieniveau E_n bei $n = 2$ fest, so bilden f_{m2} , $m > 2$, die nach ihrem Entdecker Balmer (1825–1898) benannte Serie. Für $m < 10$ liegt sie im sichtbaren Frequenzbereich, also bei Vakuumwellenlängen $\lambda > 380 \text{ nm}$. Hingegen liegt die nach Lyman (1874–1954) benannte Serie f_{m1} , $m > 1$, im unsichtbaren ultravioletten Bereich.

Gleichung (2) gilt recht gut für das leichte Wasserstoffatom. Bei schwereren Elementen wird die positive Kernladung durch negativ geladene Elektronen teilweise abgeschirmt. Man verwendet deshalb zur Berechnung der Energiedifferenzen zwischen verschiedenen Elektronenbahnen sogenannte effektive Kernladungszahlen, die geringer als die eigentliche Kernladungszahl ist und vor allem von der Elektronenbesetzung der unteren Energieniveaus abhängt. Die Berechnung der Abschirmungskoeffizienten setzt eine tiefgehende Modellbildung voraus und ihre experimentelle Verifikation verlangt präzise spektroskopische Messungen.

Rydberg-Konstante:

Auf experimentellem Weg fanden bereits in den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts Johann Balmer (1825–1898) und Johannes Rydberg (1854–1919) die Be-

ziehung

$$\frac{f_{mn}}{c_0} = R \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) ,$$

mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c_0 = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (3)$$

Ein Vergleich mit der Formel (2) liefert die sogenannte *Rydberg-Konstante*

$$R = \frac{1}{c_0} \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \quad (4)$$

Sie hat den Wert

$$R = 1,097\,373\,156\,853\,9(55) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} .$$

1.2 Messprinzip

Lichtquellen:

Zur Spektralanalyse müssen die untersuchten Stoffe zum Leuchten angeregt werden, sofern sie nicht selbstleuchtend sind. Dies geschieht hier in einer Gasentladungsröhre (Geißlersche Röhre), die mit einer Hochspannung von (1. 20) kV betrieben wird.

Das emittierte Licht ist eine Überlagerung von vielen einzelnen nahezu harmonischen elektromagnetischen Wellen der Frequenzen f_k , $k = 1, 2, \dots$. Bei der Spektralanalyse werden diese Frequenzen identifiziert. Jede einzelne Welle heißt *monochromatisch*, weil sie beim menschlichen Sehen für eine Farbe steht, sofern sie in dem sichtbaren Frequenzbereich von etwa $(4 \dots 8) \cdot 10^{14}$ Hz liegt. Dies entspricht den Vakuumwellenlängen λ im Bereich (380 ... 780) nm. Mit dem hier verwendeten Spektroskop werden nur sichtbare Linien ausgemessen, im unsichtbaren Bereich könnte an die Stelle des menschlichen Auges ein geeigneter Sensor treten. Dies setzt jedoch voraus, dass das Material, aus dem das Prisma besteht, auch für diese unsichtbaren Bereiche transparent ist.²⁾

Lichtgeschwindigkeit:

Die Lichtgeschwindigkeit c_M ist vom Ausbreitungsmedium abhängig. Am größten ist sie im Vakuum, dort hat sie den (exakten) Wert (3). Allgemein gilt

$$c_M = \lambda_M f . \quad (5)$$

²⁾ Glas, das üblicherweise in optischen Geräten für sichtbares Licht verwendet wird, ist im Infrarotbereich kaum transparent. Deshalb verwendet man beispielsweise in Infrarotkameran Linien aus Germanium.

Im Medium hat monochromatisches Licht der Frequenz f die Wellenlänge $\lambda_M = c_M/f$. Die Frequenz f ändert sich beim Eintritt in ein anderes Medium nicht. Im Wellenbild ist monochromatisches Licht eine harmonische elektromagnetische Welle der Schwingungsfrequenz f . Im Teilchenbild entspricht dies unterschiedlichen Photonenenergien $E = hf$. Beim Eintritt in ein Medium ändert sich die Photonenergie bzw. die Frequenz nicht, wohl aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit und folglich nach (5) auch die Wellenlänge.

Die Geschwindigkeiten von Licht in Luft bei Normalbedingungen und im Vakuum unterscheiden sich nur geringfügig, es gilt

$$c_L \approx 0,999\,72 \cdot c_0 .$$

Für die hier erreichbaren Messgenauigkeiten kann $c_L \approx c_0$ gesetzt werden.

Brechung und Dispersion:

Im Prismen-Spektroskop nutzt man die zwei Eigenschaften *Brechung* und *Dispersion* von Licht beim Durchgang durch Materie.

Brechung:

Die Lichtgeschwindigkeit c_L ist größer als die Geschwindigkeit c_G in Glas, aus dem das Prisma des Spektroskops besteht. Dadurch kommt es bei Eintritt eines Lichtstrahl von Luft in das Prisma zur Lichtablenkung hin zum Einfallslot, entsprechend dem *Brechungsgesetz*,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_G}{n_L} = \frac{c_L}{c_G} = \frac{\lambda_L}{\lambda_G} . \quad (6)$$

Darin sind α und β der Ein- bzw. Ausfallswinkel des Lichtstrahls, gemessen zum Einfallslot, sowie $n_L = c_0/c_L \approx 1$ und $n_G = c_0/c_G$ die Brechungsindizes von Luft bzw. Glas.

Dispersion:

Im hier verwendeten Prismenglas fällt die Lichtgeschwindigkeit mit wachsender Photonenfrequenz $f = c_G/\lambda_G = c_L/\lambda_L$. Folglich wächst dann der Brechungsindex n_G . Blaues Licht wird also stärker abgelenkt als rotes.³⁾

³⁾ Allgemein nennt man die Abhängigkeit einer physikalischen Größe (hier des Ablenkungswinkels) von der Frequenz *Dispersion* (lat. *dispergere*, zerstreuen, verbreiten). Man spricht hier von *normaler Dispersion*, weil der Brechungsindex mit steigender Frequenz wächst. Es gibt jedoch auch Stoffe mit umgekehrtem Verhalten, was man *anomale Dispersion* nennt. Die Dispersion ist Grundlage für die Funktionsweise des Prismen-

Für viele Gläser wie auch das hier verwendete kann der Brechungsindex näherungsweise aus der Vakuumwellenlänge λ nach der *Dispersionsgleichung*⁴⁾ berechnet werden,

$$n_G(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{b\lambda^2}{\lambda^2 - a}} \quad (7)$$

Die Parameter a und b beschreiben das Prismenmaterial. Zur Vereinfachung der Schreibweise wurde hier $\lambda = \lambda_0$ gesetzt.⁵⁾

Strahlengang am Prisma:

Gelangt ein weißer Lichtstrahl auf das Prisma, so werden bei normaler Dispersion die höherfrequenten (kurzwelligen, blauen) Anteile stärker abgelenkt, Abb. 2.

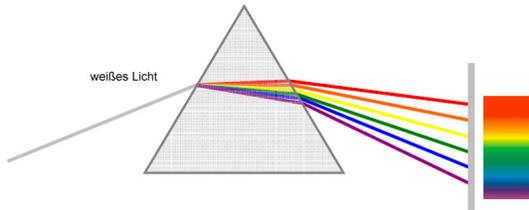


Abb. 2: Normale Dispersion von weißem Licht an einem Prisma.

Ein einzelner (monochromatischer) Lichtstrahl wird beim Durchgang durch ein Prisma zweimal gebrochen und erfährt dabei eine Gesamtablenkung um den Winkel γ (Abb. 7, S. 7). Die Größe von γ hängt ab vom Einfallswinkel α , vom Prismenwinkel ϵ zwischen den brechenden Kanten sowie vom relativen Brechungsindex

$$n = \frac{n_G}{n_L}$$

Spektroskopes. In einem anderen Kontext ist sie jedoch unerwünscht, wie bei optischen Abbildungen von Gegenständen, wo sie zu chromatischen Abbildungsfehlern führt.

⁴⁾Diese empirisch ermittelte Gleichung ist nach Wolfgang von Sellmeier benannt, der sie 1871 veröffentlichte. Die Größe \sqrt{a} lässt sich als Resonanzwellenlänge von Absorptionslinien interpretieren.

⁵⁾Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c monochromatischen Lichts ergibt sich aus der Wellenlänge λ und der Frequenz f , $c = \lambda f$. Die Verringerung von c bei Eintritt ins Glas beruht jedoch allein auf eine Verringerung von λ . Die Frequenz bleibt unverändert, und allein sie bestimmt unser Farbsehen. Deshalb sollte c und letztlich auch die Ablenkung im Prisma besser als Funktion der Unveränderlichen f angesehen werden. Dennoch wird der Brechungsindex einer Substanz häufig als Funktion von λ aufgefasst, gemeint ist dann die Vakuumwellenlänge.

Durch zweimalige Anwendung des Brechungsgesetzes erhält man (Anhang, S. 7f.),

$$\gamma = \alpha - \epsilon + \arcsin \left[\sin \epsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \epsilon \sin \alpha \right] \quad (8)$$

Der Brechungsindex n_G hängt von der Wellenlänge λ entsprechend der Dispersionsgleichung (7) ab. Damit sind auch $n = n_G(\lambda)/n_L$ und schließlich γ wellenlängenabhängig. Die Abhängigkeit $\gamma(\alpha)$ illustriert Abb. 3.

Bei gegebenem Brechungsindex n und Prismenwinkel ϵ nimmt der Ablenkwinkel γ seinen kleinsten Wert

$$\gamma_{\min} = 2\alpha^* - \epsilon \quad (9)$$

an, wenn der Einfallswinkel α den Wert

$$\alpha^* = \arcsin \left(n \sin \frac{\epsilon}{2} \right) \quad (10)$$

hat, s.S.8. Aus (9) ersieht man, dass der Strahlengang durch das Prisma dann spiegelsymmetrisch ist bezüglich der Halbierenden des Winkels ϵ zwischen den brechenden Kanten. Für $n = 1,632$ und $\epsilon = 60^\circ$ (vgl. Abb. 3) erhält man $\alpha^* = \arcsin(n/2) \approx 54,7^\circ$.

Setzt man (10) in (9) ein, so erhält man, umgestellt

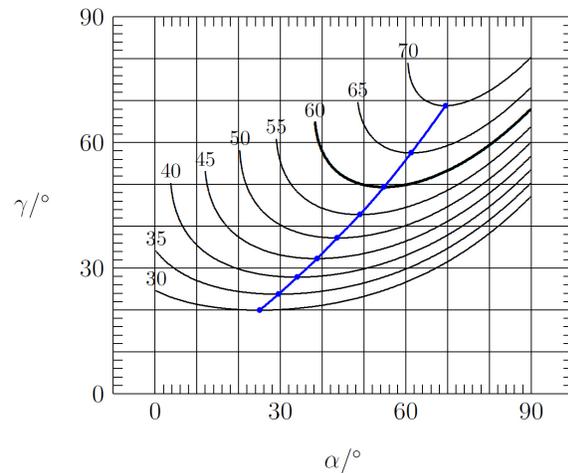


Abb. 3: Ablenkwinkel γ als Funktion des Einfallswinkels α , mit dem Prismenwinkel ϵ als Parameter, Gl. (8). Es wurde die Brechzahl zu $n = 1,632$ gesetzt, was dem hier verwendeten Prismenmaterial bei der Wellenlänge $\lambda \approx 590$ nm (gelbe Natrium-Doppellinie) entspricht.

nach dem Brechungsindex,

$$n = \frac{\sin \frac{\gamma_{\min} + \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \quad (11)$$

Dies ermöglicht die direkte experimentelle Bestimmung des Brechungsindex: Variiert man den Einfallswinkel α solange, bis der Ausfallswinkel γ einer bestimmten Spektrallinie (mit der bekannten Wellenlänge λ) minimal ist, so erhält man mit dem zu messenen Wert γ_{\min} nach (11) $n(\lambda)$, also einen Punkt auf der Dispersionskurve (7).

Für das hier verwendete Prisma gilt $\varepsilon = 60^\circ$, mit der Justierung auf den Einfallswinkel $\alpha = 60^\circ$. Damit vereinfacht sich (8) unter Beachtung von $\cos 60^\circ = 1/2$ und $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ zu

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{12n^2 - 9} - \sqrt{3}}{4} \quad (12)$$

2 Versuchssparatur

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 4 dargestellt. Sie besteht aus drei Lichtquellen und dem Spektralapparat. Als Lichtquelle dienen drei Geißlersche Gasentladungsröhren, die mit den Edelgasen He, Ne bzw. Kr gefüllt sind. Die Röhren sind auf einer lateral verschiebbaren Halterung montiert. Sie werden mit einer Hochspannung betrieben, die mit einem Tesla-Transformator (Induktor) und einem Vorschalt-Gerät (Trafo) erzeugt wird.

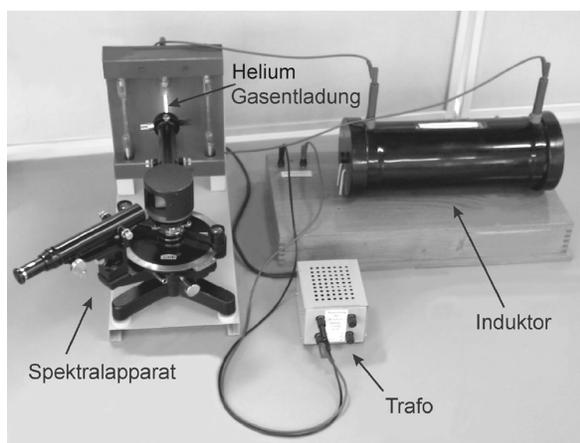


Abb. 4: Gesamtansicht der Versuchsanordnung.

Das zu analysierende Licht einer Geißlerschen Röhre gelangt über einen einstellbaren Spalt in das Spek-

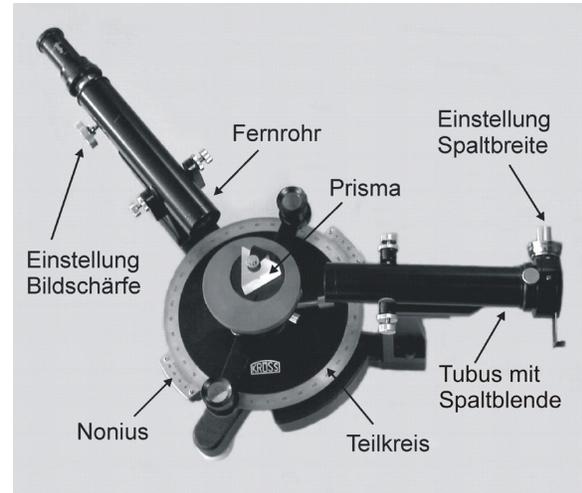


Abb. 5: Detailansicht des Prismen-Spektroskops.

roskop, Abb. 5. Der Spalt befindet sich in der Brennebene eines Kollimators (Tubus), so dass das vom Spalt ausgehende Strahlenbündel parallelisiert auf das Prisma gelangt. Die Spaltbreite ist einstellbar. Je kleiner der Spalt, desto schärfer werden die Spektrallinien letztlich abgebildet und somit genauer ausgemessen (höhere spektrale Auflösung). Allerdings werden die Linien damit auch dunkler. Die Grundfläche des hier verwendeten Prismas bildet ein gleichseitiges Dreieck und hat folglich den Prismenwinkel $\varepsilon = 60^\circ$.

Das vom Prisma gebrochene Licht wird mit einem schwenkbaren Fernrohr beobachtet. Die Sehschärfe kann mit einem Okular am Fernrohr eingestellt werden. Im Okular befindet sich eine Messmarke zum Ausrichten auf eine Spektrallinie. Zur Feinjustierung und Fixierung dienen ein Feintrieb bzw. eine Arretierschraube.

Das Fernrohr ist mit einem Goniometer starr verbunden, so dass man den Ablenkwinkel γ mit der Präzision von $(1/60)^\circ = 1'$ ablesen kann. Zum genauen Auslesen dient ein Nonius, Abb. 6.

3 Hinweise

3.1 Kalibrierung

Die Spektralanalyse setzt die Kenntnis der beiden Parameter a und b der Dispersionsgleichung (7) voraus. Diese werden aus vorgegebenen Wellenlängen λ_k ei-

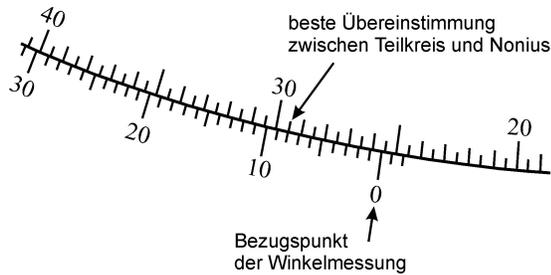


Abb. 6: Ausschnitt aus der Hauptskala des Goniometers im Bereich $20^\circ \dots 40^\circ$ (oben) und zugeordneter Nonius mit 30 Teilstrichen (unten). Die Nulllinie des Nonius weist auf einen Winkel γ im Bereich $25^\circ 30' \dots 26^\circ$. Der Bruchteil, um den γ größer als $25^\circ 30'$ ist, wird auf dem Nonius in der Einheit *Winkelminute* abgelesen: Der 8te Teilstrich des Nonius stimmt am besten mit einem Strich auf der Hauptskala überein. Folglich gilt $\gamma \approx 25^\circ 30' + 8' \approx 25,63^\circ$.

niger markanter Linien des Emissionsspektrums von Helium ermittelt, Tab. 2 S. 9. Zu den Werten λ_k werden die Ablenkwinkel γ_k gemessen und daraus mittels (12), aufgelöst nach n , die (relativen) Brechungsindizes berechnet,

$$n_k = \sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{2 \sin \gamma_k}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (13)$$

Weiterhin kann die Dispersionsgleichung (7) wie folgt umgestellt werden,

$$\lambda_k^2 = a + b \cdot \frac{\lambda_k^2}{n_k^2 - 1}.$$

Hier wurde der nach (13) berechnete relative Brechungsindex eingesetzt. Dies ist zulässig, weil Luft keine Dispersion zeigt und $n_L \approx 1$ gilt.⁶⁾

Mittels *linearer Regression* der Wertepaare (x_k, y_k) ,

$$x_k \equiv \lambda_k^2 / (n_k^2 - 1) \quad \text{und} \quad y_k \equiv \lambda_k^2, \quad (14)$$

können a und b ermittelt werden.⁷⁾

3.2 Spektralanalyse

Zur Spektralanalyse bestimmt man zunächst für die auszumessende Spektrallinie den Ablenkwinkel γ bei

⁶⁾ Würde anstelle der Luft ein anderes Medium mit dem Brechungsindex $n_M(\lambda)$ verwendet, welches Dispersion zeigt, so müsste statt der Dispersionsgleichung (7) für Glas ein allgemeinerer Ansatz für die Wellenlängenabhängigkeit des relativen Brechungsindex $n(\lambda) = n_G(\lambda)/n_M(\lambda)$ gemacht werden, der dann mehr als 2 Parameter enthielte.

⁷⁾ Programme zur linearen Regression arbeiten nur mit den Maßzahlen. Werden diese zu klein, so gibt es numerische Approximations- und Darstellungsfehler. Es wird deshalb empfohlen, die Größen x_k und y_k in der Einheit $(\text{nm})^2$ zu messen.

bekanntem Einfallswinkel $\alpha = 60^\circ$. Daraus berechnet man nach Umstellung von (12) den Brechungsindex,

$$n(\gamma) = \frac{\sqrt{9 + (\sqrt{3} + 4 \sin \gamma)^2}}{2\sqrt{3}}. \quad (15)$$

Hiermit geht man in (7) ein, und stellt nach der gesuchten (Vakuum-)Wellenlänge um,

$$\lambda = \sqrt{\frac{a \cdot (n^2 - 1)}{n^2 - 1 - b}}. \quad (16)$$

Die Unsicherheiten der Kalibrier-Parameter a und b sowie des Ablenkwinkels γ pflanzen sich auf die berechnete Wellenlänge fort. Die Größtfehlerfortpflanzung ergibt,

$$\Delta \lambda = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial a} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{\partial \lambda}{\partial b} \right| \cdot \Delta b + \left| \frac{\partial \lambda}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \gamma} \right| \cdot \Delta \gamma, \quad (17)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial a} &= \frac{\lambda}{2a} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial b} &= \frac{\lambda}{2(1 + b - n^2)} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial n} &= \frac{-abn}{\lambda(n^2 - 1 - b)^2} \\ \frac{\partial n}{\partial \gamma} &= \frac{2 \sin 2\gamma + \sqrt{3} \cos \gamma}{3n} \end{aligned}$$

In (17) ist $\Delta \gamma$ im Bogenmaß einzusetzen.

A Rechnungen

A.1 Spektralserien

Ein Elektron mit der Elementarladung $-e$ und ein Atomkern der Ladung Ze , ziehen sich im Abstand r mit der Coulombschen Kraft $F_C = Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ an. Es herrscht Gleichgewicht, wenn das Elektron gerade mit einer solchen Geschwindigkeit v um den Kern kreist, dass F_C durch die Zentrifugalkraft $F_Z = m_e v^2/r$ aufgehoben wird. Es muss also gelten

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (18)$$

Soweit ist dies eine vollkommen klassische Denkweise.

Im quantenmechanischen Bild kann nach Louis de Broglie (1892–1987) ein Elektron mit dem Impuls $m_e v$ auch als Materiewelle der Wellenlänge $\lambda_e = h/(m_e v)$ aufgefasst werden. Geht man davon aus, dass das Elektron entlang der Umlaufbahn positiv mit sich selbst interferiert, so muss der Umfang $2\pi r$ der Kreisbahn gerade ein ganzzahliges Vielfache der Wellenlänge sein,⁸⁾

$$2\pi r = n \cdot \lambda_e = \frac{nh}{m_e v} \quad \text{und folglich} \quad v = \frac{nh}{2\pi r m_e}$$

Ersetzt man hiermit v auf der rechten Seite von (18), und stellt nach r um, so folgt

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi Z m_e e^2} \cdot n^2, \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Darin nennt man n die *Hauptquantenzahl*. Es sind also nicht beliebige Bahnradien möglich.⁹⁾

Im Coulom-Feld hat das Elektron im Abstand r_n die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n}$$

(Für $r_n \rightarrow \infty$ wird $E_{\text{pot}} = 0$ gesetzt.) Für die kinetische Energie findet man unter Beachtung von (18)

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{E_{\text{pot}}}{2}$$

⁸⁾ Hierin besteht die Quantisierung.

⁹⁾ Den kleinst möglichen Radius erhält man für das Wasserstoffatom ($Z = 1$) für $n = 1$,

$$r_1(Z = 1) = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \approx 0,053 \text{ nm}$$

Dies ist der sogenannte *Bohrsche Wasserstoffradius*, der in der Atomphysik als Längeneinheit genutzt wird. Er ist um ca. 4 Größenordnungen kleiner, als die Wellenlänge sichtbaren Lichtes.

Tab. 1: Nach (2) berechnete Photonenfrequenzen mit entsprechenden Werten für die Photonenenergie E_{mn} und de Broglie-Wellenlänge λ_{mn} einiger Spektralserien des Wasserstoffatoms. Das mit dem menschlichen Auge sichtbare Licht ist Teil der Balmer-Serie ($n = 2, m = 3 \dots 9$). Alle anderen Linien sind unsichtbar: die Lyman-Serie liegt gänzlich im Ultraviolett und alle anderen Serien im nahen Infrarotbereich.

Linie	n	m	$\frac{E_{mn}}{10^3 \text{ eV}}$	$\frac{f_{mn}}{10^{12} \text{ Hz}}$	$\frac{\lambda_{mn}}{10^{-9} \text{ m}}$
Lyman-Serie					
	1	2	10,204	2467,38	121,50
	1	3	12,094	2924,30	102,52
	1	4	12,755	3084,23	97,20
	1	5	13,061	3158,25	94,92
	1	6	13,228	3198,46	93,73
	1	7	13,328	3222,70	93,03
	1	8	13,393	3238,44	92,57
	1	9	13,438	3249,23	92,27
	1	10	13,470	3256,94	92,05
	1	∞	13,606	3289,84	91,13
Balmer-Serie					
H_α	2	3	1,890	456,92	656,11
H_β	2	4	2,551	616,85	486,01
H_γ	2	5	2,857	690,87	433,94
H_δ	2	6	3,023	731,08	410,07
H_ϵ	2	7	3,124	755,32	396,91
H_ζ	2	8	3,189	771,06	388,81
H_η	2	9	3,233	781,85	383,44
	2	10	3,265	789,56	379,69
	2	∞	3,401	822,46	364,51
Paschen-Serie					
	3	4	0,661	159,92	1874,61
	3	5	0,968	233,94	1281,47
	3	6	1,134	274,15	1093,52
	3	7	1,234	298,40	1004,67
	3	8	1,299	314,13	954,35
	3	9	1,344	324,92	922,66
	3	10	1,376	332,64	901,25
	3	∞	1,512	365,54	820,14
Brackett-Serie					
	4	5	0,306	74,02	4050,08
	4	6	0,472	114,23	2624,45
	4	7	0,573	138,48	2164,95
	4	8	0,638	154,21	1944,04
	4	9	0,682	165,00	1816,93
	4	10	0,714	172,72	1735,75
	4	∞	0,850	205,62	1458,03
Pfund-Serie					
	5	6	0,166	40,21	7455,82
	5	7	0,267	64,45	4651,26
	5	8	0,332	80,19	3738,53
	5	9	0,376	90,98	3295,21
	5	10	0,408	98,70	3037,56
	5	∞	0,544	131,59	2278,17

Für die gesamte Energie folgt

$$E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{E_{\text{pot}}}{2} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} .$$

Ersetzt man hierin r_n gemäß Gl. (19), erhält man schließlich die diskreten Energieniveaus,

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot Z^2 \cdot \frac{1}{n^2} .$$

Für die Differenz $E_{mn} \equiv E_m - E_n$ zweier Energieniveaus E_n und E_m , $m > n$, erhält man

$$E_{mn} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) .$$

Diese Formel gilt in guter Näherung für das Wasserstoffatom. Bei Elektronenübergängen in der Hülle von schwereren Atomen wird die positive elektrische Ladung des Kerns durch innere (kernnahe) Elektronen teilweise abgeschirmt. Man rechnet dann an Stelle von Z mit einem kleineren Wert, der sog. effektiven Kernladungszahl $Z_{\text{eff}} < Z$. Die Frequenz der emittierten Strahlung beim Übergang vom Energieniveau E_m auf das Niveau E_n ist $f_{mn} = (E_m - E_n)/h$, was schließlich auf die zentrale Formel (2) führt. In Tab. 1 sind einige Werte der Energie und Frequenz sowie der de-Broglie-Wellenlänge $\lambda_{mn} = c/f_{mn}$ für ein Wasserstoffatom angegeben.

Bei der obigen Betrachtung wurde angenommen, dass der Atomkern ruht. Tatsächlich bewegt er sich jedoch um den gemeinsamen Schwerpunkt von Kern und Hüllelektronen. Man kann dies berücksichtigen, indem in den Formeln m_e durch die reduzierte Masse $m_r = m_e m_k / (m_e + m_k)$ ersetzt wird. Für Wasserstoff, das leichteste Element, ist die Korrektur mit am größten, $m_r \approx 0,0005 m_e$. Für deutlich schwerere Elemente kann diese Korrektur jedoch zumeist vernachlässigt werden.

A.2 Ablenkung am Prisma

Ablenkgleichung: Zur Berechnung der Ablenkung von monochromatischem Licht beim Durchgang durch ein Prisma der Brechzahl n_G , eingebettet in Luft der Brechzahl $n_L \approx 1$, sind die Verhältnisse in Abb. 7 illustriert. Die Gesamtablenkung γ ergibt aus den Ablenkungen δ und δ^* beim Ein- bzw. Austritt des Lichtes,

$$\gamma = \delta + \delta^* . \quad (20)$$

Nach dem Brechungsgesetz, Gl. (6), S. 2, gilt unter Verwendung von $n \equiv n_G/n_L$,

$$\beta = \arcsin(n^{-1} \cdot \sin \alpha) \quad (21)$$

Bei Beachtung von $\delta = \alpha - \beta$ folgt,

$$\delta = \alpha - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) .$$

Der Einfallswinkel bei Austritt des Lichtstrahls beträgt offenbar $\alpha^* = \epsilon - \beta$. Für den Austrittswinkel β^* folgt wiederum aus dem Brechungsgesetz, $\beta^* = \arcsin(n \cdot \sin \alpha^*)$. Aus $\delta^* = \beta^* - \alpha^*$ folgt somit,

$$\delta^* = \arcsin\left[n \cdot \sin(\epsilon - \beta)\right] - (\epsilon - \beta) . \quad (22)$$

Unter Beachtung von (21) und der allgemeinen Regel $\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$ folgt,

$$\begin{aligned} \sin(\epsilon - \beta) &= \sin \epsilon \cdot \cos \beta - \cos \epsilon \cdot \sin \beta \\ &= \sin \epsilon \cdot \sqrt{1 - (n^{-2} \cdot \sin^2 \alpha)} \\ &\quad - \cos \epsilon \cdot (n^{-1} \cdot \sin \alpha) . \end{aligned}$$

Somit kann (22) unter Verwendung von $\beta = \alpha - \delta$ weitergeschrieben werden als,

$$\begin{aligned} \delta^* &= \alpha - \delta - \epsilon \\ &\quad + \arcsin\left[\sin \epsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \epsilon \sin \alpha\right] . \end{aligned} \quad (23)$$

Setzt man (23) in (20) ein, folgt schließlich der gesuchte Ablenkungswinkel (8).

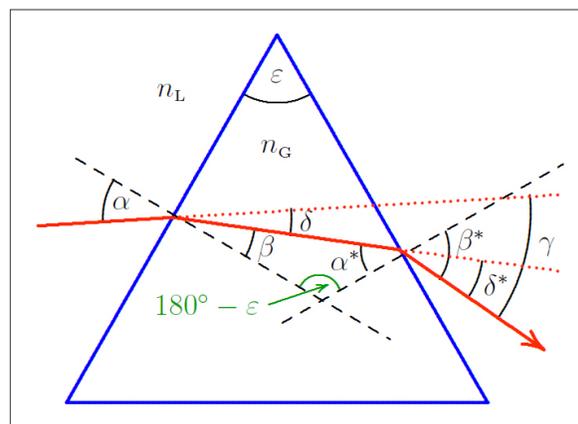


Abb. 7: Strahlengang von monochromatischem Licht im Glasprisma mit der Brechzahl n_G , das sich im Medium mit der Brechzahl $n_L < n_G$ befindet. Die Skizze entspricht den Brechzahlen $n_G \approx 1,5$ und $n_L \approx 1$ sowie den Winkeln $\epsilon = 60^\circ$ und $\alpha \approx 35^\circ$.

Minimale Ablenkung: Der Ablenkwinkel γ erreicht seinen durch (9) gegebenen kleinsten Wert γ_{\min} beim Einfallswinkel α^* , Gl. (10). Um dies zu zeigen, werden die folgenden Abkürzungen verwendet,

$$\begin{aligned} A &\equiv \sin \varepsilon \\ B &\equiv \cos \varepsilon \\ y(\alpha) &\equiv \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \\ x(\alpha) &\equiv A \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - B \sin \alpha \\ &= n(A \cos y - B \sin y) \end{aligned} \quad (24)$$

Man erhält dann,

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \alpha - \varepsilon + \arcsin x \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -n(A \sin y + B \cos y)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 y}}{n \cos y} \quad (26)$$

Es gilt $\partial \gamma / \partial \alpha = 0$, falls

$$-\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \sqrt{1-x^2}$$

Das Einsetzen obiger Terme und Quadrierung beider Seiten liefert nach leichter Umstellung,

$$\begin{aligned} (A \sin y + B \cos y)^2 (1 - n^2 \sin^2 y) &= \\ \cos^2 y (1 - n^2 (A \cos y - B \sin y)^2) & \end{aligned}$$

Diese Gleichheit folgt aus der Gleichheit entsprechender Terme,

$$\begin{aligned} A \sin y + B \cos y &= \cos y \\ \sin y &= A \cos y - B \sin y \end{aligned} \quad (27)$$

Letztere Gleichung lässt sich umstellen zu,

$$\begin{aligned} \tan y &= \frac{A}{1+B} = \frac{\sin \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} = \tan(\varepsilon/2) \\ y &= \varepsilon/2 \end{aligned} \quad (28)$$

Hierbei wurden die Beziehungen

$$\sin \varepsilon = 2 \sin(\varepsilon/2) \cos(\varepsilon/2)$$

und

$$1 + \cos \varepsilon = 2 \cos^2(\varepsilon/2)$$

verwandt. Unter Beachtung von

$$\cos \varepsilon = 1 - 2 \sin^2(\varepsilon/2)$$

überzeugt man sich leicht, dass die Beziehung (28) auch (27) erfüllt. Aus (24) folgt dann, dass der Ablenkwinkel γ beim Einfallswinkel α^* , Gl.(10), extrem ist. Numerisch überzeugt man sich leicht davon, dass γ hier minimal ist, Abb. 3.

B Tabellen

B.1 Zur Messaufgabe 1: Spektrum von Helium

Nullverschiebung (Winkelanzeige bei $\gamma = 0$): $\gamma^* =$

max. Abweichung des Ablenkungswinkels: $\Delta\gamma =$

max. Abweichung des Einfallswinkels: $\Delta\alpha =$

Ablenkungswinkel: $\gamma_k = \gamma_k^* - \gamma^*$

Brechungsindex: $n_k = \sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{2\sin\gamma_k}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2}$

Regressionsgerade: $y_k = a + b \cdot x_k$

$x_k = \lambda_k^2 / (n_k^2 - 1)$

$y_k = \lambda_k^2$

$a =$

$b =$

Tab. 2: Vakuumwellenlängen λ_k der 7 am intensivsten sichtbaren Emissionslinien von Helium

k	λ_k / nm	Farbe	I_{rel}	γ_k^*	$\gamma_k / ^\circ$	n_k	$\frac{x_k}{10^3 (\text{nm})^2}$	$\frac{y_k}{10^3 (\text{nm})^2}$
1	706,5	Rot (dunkel)	70					
2	667,8	Rot (hell)	100					
3	587,6	Gelb (hell)	1000					
4	501,6	Grün (hell)	100					
5	492,2	Grün (dunkel)	50					
6	471,3	Blau (dunkel)	40					
7	447,1	Blau-Violett (hell)	100					



B.2 Zur Messaufgabe 2: Spektrum von Neon und Krypton

Tab. 3: Vakuumwellenlängen λ der Emissionslinien von Neon $^{M}_{10}\text{Ne}$ (Isotopengemisch, vor allem M = 20 und 22) mit relativen Intensitäten I_r .

λ/nm	I_{rel}										
422.97	150	442.86	100	475.27	10	565.67	10	597.46	100	633.44	100
423.39	100	443.09	150	478.89	12	571.92	5	597.55	120	638.30	120
425.07	120	443.09	150	479.02	10	574.83	12	598.79	80	640.23	200
436.99	120	445.71	120	482.73	10	576.44	80	603.00	100	650.65	150
437.94	70	452.27	100	488.49	10	580.45	12	607.43	100	653.29	60
437.96	150	453.78	10	500.52	4	582.02	40	609.62	80	659.90	150
438.51	100	454.04	10	503.78	10	585.25	500	612.85	60	665.21	70
439.20	200	456.91	100	514.49	10	587.28	100	614.31	100	667.83	90
439.80	150	470.44	15	533.08	25	588.19	100	616.36	120	671.70	20
440.93	150	470.89	12	534.11	20	590.25	60	618.22	250	692.95	100
441.32	100	471.01	10	534.33	8	590.64	60	621.73	150	702.41	90
442.14	100	471.21	10	540.06	60	594.48	100	626.65	150	703.24	100
442.85	100	471.54	15	556.28	5	596.55	100	630.48	60	705.13	50



Tab. 4: Vakuumwellenlängen λ der Emissionslinien von Krypton ${}^M_{36}\text{Kr}$ (Isotopengemisch, vor allem M = 80, 82, 83, 84 und 86) mit relativen Intensitäten I .

λ/nm	I_{rel}										
390.62	150	429.29	600	442.52	100	461.53	500	484.66	700	564.96	100
392.01	200	430.05	200	443.17	500	461.92	1000	485.72	150	568.19	400
399.48	100	431.78	500	443.68	600	463.39	800	494.56	300	569.04	200
399.78	100	431.86	400	445.39	600	465.89	2000	502.24	200	583.29	100
405.70	300	431.96	1000	446.37	800	468.04	500	508.65	250	587.09	3000
406.51	300	432.30	150	447.50	800	469.13	100	512.57	400	599.22	200
408.83	500	435.14	100	448.99	400	469.44	200	520.83	500	599.39	60
409.87	250	435.55	3000	450.24	600	473.90	3000	530.87	200	605.61	60
410.93	100	436.26	500	452.31	400	476.24	300	533.34	500	642.02	300
414.51	250	436.97	200	455.66	200	476.57	1000	546.82	200	642.10	100
425.06	150	437.61	800	457.72	800	481.18	300	556.22	500	645.63	200
427.40	1000	438.65	300	458.30	300	482.52	300	557.03	2000	657.01	150
428.30	100	440.00	200	459.28	150	483.21	800	558.04	80	669.92	60

