**Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald**
**Institut für Physik**

Physikalisches Grundpraktikum

| Versuch W4 - Ausdehnung von Luft und Quecksilber | | |
|---|---|---|
| Name: | Mitarbeiter: | |
| Gruppennummer: | lfd. Nummer: | Datum: |

# 1. Aufgabenstellung

## 1.1. Versuchsziel

Bestimmen Sie die Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft und Quecksilber.

Verschaffen Sie sich Kenntnisse zu folgenden Schwerpunkten des Versuches:

- ideale und reale Gase
- Gasgesetze
- Volumenausdehnung von Flüssigkeiten und festen Stoffen
- Funktionsprinzip von Gas- und Flüssigkeitsthermometern

## 1.2. Messungen

1.2.1. Messen Sie die Änderungen eines definierten Luftvolumens bei konstantem Druck in Abhängigkeit von der Temperaturänderung unter Beachtung von Abschnitt 3.2.1. Beginnen Sie die Messung beim maximalen Volumen (Quecksilbertropfen am rechten Ende der Kapillare bei ca. 40°C) und kühlen Sie die Apparatur auf Zimmertemperatur in Schritten von ca. 2°C ab. Zur Herabsetzung der Haftreibung ist geringfügig gegen das Glasrohr zu klopfen.

1.2.2. Messen Sie unmittelbar vor Beginn der Dampfeinleitung die Höhe der Quecksilbersäulen $h_0$ bezogen auf die Verbindungsröhre mit einem Lineal. Bestimmen Sie dann unter Beachtung von Abschnitt 3.2.2. ca. ½ Stunde nach dem Beginn der Dampfeinleitung die Temperaturen $T_1$ und $T_2$ (in °C) sowie die Höhendifferenz $\Delta h$ zwischen den Quecksilbersäulen des U-Rohres mit dem nivellierten Kathetometer.

## 1.3. Auswertungen

1.3.1. Stellen Sie die Gasausdehnung $l = f(T)$ grafisch dar und bestimmen Sie auf der Grundlage von Gl. (18) und (19) aus dem Anstieg der Regressionsgeraden den kubischen Ausdehnungskoeffizienten von Luft (PC-Programm LINEARE REGRESSION). Schätzen Sie mittels Gl. (20) die Messunsicherheit ab.

1.3.2. Bestimmen Sie den kubischen Ausdehnungskoeffizienten von Quecksilber nach Gl. (15) und schätzen Sie seine Messunsicherheit mittels Gl. (21) ab.

## 1.4. Zusatzaufgabe

In einer eingeschlossenen Luftmenge von $V$ = 1000 cm$^3$ herrscht bei einer in °C gemessenen Temperatur $T$ = 7°C ein Druck von $p$ = 1040 hPa. Welches Volumen nimmt das Gas bei konstantem Druck ein, wenn die Temperatur auf 0°C sinkt und wie groß ist das auf Normalbedingungen reduzierte Volumen des Gases?

## 2. Grundlagen

### 2.1. Thermische Ausdehnung von Stoffen

Bei einer Änderung ihrer Temperatur erfahren alle Stoffe eine Volumenänderung. Bis auf wenige Ausnahmen, z. B. Wasser im Temperaturbereich von 0 °C bis 4 °C, nimmt das Volumen mit der Temperatur zu. Der Grad der Ausdehnung ist im Wesentlichen von den intermolekularen Kräften zwischen den Molekülen abhängig. Dies führt zu der Überlegung, dass der Ausdehnungskoeffizient bei Festkörpern wegen der geringen Distanz der Moleküle eine vom Material abhängige Größe ist, während sich Gase in weiten Bereichen in der Regel identisch verhalten.

Der in diesem Versuch zu ermittelnde Volumenausdehnungskoeffizient ist ein Kennwert für die betreffenden Stoffe. Da die Wärmeausdehnung nicht immer gleichmäßig über alle Temperaturbereiche erfolgt, ist jeder Ausdehnungskoeffizient temperaturabhängig und wird deshalb für eine Bezugstemperatur oder einen Temperaturbereich angegeben. Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen dem thermischen *Längenausdehnungskoeffizienten* $\alpha$ (linearer Ausdehnungskoeffizient oder Wärmedehnung) und dem *Volumenausdehnungskoeffizienten* $\gamma$ (kubischer Ausdehnungskoeffizient).

### 2.2. Volumenausdehnung von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen

Wird einem homogenen und isotropen Körper Wärme zugeführt, so dehnt er sich in alle 3 Raumrichtungen gleichmäßig aus. Seine Volumenänderung $\Delta V$ kann bei nicht sehr großen Temperaturänderungen $\Delta T$ näherungsweise durch eine lineare Beziehung beschrieben werden:

$$\Delta V = V(T) - V_0 = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T \quad \text{bzw.} \quad V(T) = V_0 \cdot \left(1 + \gamma \cdot \Delta T\right)$$
$$\text{mit} \quad \Delta T = T - T_0 \quad \text{und} \quad V_0 = V(T_0) \tag{1}$$

($T_0$ – Ausgangstemperatur). Für den Volumenausdehnungskoeffizienten $\gamma$ ergibt sich:

$$\gamma = \frac{1}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{T - T_0} \cdot \frac{V(T) - V_0}{V_0} \quad [\mathrm{K}^{-1}] \ . \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten auch für Flüssigkeiten und Gase.

### 2.3. Zustandsgleichung von Gasen

Der thermische Zustand eines abgeschlossenen idealen Gases wird durch sein Volumen $V$, seinem im Innern herrschenden Druck $p$ und der **absoluten** Gastemperatur $T$ beschrieben und genügt der Beziehung

$$\frac{p \cdot V}{T} = const. \quad . \tag{3}$$

Dieser Zusammenhang ist auch als Zustandsgleichung idealer Gase bekannt:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \tag{4}$$

($R$ - universelle Gaskonstante, $n$ - Stoffmenge). Damit können verschiedene Gesetze für ideale Gase erklärt werden:

1. Gesetz von BOYLE und MARIOTTE (isotherme Zustandsänderung, $T = const.$)

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 = const \tag{5}$$

2. Gesetz von GAY-LUSSAC (isobare Zustandsänderung, $p = const.$)

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = const \quad \text{bzw.} \quad \Delta V = \frac{V_0}{T_0} \cdot \Delta T = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T \ ,$$
$$\Delta T = T - T_0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{T_0} \tag{6}$$

3. Gesetz von AMONTONS (2. Gesetz von GAY-LUSSAC, isochore Zustandsänderung, $V = const.$)

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = const. \quad \text{bzw.} \quad \Delta p = \frac{p_0}{T_0} \cdot \Delta T = p_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T \tag{7}$$

Dabei sind $p_0$ und $V_0$ der Druck und das Gasvolumen bei der **absoluten** Temperatur $T_0$ = 273,15 K. Gl. (6) entspricht der linearen Abhängigkeit von Gl. (1). Der in Gl. (7) auftretende Spannungskoeffizient $\gamma$ ist für ideale Gase mit dem Volumenausdehnungskoeffizienten $\gamma$ in Gl. (6) identisch. Er beträgt theoretisch

$$\gamma = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,15}\ \mathrm{K}^{-1} = 366,1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1} \ . \tag{8}$$

Die idealen Gasgesetze werden nur näherungsweise erfüllt, da die Zustandsänderungen realer Gase oft erheblich vom Verhalten idealer Gase abweichen, insbesondere durch Phasenübergänge (z.B. gasförmig / flüssig). Das ist der Fall, wenn die zwischen den Teilchen wirkenden Wechselwirkungskräfte nicht mehr vernachlässigbar sind, so dass andere Beziehungen Anwendung finden, z.B. die *Zustandsgleichung von van der Waals*:

$$\left( p + \frac{a \cdot n^2}{V^2} \right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T \ . \tag{9}$$

Sie berücksichtigt die auftretende Wechselwirkung zwischen den Gasmolekülen durch einen inneren Druck und das nicht zu vernachlässigende Eigenvolumen der Moleküle. Die van der Waals Konstanten $a$ (Kohäsions- oder Binnendruck) und $b$ (Kovolumen) hängen von der Art des Gases ab und werden experimentell ermittelt. Mit der Gleichung können insbesondere Zustandsänderungen zwischen gasförmiger und flüssiger Phase eines Stoffes erfasst werden. Somit ist zu erwarten, dass der Volumenausdehnungskoeffizient $\gamma$ eines realen Gases von dem Wert in Gl. (8) abweicht.

## 2.4. Volumenausdehnung von Flüssigkeiten

Zur Bestimmung des Volumenausdehnungskoeffizienten einer Flüssigkeit kann man zwei kommunizierende Röhren mit konstanter Querschnittsfläche $A$ nutzen. In den Röhren (Abb. 1) herrscht bei der Ausgangstemperatur $T_0$ ein Gleichgewicht aufgrund der identischen Massen $m$ und hydrostatischen Druckkräfte $F$. Bei unterschiedlicher Erwärmung ($T_2 > T_1 > T_0$ ) ändert sich die Länge $h_0$ jeder Flüssigkeitssäule infolge der Volumenausdehnung um $\Delta h_1$ bzw. $\Delta h_2$, wobei die Massen unverändert bleiben (s. Abb. 2). In der Verbindungsröhre bildet sich ein lineares Temperaturgefälle aus. In dessen Mitte herrscht die Temperatur

$$T_M = \frac{T_1 + T_2}{2} \ , \tag{10}$$

welche auch den Temperaturmittelwert im horizontalen Teil des U-Rohres repräsentiert. In diesem Rohrabschnitt dehnt sich die Flüssigkeit ebenfalls um $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ aus und hebt beide vertikalen Flüssigkeitssäulen an.

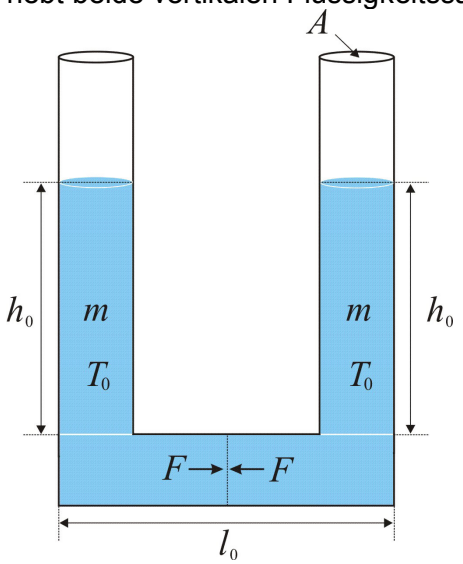


**Abb. 1** Gleichgewicht einer Flüssigkeit in zwei kommunizierenden Röhren.

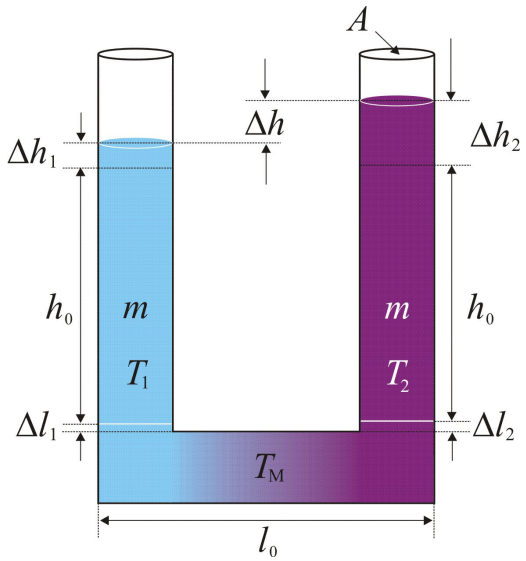


**Abb. 2** Ausdehnung der Flüssigkeitssäulen bei unterschiedlicher Erwärmung.

Unter Verwendung von $V_0 = A \cdot l_0$ bzw. $\Delta V = A \cdot \Delta l$ in Gl. (1) und der Gleichgewichtsbedingung für die hydrostatischen Druckkräfte, gelten für $\Delta l_1$ und $\Delta l_2$ die Beziehungen

1. $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = l_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T_M$ mit $\Delta T_M = T_M - T_0$

2. $\rho(T_1) \cdot \Delta l_1 \cdot g = \rho(T_2) \cdot \Delta l_2 \cdot g$ mit $\rho(T) = \dfrac{m}{V(T)} = \dfrac{m}{A \cdot l_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)}$ (11)

$$\rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{1 + \gamma \cdot \Delta T_1}{1 + \gamma \cdot \Delta T_2} \quad \text{mit} \quad \Delta T_1 = T_1 - T_0 \quad \text{und} \quad \Delta T_2 = T_2 - T_0$$

($g$ - Fallbeschleunigung, $\rho(T)$ - temperaturabhängige Dichte der Flüssigkeit). Als Lösung dieses Gleichungssystems folgt unter Vernachlässigung von quadratischen Termen des sehr kleinen Volumenausdehnungskoeffizienten $\gamma$:

$$\Delta l_1 \approx \Delta l_2 \approx l_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\Delta T_M}{2} \quad \text{wenn} \quad \gamma << 1 \ . \tag{12}$$

Darüber hinaus gilt für die Ausdehnung der vertikalen Flüssigkeitssäulen:

$$\Delta h_1 = h_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T_1 \qquad \text{und} \qquad \Delta h_2 = h_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T_2 \tag{13}$$

Für den Höhenunterschied $\Delta h$ zwischen beiden Pegelständen ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta h_1 - \Delta h_2 + \Delta l_1 - \Delta l_2 \\ &\approx \Delta h_1 - \Delta h_2 = h_0 \cdot \gamma \cdot (\Delta T_2 - \Delta T_1) = h_0 \cdot \gamma \cdot (T_2 - T_1) \, . \end{aligned} \tag{14}$$

Wird Gl. (14) umgestellt, so resultiert mit

$$\gamma \approx \frac{\Delta h}{h_0 \cdot (T_2 - T_1)} \tag{15}$$

eine Bestimmungsgleichung für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten.

## 3. Experiment

### 3.1. Geräte und Materialien

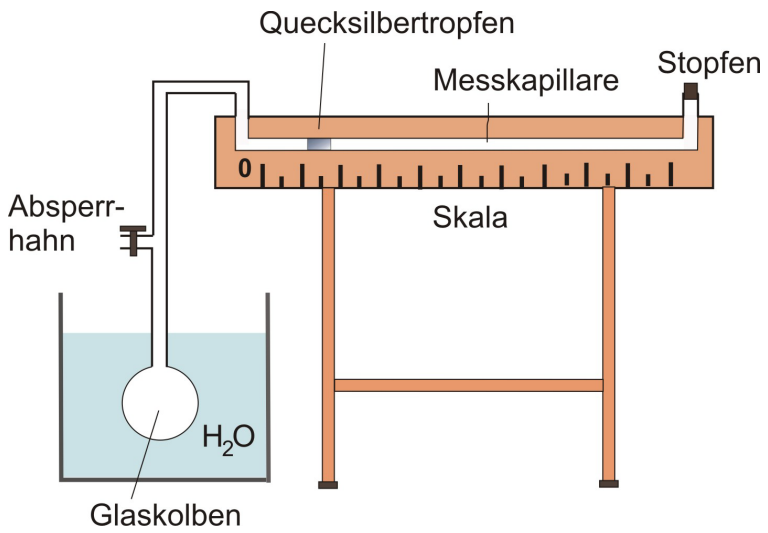


**Abb. 3** Versuchsaufbau zur Bestimmung des Volumenausdehnungskoeffizienten von Luft.

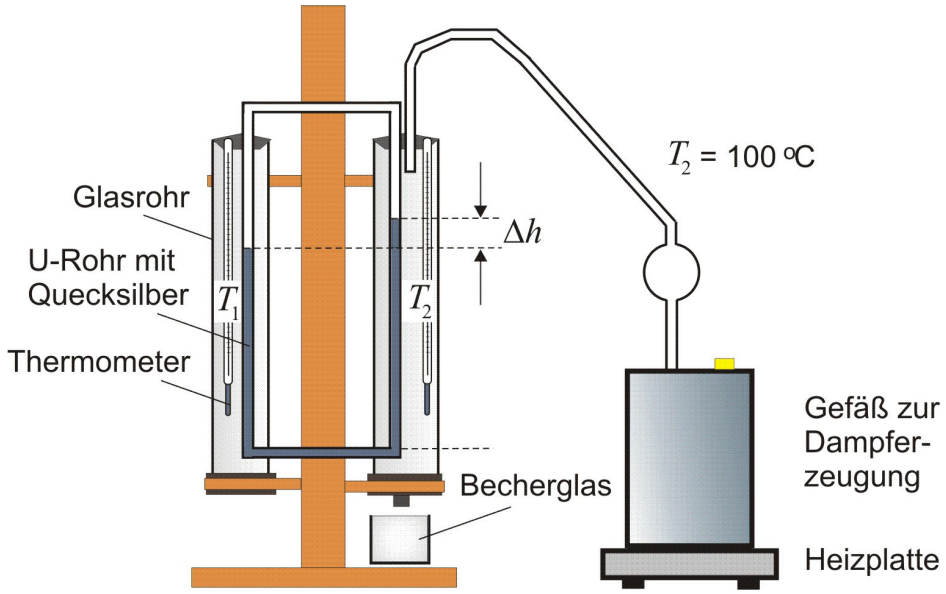


**Abb. 4** Versuchsaufbau zur Bestimmung des Volumenausdehnungskoeffizienten von Quecksilber.

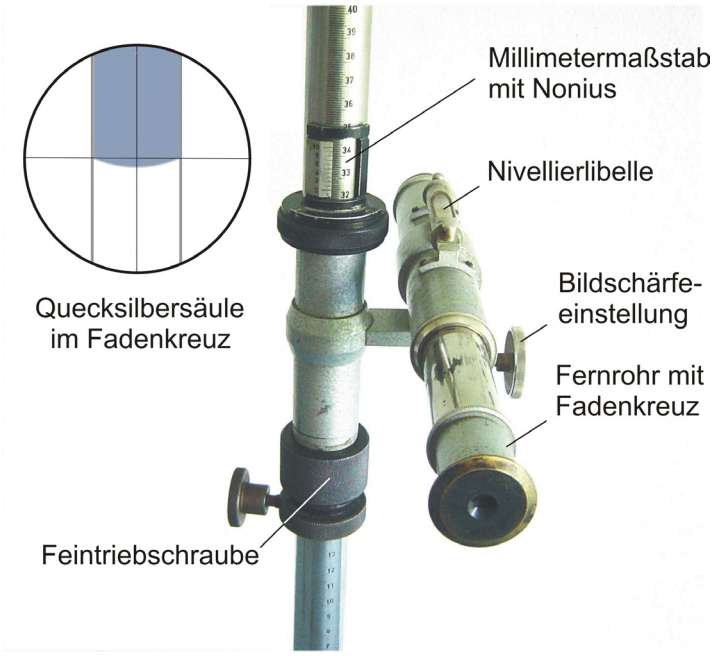


**Abb. 5** Kathetometer zur genauen Messung der Pegelstände der Flüssigkeitssäulen,

Das Kathetometer dient zur Messung von vertikalen Abständen (z.B. Füllstandshöhen). Es besteht aus einer vertikalen Säule, die mit einem Millimetermaßstab versehen ist. Darauf kann ein Schlitten mit einem schwenkbaren Fernrohr, dessen optische Achse horizontal ausgerichtet ist, verschoben werden. Das Fernrohr bildet die Objekte umgekehrt ab, d.h. sie erscheinen „auf dem Kopf“. Wie bei einem Messschieber trägt der Schlitten eine Noniusskala, um Höhenunterschiede auf Millimeterbruchteile ablesen zu können. Mittels einer Triebschraube kann eine vertikale Feineinstellung vorgenommen werden. Im Gesichtsfeld des Fernrohres befindet sich ein Fadenkreuz als Messmarke. Das Kathetometer ist dreipunktgelagert. Seine vertikale Ausrichtung wird vor der Messung mittels dreier Stellfüße vorgenommen und mit einer Libelle kontrolliert.

## 3.2. Hinweise zum Experimentieren und Auswerten

### 3.2.1. Ausdehnung von Luft

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 3 dargestellt. Zur Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten von Luft wird das Gasvolumen in dem Glaskolben, an den die Messkapillare angeschmolzen ist, bei konstantem Druck erwärmt bzw. abgekühlt. Dazu wird das Wasserbad zunächst auf ca. 40°C erwärmt und die Volumenänderung zweckmäßigerweise bei fallender Temperatur gemessen.

Der Glaskolben wird bei geschlossenem Absperrhahn in das warme Wasserbad getaucht. **Es ist auf ein vollständiges Eintauchen zu achten!** Der Gummistopfen am rechten Ende der Kapillare ist während der Messung zu entfernen, damit der Druck konstant bleibt. Der Quecksilbertropfen wird anfangs infolge der Ausdehnung der eingeschlossenen Luft relativ schnell nach rechts gedrückt. Sollte er sich über das Ende der Skalierung hinausbewegen, ist der Hahn kurzzeitig zu öffnen, damit ein Teil der erwärmten Luft entweichen kann.

Die Messung beginnt, wenn sich der Hg-Tropfen bei Abkühlung des Wasserbades nach links verschiebt. Der Abkühlvorgang kann beschleunigt werden, indem man wiederholt kleine Mengen kalten Wassers zugibt und diese gut durchmischt. Durch vorsichtiges Klopfen an der Apparatur wird verhindert, dass der Hg-Tropfen hängen bleibt.

Die Temperatur des Wasserbades $T$, die der Temperatur des eingeschlossenen Gases entspricht, wird mit einem Thermometer gemessen. Die Änderung des Gasvolumens in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt man durch Messung der waagerechten Verschiebung des Quecksilbertropfens in der Kapillare. Der Quecksilbertropfen dient als verschiebbarer Kolben und Anzeigemarke. Befindet er sich im Abstand $l$ von der Nullmarke der Skala entfernt, so beträgt das eingeschlossene Gasvolumen

$$V = V_G + \frac{\pi}{4} \cdot d_M^2 \cdot l \quad . \tag{16}$$

Dabei sind $V_G$ das Volumen des Glaskolbens einschließlich des Anschlussrohres zur Kapillare und $d_M$ der Durchmesser der Messkapillare. Wählt man als Bezugstemperatur die Temperatur beim Start der Messung, so gilt unter Beachtung von Gl. (1) und (16)

$$\begin{aligned} &V(T) = V_{Start} \cdot \left[ 1 + \gamma \cdot (T - T_{Start}) \right] = V_G + \frac{\pi}{4} \cdot d_M^2 \cdot l(T) \\ &\text{mit} \quad V_{Start} = V_G + \frac{\pi}{4} \cdot d_M^2 \cdot l_{Start} \quad . \end{aligned} \tag{17}$$

Nach einfacher Umformung von Gl.(17) folgt für den Abstand des Quecksilbertropfens:

$$l = f(T) = l_{Start} + \gamma \cdot \left( \frac{4 \cdot V_G}{\pi \cdot d_M^2} + l_{Start} \right) \cdot \left( T - T_{Start} \right) = a + b \cdot T \quad . \tag{18}$$

Das bedeutet, dass der gesuchte Volumenausdehnungskoeffizient $\gamma$ aus dem Anstieg $b$ der linearen Funktion $l = f(T)$ ermittelt werden kann (Regressionsgerade). Für $\gamma$ gilt:

$$\gamma = \frac{b}{\left( \frac{4 \cdot V_G}{\pi \cdot d_M^2} + l_{Start} \right)} \tag{19}$$

Durchmesser Messkapillare $d_M = (3{,}8 \pm 0{,}2)\,\text{mm}$

Volumen Glaskolben $V_G = (113 \pm 1)\,\text{cm}^3$

**Die aktuellen Werte für $d_M$ und $V_G$ sind am Arbeitsplatz zu kontrollieren!**

Für die Messunsicherheit $\delta\gamma$ folgt ausgehend von Gl. (18):

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \sqrt{\left( \frac{\partial \gamma}{\partial b} \cdot \delta b \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial l_{Start}} \cdot \delta l_{Start} \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial V_G} \cdot \delta V_G \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial d_M} \cdot \delta d_M \right)^2} \\ &= \frac{\gamma^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \cdot \delta b^2 + \delta l_{Start}^2 + \frac{16}{\pi^2 \cdot d_M^4} \cdot \delta V_G^2 + \frac{64 \cdot V_G^2}{\pi^2 \cdot d_M^6} \cdot \delta d_M^2} \end{aligned} \tag{20}$$

### 3.2.2. Ausdehnung von Quecksilber

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 4 dargestellt. Ein U-Rohr aus Glas ist mit Quecksilber gefüllt. Der linke Schenkel befindet sich in einem mit Luft der Temperatur $T_1$ gefüllten Glasrohr, die nach hinreichender Zeit auch vom Quecksilber in diesem Schenkel angenommen wird. Der rechte Schenkel ist mit einem Rohr ummantelt, durch das Wasserdampf geleitet wird. Wenn lange genug Dampf durch das Rohr strömt, nimmt das Quecksilber im rechten Schenkel des U-Rohres die Temperatur $T_2$ des Dampfes an. Der Wasserdampf wird durch einen beheizten Boiler erzeugt. Zur Bestimmung der Pegelstände beider Quecksilbersäulen steht ein Kathetometer (Abb. 5) zur Verfügung.

Zu Beginn des Versuches ist die Höhe $h_0$ der Quecksilbersäule in Bezug auf die Verbindungsröhre mit einem Lineal zu messen. Danach ist die Heizung in Betrieb zu nehmen und mit ¾ der Maximalleistung (Heizstufe 8) zu betreiben. Ist der Dampf ca. ½ Stunde eingeströmt, so sind danach beide Temperaturen $T_1$ und $T_2$ abzulesen und die Differenz der Pegelstände $\Delta h$ mit dem in Abb. 5 dargestellten Kathetometer zu bestimmen. Aus diesen Werten kann der Volumenausdehnungskoeffizient mittels Gl. (15) berechnet werden.

Zur Ermittlung der Messunsicherheit $\delta\gamma$ des Ausdehnungskoeffizienten ist von Gl. (15) auszugehen. Setzt man voraus, dass die Messunsicherheiten für beide Temperaturen annähernd gleich sind, d.h. $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta T$, so gilt:

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= \sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_0}\cdot\delta h_0\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial(\Delta h)}\cdot\delta(\Delta h)\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial T_1}\cdot\Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial T_2}\cdot\Delta T_2\right)^2} \\ &= \gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{h_0^2}\cdot\delta h_0^2 + \frac{1}{\Delta h^2}\cdot\delta(\Delta h)^2 + \frac{2}{(T_2-T_1)^2}\cdot\delta T^2}\end{aligned} \quad . \qquad (21)$$

## 4. Literatur

Lehrbücher der Experimentalphysik, Kap. Kinetische Gastheorie, Zustandsgleichung, ideales und reales Gas