Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald
Institut für Physik

Versuch M9 - Dehnung und Biegung		
Name:	Mitarbeiter:	
Gruppennummer:	lfd. Nummer:	Datum:

1. Aufgabenstellung

1.1. Versuchsziel

Untersuchen Sie die Dehnung eines Drahtes und die Biegung von Stäben.

Verschaffen Sie sich Kenntnisse zu folgenden Schwerpunkten des Versuches:

- Arten der Formänderungen
- Physikalische Grundlagen der Formänderungen
- HOOKsches Gesetz

1.2. Messungen

1.2.1. Messen Sie die Verlängerung Δl des Drahtes in Abhängigkeit von der aufgelegten Masse (20 verschiedene Belastungen). Dabei müssen $m < 1$ kg und der Umrechnungsmaßstab am Mikroskop 0,067 mm/Skt beachtet werden.

1.2.2. Messen Sie für 3 verschiedene Stäbe die Biegungspfeile y für jeweils 10 verschiedene Belastungen ($m < 1$ kg).

1.2.3. Bestimmen Sie alle übrigen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls erforderlichen Größen (Durchmesser, Länge, Flächenträgheitsmoment).

1.3. Auswertungen

Berechnungen und Auswertungen zur Dehnung

1.3.1. Stellen Sie die Messreihe in einem $\Delta l = f(m)$ -Diagramm dar.

1.3.2. Berechnen Sie die Regressionsgerade und bestimmen Sie aus ihrem Anstieg nach Gl. (6) den Elastizitätsmodul E des Drahtes.

1.3.3. Berechnen Sie aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz Gl. (7) die Messunsicherheit ΔE.

Berechnungen und Auswertungen zur Biegung

1.3.4. Stellen Sie die 3 Messreihen zusammen in einem $y = f(m)$-Diagramm dar.

1.3.5. Aus den Anstiegen der 3 Regressionsgeraden sind die Elastizitätsmoduln E der einzelnen Stäbe nach Gl. (8) zu bestimmen.

1.3.6. Berechnen Sie unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes die entsprechenden Messunsicherheiten ΔE.

1.3.7. Beschaffen Sie sich mit Kenntnis des Stabmaterials Vergleichswerte aus der Literatur.

1.4. Zusatzaufgabe

1.4.1. Welche Kraft ist erforderlich, um einen Messingdraht mit einer Querschnittsfläche von 0,5 mm^2 und einer Länge von 960 mm um 2 mm zu verlängern, wenn der Elastizitätsmodul $E = 8{,}8\ 10^{10}\ Nm^{-2}$ beträgt?

2. Grundlagen

2.1. Elastische Verformungen

Jeder feste Körper wird unter dem Einfluss einer mechanischen Spannung deformiert. Bei hinreichend kleiner Spannung nimmt der Körper nach der Entlastung seine ursprüngliche Gestalt wieder an, d.h. er verhält sich elastisch. Überschreitet die mechanische Spannung jedoch einen bestimmten Wert, so können Fließerscheinungen zu bleibenden Gestalt- oder Volumenänderungen führen. Dann spricht man von unelastischen Verformungen.

Das elastische Verhalten homogener, isotroper Festkörper wird durch vier Materialkenngrößen beschrieben, von denen man nur zwei zu kennen braucht, da zwischen ihnen bestimmte Relationen gelten. Diese vier Kenngrößen sind:

- der Kompressionsmodul K,
- der Torsions- oder Schubmodul G.
- der Elastizitätsmodul E,
- die POISSONsche Zahl μ ,

Bei hinreichend kleinen elastischen Formveränderungen gilt das HOOKEsche Gesetz:

Die Formveränderung ist proportional zur Größe der deformierenden Kraft.

Seine Anwendung auf spezielle Situationen ergibt die nachfolgend beschriebenen Zusammenhänge.

2.2. Dehnung

Wird ein Körper der Länge l mit dem Querschnitt A durch die Zugkraft F_Z belastet, so wird eine Längenänderung Δl beobachtet. Dabei ist die relative Längenänderung $\varepsilon = \Delta l / l$ der Zugspannung $\sigma = F_z / A$ proportional, d.h. es gilt:

$$\frac{F_z}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma = E \cdot \varepsilon \tag{1}$$

(E – Elastizitätsmodul, Maßeinheit $\mathrm{Nm^{-2}}$).

Bei kleiner Belastung ist die relative Längenänderung eines dünnen stabförmigen Körpers der Zugspannung proportional (Abb. 1). Im Intervall $0 < \sigma < \sigma_1$ gilt das Hookesche Gesetz (Gl. (1)). Punkt 1 wird als Proportionalitätsgrenze bezeichnet, hinter der die Dehnung schneller zunimmt, als die Spannung. Auch im Bereich $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ist das Verhalten elastisch, d.h. die Verformungen bilden sich wieder nach einer Entlastung zurück. Im Punkt 2 ist die Elastizitätsgrenze erreicht. Bei weiterer Zunahme der Belastung wird die Probe irreversibel verformt, d.h. der Stab verlängert sich ohne eine wesentliche Vergrößerung der Zugspannung. Hier sind die Stoffe plastisch, und das Spannungs-Dehnungs-Diagramm kann wegen strukturbedingter Fließ- und Verfestigungsprozesse relativ kompliziert aussehen. Die höchste nominelle Spannung (Zugkraft F_z bezogen auf den Anfangsquerschnitt A) wird Zugfestigkeit oder Bruchspannung σ_B genannt. Wird der durch σ_B und ε_B bestimmte Punkt 3 des Diagramms überschritten, zerreißt die Probe. Im oberen plastischen Bereich der Deformation schnüren sich die Zerreißproben an einer Stelle merklich ein. Wird die Zugkraft jeweils auf den tatsächlichen Querschnitt bezogen, steigt die Kurve bis zum Bruch der Probe (gestrichelter Kurvenverlauf).

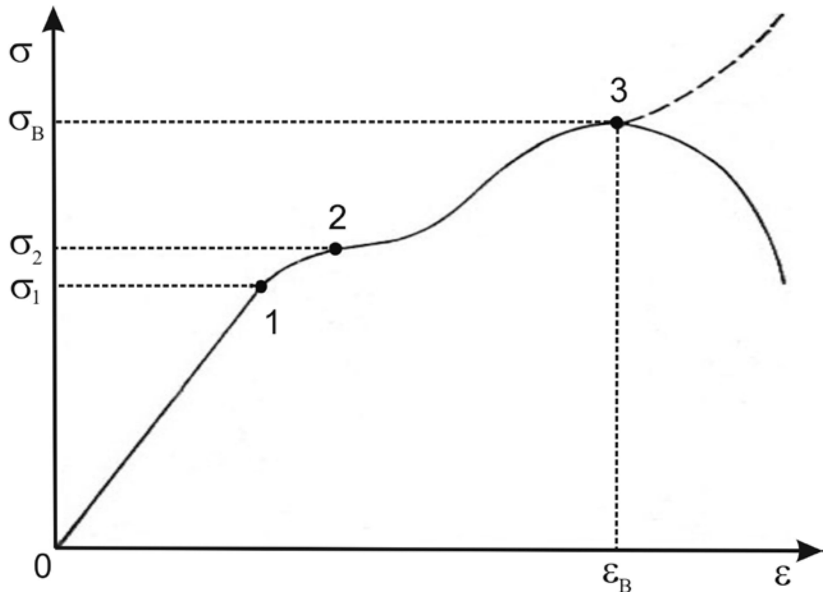


Abb. 1 Spannungs- Dehnungs- Diagramm.

Das Verhältnis der relativen Querkontraktion $\Delta d / d$ (d - Durchmesser des Körpers) und der relativen Längenänderung $\Delta l / l$ definiert die POISSONsche Zahl μ:

$$\mu = \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{\Delta d}{\Delta l} \cdot \frac{l}{d} \quad . \tag{2}$$

2.3. Biegung

Die Biegung ist nur scheinbar eine besondere Form der elastischen Deformation. Tatsächlich bleibt die Mittelebene eines gebogenen Stabes in ihrer Länge unverändert. Diese wird als "neutrale Faser" bezeichnet. Hingegen findet auf der konkaven Seite eine Stauchung und auf der konvexen Seite eine Dehnung statt (Abb. 2).

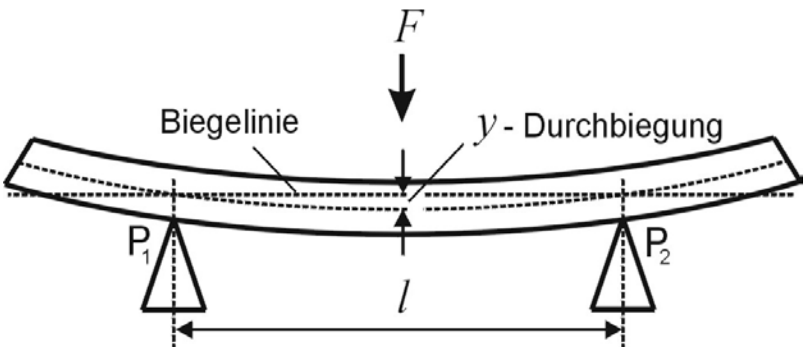


Abb. 2 Schematische Darstellung der Biegung.

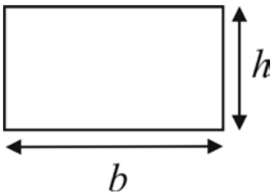
Wird der an den Stellen P_1 und P_2 unterstützte Stab in der Mitte durch eine Kraft F durchgebogen, so gilt für die Durchbiegung y (Biegungspfeil):

$$y = \frac{1}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot J} \tag{3}$$

(l - Länge des Stabes zwischen den Auflagen, J - Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnittes).

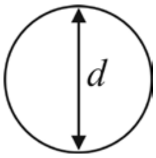
Das Flächenträgheitsmoment J ist eine geometrische Größe und wird durch die Abmessungen und die Form des Stabquerschnittes bestimmt. Für zwei häufig auftretende Querschnittsprofile gelten:

Rechteckprofil



$$J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \tag{4}$$

Rundprofil



$$J = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \tag{5}$$

2.4. Kompression

Wirkt auf die gesamte Oberfläche A eines Körpers vom Volumen V die Kraft F, d.h. ein allseitiger Druck $p = F / A$, so tritt eine Volumenverminderung ΔV auf. In diesem Fall gilt:

$$p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad . \tag{6}$$

Dabei ist K der Kompressionsmodul mit der Maßeinheit Nm^{-2}.

2.5. Scherung

Wirkt auf die Fläche A eines Körpers tangential eine Schubkraft F_S, so erleidet er eine Gestaltänderung, charakterisiert durch den Scherwinkel α (Abb. 3).

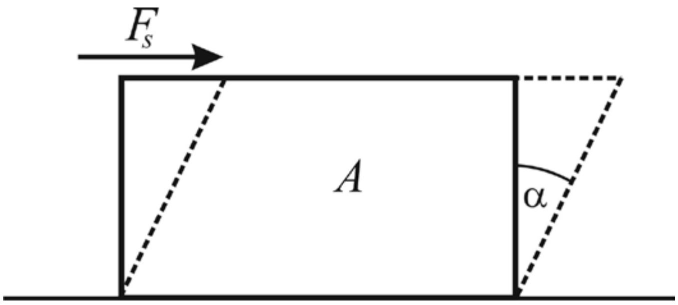


Abb. 3 Zur Erläuterung des Prinzips der Scherung.

Die Schubspannung $\tau = F_s / A$ und der Scherwinkel α sind einander proportional:

$$\tau = G \cdot \alpha \quad . \tag{7}$$

Dabei ist G der Scherungs-, Schub- bzw. Torsionsmodul (Maßeinheit Nm^{-2}). Dieser ist auch für die elastische Verdrehung eines Drahtes (Drillung, Torsion) maßgebend.

3. Experiment

3.1. Geräte und Materialien zur Dehnung

1 - Draht mit Markierung
2 - Mikroskop mit interner Skala
3 - Glasplättchen zur Führung des Drahtes
4 - Schale zum Ablegen der Massenstücke
5 - Stativ mit Halterung des Mikroskops
6 - Mikrometerschraube
7 - Massenstücke

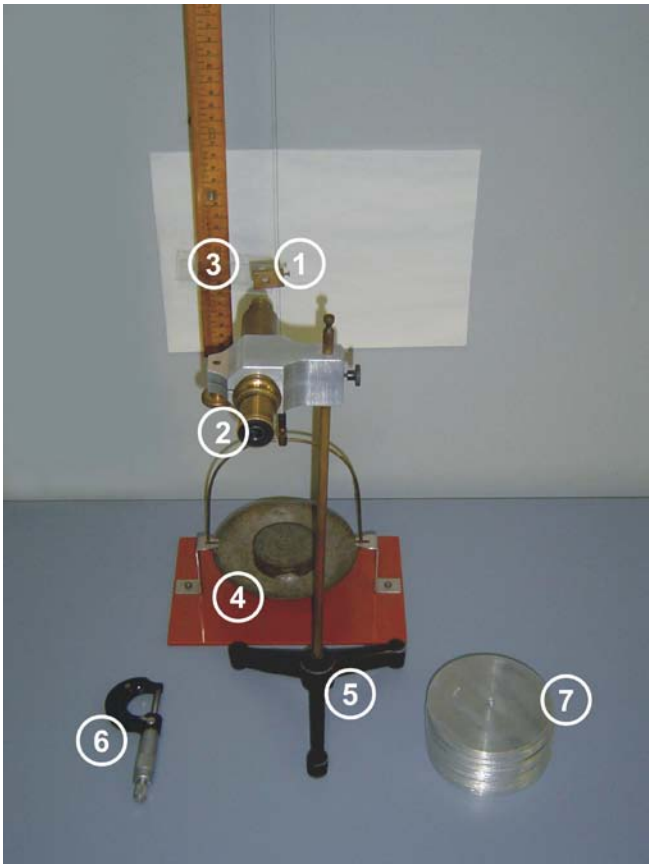


Abb. 4 Versuchszubehör zur Dehnung.

3.2. Geräte und Materialien zur Biegung

1 - Stäbe
2 - Auflage
3 - Schale zum Ablegen der Massenstücke
4 - Stativ mit Halterung für die Messuhr
5 - Messuhr
6 - Schieblehre
7 - Massenstücke zur Belastung der Stäbe

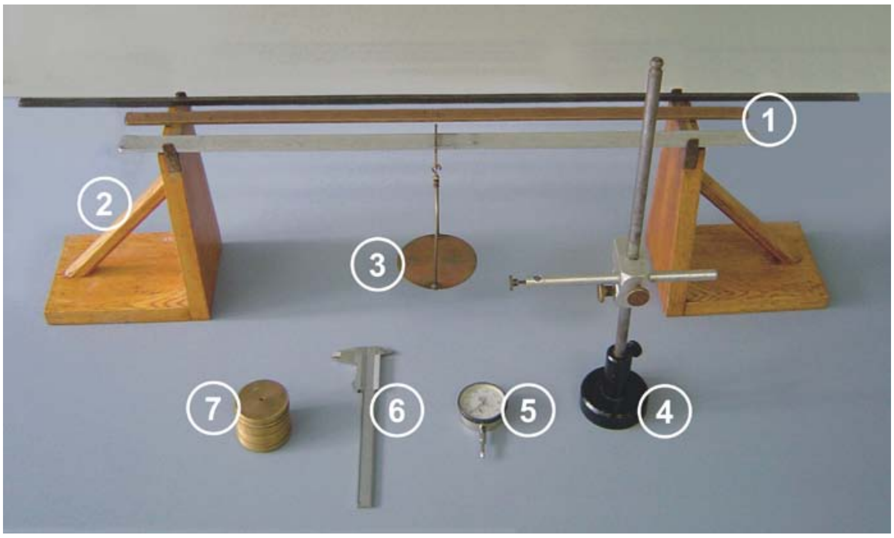


Abb. 5 Versuchszubehör zur Biegung.

3.3. Versuchsanordnung zur Dehnung

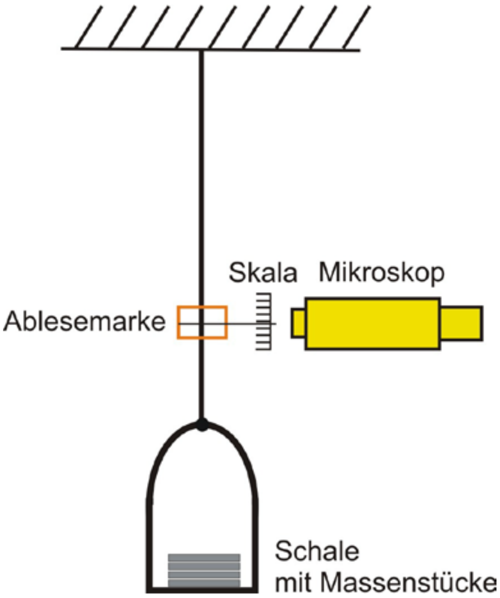


Abb. 6 Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus.

Im ersten Versuchsabschnitt wird ein Draht bis zur Proportionalitätsgrenze belastet, so dass das HOOKEsche Gesetz seine Gültigkeit behält. Der Draht wird unverrückbar aufgehängt und am unteren Ende mit den zur Verfügung stehenden Massen belastet (Abb. 6). Zum Ablesen der geringen Längenänderungen dient ein Mikroskop, mit dem eine am Draht angebrachte Markierung (Ablesemarke) beobachtet und mit der Skala des Mikroskops vermessen wird:

15 Skalenteile $\hat{=}$ 1 mm, d.h. der Skalenwert der benutzten Skalabeträgt 0,067 mm/Skt. .

3.4. Versuchsanordnung zur Biegung

Abb. 7 Versuchsaufbau zur Biegung.

Im zweiten Versuchsabschnitt ist der Biegungspfeil y für die vorliegenden Stäbe in Abhängigkeit von der Belastung F zu messen. Der Biegungspfeil wird an der Messuhr mit einer Ablesegenauigkeit von 0,01 mm abgelesen. Die Messuhr wird dazu in die Halterung eingespannt und unter der Stabmitte unmittelbar neben der Aufhängung der Schale positioniert (Abb. 7).

3.5. Hinweise zum Experimentieren und Auswerten

Die Belastung erfolgt in beiden Experimenten durch Auflegen von Massenstücken ($F = m \cdot g$). Um bei der Dehnung den Elastizitätsmodul E zu bestimmen, ist Gl. (1) sinnvoll umzuformen:

$$\Delta l = \frac{4 \cdot g \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E} \cdot m = C_1 \cdot m \qquad \rightarrow \quad E = \frac{4 \cdot g \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot C_1} \quad . \tag{8}$$

Aus dem Anstieg der Regressionsgeraden $\Delta l = f(m)$ wird zunächst die Konstante C_1 ermittelt. Mit Kenntnis des Drahtdurchmessers d sowie der Drahtlänge l, die vor der Messung bestimmt werden, wird daraufhin E berechnet. Die Längenänderung $\Delta\, l$ entspricht dabei der Differenz der Ablesungen bei unbelasteter Schale und bei aufgelegter Masse.

Zur Bestimmung der Messunsicherheit des Elastizitätsmoduls wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial C_1} \cdot \Delta C_1\right)^2} \quad , \tag{9}$$

wobei für die Messunsicherheit ΔC_1 die aus der Regressionsrechnung resultierende Standardabweichung $s_{\overline{C}1}$ mit ihrem doppelten Wert zu berücksichtigen ist.

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls der Stabmaterialien geht man beim Biegeexperiment nach Gl. (3) ähnlich vor. In diesem Fall gilt

$$y = \frac{l^3 \cdot g}{48 \cdot J \cdot E} \cdot m = C_2 \cdot m \qquad \rightarrow \quad E = \frac{g \cdot l^3}{48 \cdot J \cdot C_2} \quad . \tag{10}$$

Man beachte eine eventuelle Nullpunktverschiebung infolge der Art der Einspannung, sowie die Erschütterungsempfindlichkeit der Anordnung. Zur Minimierung der Ablesefehler empfiehlt es sich, vor jeder Ablesung leicht am Tisch zu klopfen und zu beobachten, wie der Zeiger der Messuhr reagiert.

4. Literatur

Ilberg: Physikalisches Praktikum, Kapitel: Elastische Eigenschaften fester Körper

Walcher: Praktikum der Physik, Kapitel: Elastizität