

**Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald / Institut für Physik**  
**Physikalisches Grundpraktikum**

Praktikum für Physiker		
Versuch <b>M4</b> : Variables $g$ -Pendel		
Name:	Versuchsgruppe:	Datum:
Mitarbeiter der Versuchsgruppe:		Ifd. Versuchs-Nr:

**Aufgabe** Untersuchen Sie die Schwingungen eines mathematischen Pendels bei verschiedenen Neigungen gegenüber der Senkrechten und bei verschiedenen großen Anfangsamplituden.

Physikalische Schwerpunkte des Versuches

- Kinematik und Dynamik des Massepunktes
- Kenngrößen einer mechanischen Schwingung, Schwingungsgleichung
- Kräfte am Pendel

**Versuchsablauf**

**1. Messungen**

- 1.1. Für die Schwingungsebene  $\Psi = 0^\circ$  sind für 10 verschiedene Pendellängen  $l$  ( $3\text{ cm} \leq l \leq 25\text{ cm}$ ) jeweils fünfmal die Schwingungsdauern zu messen.
- 1.2. Für die Pendellänge  $l = 25\text{ cm}$  wird die Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Amplitude  $\alpha_0$  gemessen ( $10^\circ \leq \alpha_0 \leq 70^\circ$ ;  $\Delta\alpha = 10^\circ$ ).
- 1.3. Für  $l = 25\text{ cm}$  ist die Schwingungsdauer zu messen, wenn die Schwingungsebene  $\Psi = 0^\circ$ ;  $15^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $55^\circ$ ;  $65^\circ$ ;  $75^\circ$  beträgt.

**2. Berechnungen**

- 2.1. Berechnen Sie die Mittelwerte und Standardabweichungen der Mittelwerte für die Messungen 1.1 und 1.3. Berechnen Sie den Mittelwert der Schwerebeschleunigung  $g$  für Pendellängen  $l \geq 20\text{ cm}$ .
- 2.2. Berechnen Sie die wirksame Beschleunigung  $g(\Psi)$  und den Quotienten  $g(\Psi)/g(0^\circ)$  für die gewählten Neigungswinkel  $\Psi$ .

**3. Darstellungen**

- 3.1. Zeichnen Sie das  $T(l)$ -Diagramm für die Schwingungsmessung 1.1.
- 3.2. Erklären Sie, warum sich dieses Pendel für  $l < 20\text{ cm}$  nicht wie ein mathematisches Pendel verhält. Wie müsste der Graph verlaufen?
- 3.3. Stellen Sie für die Schwingungsmessung 1.2 den Graph  $\frac{T}{T_0}(\alpha)$  dar.  $T_0$  ist die Schwingungsdauer für kleine Ausschläge gemäß Gl.(3) (s. Anleitung).
- 3.4. Zeichnen Sie das Diagramm  $T(\Psi)$  und das Diagramm  $\frac{g}{g(0^\circ)}(\Psi)$  und tragen Sie in diese Diagramme zusätzlich die Funktionswerte  $\cos(\Psi)$  ein. Vergleichen Sie die Graphen.

# Grundlagen des „variablen g-Pendels“

## Mathematisches Pendel

Ein mathematisches Pendel wird durch einen Massenpunkt realisiert, der an einem gewichtslosen Stab der Länge  $l$  aufgehängt ist. Ein Fadenpendel stellt dafür eine brauchbare Näherung dar. Die auf den Massenpunkt wirkende Schwerkraft  $G$  lässt sich zweckmäßig in zwei Komponenten  $F$  und  $K$  zerlegen.  $F$  spannt den Faden (oder Stab) und ist somit durch dessen Festigkeit für die Bewegung des Pendels bedeutungslos. Bestimmend für die Bewegung des Pendels ist die vom Ausschlag abhängige, tangentielle Kraftkomponente  $K$  in Bahnrichtung. Reibungskräfte seien vernachlässigt.

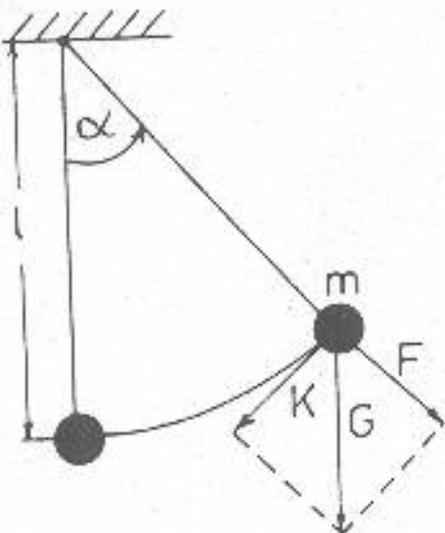


Abb.1 Komponentenzerlegung der Kraft  $G$  am Pendel

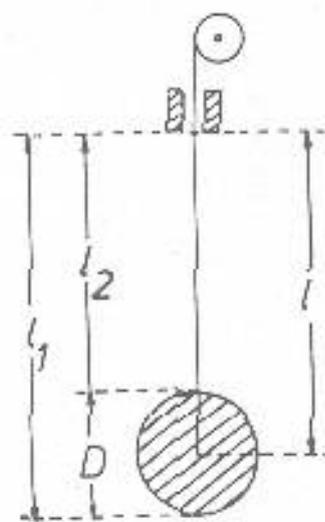


Abb.2 Zur Messung der Pendellänge  $l$  beim Fadenpendel

Die tangential zur Bahnkurve gerichtete Komponente  $K$  beschleunigt den Massenpunkt stets in Richtung der Ruhelage. Bei einer Auslenkung um den Winkel  $\alpha$  aus der Ruhelage gilt für das Fadenpendel gemäß dem Grundgesetz der Mechanik  $M_r = J \ddot{\alpha}$  die Bewegungsgleichung in der Form:

$$- Kl = ml^2 \ddot{\alpha} \text{ bzw. } - mgl \sin \alpha = ml^2 \ddot{\alpha} \quad (1a)$$

Für kleine Ausschläge ( $\alpha < 5^\circ$ ) vereinfacht sich die Bewegungsgleichung durch Linearisierung infolge der Näherung  $\sin \alpha \approx \alpha$  zu:

$$\ddot{\alpha} + (g/l) \alpha = 0 \quad (1b)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung ergibt eine harmonische Schwingung

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) = \alpha_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (2)$$

mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

Hieraus lässt sich die Schwerebeschleunigung  $g$  ermitteln:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l. \quad (4)$$

$T$  und  $l$  lassen sich experimentell leicht ermitteln. Bei Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung des Pendelkörpers und der Masse des Fadens erhält man in besserer Näherung für  $g$  den Ausdruck:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l \left\{ 1 + \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{R}{l}\right)^2 + \left(\frac{\rho_L}{\rho_K}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{m_F}{m_K}\right) \right\} \quad (5)$$

$R$  Radius der Kugel,  $m_K$  Masse der Kugel,  $\rho_K$  Dichte der Kugel,  
 $l$  Pendellänge,  $m_F$  Masse des Fadens,  $\rho_L$  Dichte der Luft.

Als Pendellänge gilt der Abstand Drehpunkt-Kugelmittelpunkt. Man misst die Pendellänge  $l$  gemäß Abb. 2 mit Lineal und Messschieber.

$$l = (l_1 + l_2) / 2 \text{ oder } l = l_2 + D / 2 \quad (6)$$

Bei **manueller** Zeitmessung bestimmen wir die Schwingungsdauer  $T$ , indem wir bei jeder eingestellten Pendellänge  $l_i = 20 \text{ cm}, 30 \text{ cm}, \dots, 100 \text{ cm}$  jeweils fünfmal die Zeit  $t$  für 50 volle Schwingungen messen und daraus  $T$  berechnen:

$$t = (t_1 + \dots + t_5) / 5 \Rightarrow T = t / 50 \quad (7)$$

Mit der Zeitmessung beginne man in einem Umkehrpunkt der Pendelbewegung. Man berechne  $g_i$  nach Gleichung (4) für jede Pendellänge  $l_i$ . Da die Messunsicherheit bei großen Pendellängen kleiner ist als bei kurzen Pendellängen, errechne man das gewichtete Mittel:

$$\bar{g} = (l_1 g_1 + \dots + l_n g_n) / (l_1 + \dots + l_n) \quad (8)$$

Geometrisch überprüft man die Gültigkeit von Gleichung (3), indem man  $T^2$  über  $l$  aufträgt. Theoretisch muss eine Gerade herauskommen, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und die den Anstieg  $(4\pi^2)/g$  hat. Auf diese Weise kann  $g$  graphisch bestimmt werden oder mittels linearer Regression.

Literatur: Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Bd. 1,  
Ilberg, Physikalisches Praktikum, Kap. Pendel,  
Walcher, Praktikum der Physik

## Mathematisches Pendel bei großen Ausschlägen

Für zunehmende Ausschlagswinkel  $\alpha$  ( $\alpha > 5^\circ$ ) ist die Linearisierung der Bewegungsgleichung (1a) nicht mehr zulässig. Leider ist sie dann nicht mehr geschlossen integrierbar. Für die Schwingungsdauer  $T$  bei beliebigen Ausschlägen ergibt sich ein komplizierter Reihenausdruck. In erster Näherung erhält man für die Schwingungsdauer  $T$  den experimentell zu überprüfenden Ausdruck:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \hat{\alpha}_0^2 \right), \text{ bzw. } \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{16} \hat{\alpha}_0^2 \quad (9)$$

Dabei ist der Ausschlagswinkel im Bogenmaß  $\hat{\alpha}_0$  einzusetzen:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\pi}{180} \alpha_0^\circ = 0,01745 \alpha_0^\circ$$

$T_0$  ist die Schwingungsdauer für kleine Ausschläge gemäß Gl. (3). Die Überprüfung der Gl. (9) erfordert experimentelles Geschick, da  $T$  recht genau bestimmt werden muss, aber andererseits wegen der unvermeidbaren Dämpfung der Schwingungen besonders bei großen Ausschlägen kaum mehr als 5 aufeinander folgende Schwingungen zur Bestimmung von  $T$  herangezogen werden können. Für jeden Ausschlag ( $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ) sind deshalb die Messungen mehrmals zu wiederholen!

Für die graphische Darstellung ist zweckmäßig das Verhältnis  $T/T_0$  über  $\alpha_0^\circ$  bzw.  $(\alpha_0^\circ)^2$  aufzutragen.

## Variables g-Pendel

Das im Versuchsteil c) benutzte Gerät heißt "Variables g-Pendel", weil durch die Neigung der Schwingungsebene gegen die Vertikale nur ein Bruchteil der Erdbeschleunigung für den Bewegungsablauf wirksam wird. Der gewünschte Neigungswinkel kann im Bereich  $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$  definiert eingestellt werden. Man kann zeigen, dass und wie sich eine verminderte Beschleunigung auf die Bewegung des Pendels auswirkt (in Analogie zur *(reibungsfreien) beschleunigten Bewegung* auf einer schiefen Ebene). Da sich die Anordnung trotz der robusten Bauart (massiver leichter Stab zur Halterung des Pendelkörpers) in guter Näherung wie ein mathematisches Pendel verhält, gilt anstelle der bekannten Beziehung (3) für die Schwingungsdauer  $T$  die allgemeinere Beziehung:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \psi}} \quad (10)$$

Eine wesentliche messtechnische Erleichterung und eine Erhöhung der Messgenauigkeit werden erreicht durch Ersatz einer manuell zu betätigenden Stoppuhr durch ein elektronisches Zeitmessgerät in Verbindung mit einer Gabellichtschranke.

## Handhabung im Experiment

Das in den Dreifuß eingespannte Pendel wird bei einem Neigungswinkel  $\psi = 0^\circ$  auf seiner Stativstange möglichst weit nach unten geschoben, um größtmögliche Stabilität zu erreichen. Mit Hilfe der Nivellierringe des Dreifußes muss das Pendel sorgfältig justiert werden, um sicherzustellen, dass die an der Winkelskala abgelesenen Werte  $\psi$  mit der Neigung der Schwingungsebene gegen die Vertikale übereinstimmen. Nach erfolgter Justierung sollte das Pendel auf dem Tisch nicht mehr verschoben und der Tisch keinen Belastungsänderungen ausgesetzt werden!

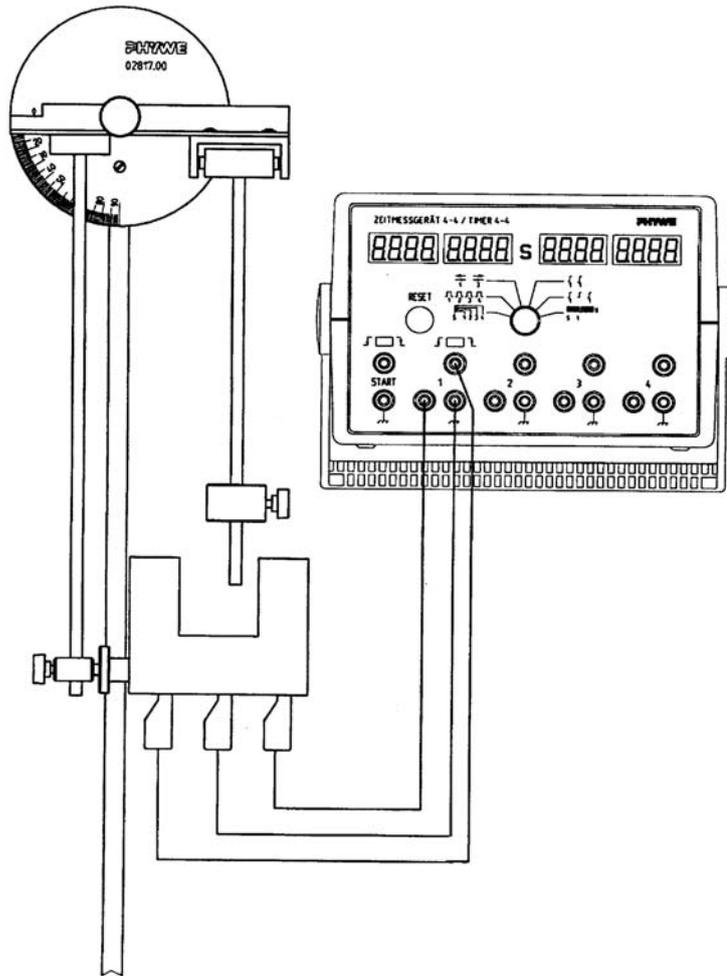
Vorgehensweise beim Justieren:

- Ein Schenkel des Dreifußes soll in Richtung der Ruhelage des Pendels zeigen und der dort befindliche Fuß mit dem zugehörigen Nivellierring so kurz wie möglich eingestellt sein. Die beiden anderen Stellfüße sollen sich etwa in der Mitte des Einstellbereiches befinden.
- Rändelmutter in der Mitte der Winkelskala lösen, Pendelstange nach oben schwenken und bei  $\psi = 90^\circ$  durch Anziehen der Rändelmutter fixieren.
- Mit Hilfe der beiden vom Pendel abgewandten Nivellierringe am Dreifuß die Ruhelage des Pendels in die Mitte des Schwingungsbereiches bringen.
- Den dritten Fuß nunmehr langsam herausschrauben, wodurch das Pendel immer langsamer schwingt; wenn die Ruhelage dadurch auswandert, so ist dies durch Verstellen der beiden anderen Füße zu kompensieren.
- Der Justiervorgang ist beendet, sobald das Pendel nahezu in jeder Position in Ruhe bleibt.

Beim Neigungswinkel  $\psi = 0^\circ$  kann das Pendel wie ein gewöhnliches mathematisches oder ein physikalisches Pendel benutzt werden. Die Pendellänge  $l$  ist durch Verschieben des auf der Pendelstange mittels Klemmschraube befestigten zylindrischen Pendelkörpers variierbar ( $0,02 \text{ m} \leq l \leq 0,25 \text{ m}$ ). Es zeigt sich, dass das Gerät nur für große Abstände Drehachse - Laufgewicht ( $l > 0,20 \text{ m}$ ) näherungsweise als mathematisches Pendel aufgefasst werden kann und brauchbare Werte für  $g$  liefert, wenn die Messdaten nach Gl. (4) ausgewertet werden.

Bei Verwendung der Gabellichtschranke in Verbindung mit dem elektronischen Zeitmessgerät dient das untere Ende des Pendelstabes zur Unterbrechung des Lichtstrahles (im infraroten Bereich). Die Gabellichtschranke wird mit einer Spannung von +5 V (rote Buchse) aus dem Zeitmessgerät betrieben (unteres Buchsenpaar 1, **Polarität beachten!**).

Für die Messung der Schwingungsdauer  $T$  des Pendels muss der Betriebsartenwahlschalter auf der zweiten Position von rechts stehen. Der elektrische Ausgangsimpuls der Lichtschranke (gelbe Buchse) wird dem Eingang 1 (gelbe Buchse) des Zeitmessgerätes zugeführt. Zur Triggerung (Start der Zeitmessung, Stopp der Zeitmessung) des Gerätes verwende man die abfallende Flanke des Impulses ( $\rightarrow$  Schiebeschalter über Messkanal-Eingang 1 auf Rechtsstellung). Das bedeutet die Messung der Zeit zwischen erstem und drittem Durchgang des Pendels durch den Lichtstrahl. Die Zeit entspricht der Schwingungsdauer  $T$ . Durch Betätigung einer Reset-Taste am Zeitmessgerät kann die Anzeige auf Null gesetzt werden, um eine neue Messung durchzuführen. Der Geräteschalter befindet sich an der Rückseite des Zeitmessgerätes über dem Netzspannungseingang.



**Abb. 3** Versuchsaufbau "Variables g-Pendel" mit elektronischer Zeitmessung