

Versuch M03: Rollende Kugel

Fassung für Studierende der Medizin vom 27. Januar 2025

Name:

Datum:

• **Versuchsziel**

Bestimmung der Bahnbeschleunigung und Reibungszahl einer rollenden Kugel. Veranschaulichung von vektoriellen Größen, Energieerhaltung und statistischen Grundlagen.

• **Themen zur Vorbereitung**

Schwerpunkt eines starren Körpers; Kräfte an einer Kugel auf geneigter Ebene im Schwerfeld der Erde; Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung; Analogie physikalischer Größen bei Translation und Rotation; Energieerhaltung; Reibungsformen (Haft-, Gleit- und Rollreibung); absolute und relative Messunsicherheiten; Mittelwert, Standardabweichung sowie Standardabweichung des Mittelwertes; Gaußsche Glockenkurve

• **Messaufgaben**

Messen sie die Rollzeiten t_{mn} einer Kugel auf einer geneigten Ebene (Winkelschiene) für verschiedene Rollwege s_m und Neigungswinkel γ_n . Wählen sie dazu die folgenden Werte:

m	1	2	3	4
s_m / m	1,0	0,8	0,6	0,4

n	1	2	3	4	5
$h_{\text{Klotz}} / \text{mm}$	20	30	40	60	80
γ_n / rad	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08

Messen sie die Rollzeiten für eine jede der 20 Kombinationen der Werte des Rollweges und des Neigungswinkels der Schiene.

Hinweise:

(i) Überzeugen Sie sich, dass die Tischplatte waagrecht ist und korrigieren Sie gegebenenfalls den Neigungswinkel. Er ergibt sich nach (20) aus der Höhe des Klotzes, h_{Klotz} , und der Länge der Schiene, l_{Schiene} , siehe Abb. 4 auf S. 4.

(ii) Berücksichtigen Sie den Einfluss der Kugel auf die Einstellung des Rollweges s . Wie groß ist der absolute bzw. relative Fehler bei Nichtbeachtung?

(iii) Nutzen sie geeignete Messwerttabellen für eine übersichtliche Darstellung der Daten.

• **Sicherheitshinweise**

Keine besonderen Gefahren.

- **Auswertung**

1. Überzeugen sie sich zunächst, dass die Verwendung der Lichtschranke zur Zeitmessung genauer ist als die Verwendung einer Stoppuhr. Vergleichen sie dazu für eine einzelne Messreihe (s_m, γ_n) ihrer Wahl die händische Messung der Laufzeit unter Verwendung einer Stoppuhr mit der Messung unter Verwendung der Lichtschranke (je 6 Messungen, Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung). Diskutieren Sie die Fehlerquellen für beide Messprinzipien. Für die übrigen Messreihen ist die Verwendung von einem mit der Lichtschranke gemessenen Datensatz ausreichend. Informationen zur Fehlerberechnung finden Sie im Zusatzdokument [M03-Zusatz-Grundlagen-der-Messfehlerbehandlung.pdf](#).
2. Ermitteln sie mittels linearer Regression für jeden Neigungswinkel γ_n , $n = 1, 2, \dots, 5$, die Translationsbeschleunigungen a_n . Folgen sie dabei den Hinweisen unter Abschnitt 2.1, S.3.
3. Bestimmen sie auf der Grundlage der Gln. (18) und (19), S. 4, die Erdbeschleunigung g und die Rollreibungszahl μ (Messabweichungen angeben). Folgen sie dabei den Hinweisen unter Abschnitt 2.2, S.3. Für die Beschleunigungen a_n sind die Werte aus der linearen Regression der vorherigen Aufgabe zu verwenden.
4. Diskutieren Sie, welche Reibungsart vorliegt und ob die Ergebnisse realistisch sind. Beachten sie dazu, dass die Gleitreibungszahl zwischen ebenen Stahl- und Aluminiumflächen etwa 0,5 beträgt. Für die Rollreibungszahl einer Kugel mit dem Radius $R = 10$ mm auf einer Ebene aus Aluminium gilt $\mu \approx 0,0003$.

1 Grundlagen

1.1 Kräfte an rollender Kugel

Befindet sich eine Kugel der Masse m im Schwerfeld der Erde mit der Erdbeschleunigung g , so wirkt auf die Kugel die Gewichtskraft $F_G = mg$. Sie greift im Schwerpunkt der Kugel an und zeigt zum Erdmittelpunkt.

Befindet sich die Kugel auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel γ gegenüber der Horizontalen, so wirkt in Richtung der Flächennormalen eine Kraft F_N , deren Betrag durch

$$F_N = F_G \cos \gamma = mg \cos \gamma \quad (1)$$

gegeben ist, Abb. 1. Senkrecht zur Normalkraft greift im Schwerpunkt der Kugel die Hangabtriebskraft $F_H = F_G - F_N$ an. Sie hat den Betrag

$$F_H = F_G \sin \gamma = mg \sin \gamma \quad (2)$$

Nur F_H bewirkt eine Beschleunigung der Kugel auf der Ebene. Die Normalkraft F_N wird durch sogenannte *Zwangskräfte* F_Z der Unterlage (das Ebenenmaterial) kompensiert, $F_N = -F_Z$.

Während des Abrollens verformt die Normalkraft geringfügig die Materialien, also die Kugel wie auch die Unterlage, wofür Arbeit geleistet werden muss. Der Kugel wird dadurch (mechanische) Energie entzogen, sie findet sich in Form von Wärmeenergie in den Materialien wieder.¹⁾ Man nennt dies *Rollreibung*, welche durch eine Reibungskraft beschrieben

¹⁾Man spricht hier zuweilen vom *Energieverlust*, was irreführend ist, denn Energie kann nur umgeformt werden, hier von der mechanischen Energie der gerichteten makroskopischen Bewegung der Kugel in die Energie der ungerichteten Bewegungen der mikroskopischen Bestandteile der Materialien.

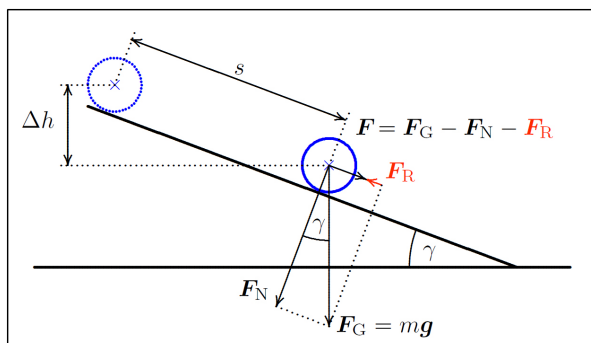


Abb. 1: Kräfte an einer Kugel auf der schiefen Ebene.

wird, die der Hangabtriebskraft entgegen gerichtet ist. Zur quantitativen Erfassung macht man für ihren Betrag den empirischen Ansatz

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot mg \cos \gamma \quad (3)$$

Darin bezeichnet μ die *Rollreibungszahl* einer Kugel auf einer ebenen Fläche. Sie ist von den Materialien der Ebene und der Kugel, deren Oberflächenrauheit sowie vom Kugelradius abhängig.²⁾ Die gesamte Kraft, welche die Kugel in Richtung der Hangabtriebskraft F_H beschleunigt, ist somit,

$$F = F_G - F_N - F_R \quad .$$

1.2 Energieerhaltung

Die Kugel habe in der Ausgangslage keine kinetische Energie bez. eines Bezugssystems, in welchem die schiefe Ebene ruht. Folglich ist ihre Translations- und Rotationsgeschwindigkeit in der Ausgangslage null. Hat sie nun auf der schiefen Ebene die Wegstrecke $s > 0$ zurückgelegt, dann befindet sie sich um den Höhenunterschied Δh weiter unten (dichter am Erdmittelpunkt). Dabei hat sie die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mg \cdot \Delta h = mg \cdot s \sin \gamma \quad (4)$$

verloren, Abb. 1. Diese Energie wurde umgewandelt in die folgenden drei anderen Energieformen.

1. Translationsenergie: Sie ergibt sich aus der Kugelmasse m und der Translationsgeschwindigkeit $v(s)$ nach dem Zurücklegen der Wegstrecke s ,

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad . \quad (5)$$

2. Rotationsenergie: Sie ergibt sich aus,

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad . \quad (6)$$

Darin bezeichnen R den Radius der Kugel und J ihr Trägheitsmoment bez. einer Drehachse durch den Mittelpunkt (s. Anhang S. 5 f.),

$$J = \frac{2}{5} m R^2 \quad . \quad (7)$$

²⁾An der bewegten Kugel greifen noch andere Reibungskräfte an, etwa durch Wechselwirkung mit der Umgebungsluft. Diese Kräfte sind von der Bahn- und Rotationsgeschwindigkeit der Kugel abhängig. Sie werden häufig als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt. Hier werden sie jedoch als vergleichsweise gering angesehen und deshalb nicht weiter betrachtet.

Weiterhin ist $\omega(s)$ die Kreisfrequenz der Kugeldrehung bei zurückgelegter Wegstrecke s .

3. Reibungsenergie: Sie ergibt sich aus,

$$E_{\text{reib}} = F_R \cdot s \quad (8)$$

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt,

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{reib}} \quad (9)$$

1.3 Abrollen in einer Führungsschiene

Abrollradius und Kreisfrequenz: Im Experiment wird die Kugel beim Abrollen durch eine Winkelschiene geführt, deren Schenkel im Winkel β zueinander stehen, Abb. 2. Eine einfache geometrische Überlegung liefert den Abrollradius $r = R \sin(\beta/2)$ für die beiden Abrollkreise auf der Kugeloberfläche. Die Bahngeschwindigkeit auf einem Abrollkreis ist offenbar gleich der Translationsgeschwindigkeit v der Kugel. Folglich gilt für die Kreisfrequenz $\omega = v/r$ der rotierenden Kugel,

$$\omega = \frac{v}{R \sin(\beta/2)} \quad (10)$$

Für den Spreizwinkel $\beta = 90^\circ$ erhält man $\omega = \sqrt{2}v/R$. Im Grenzfall $\beta \rightarrow 180^\circ$ fallen beide Abrollkreise zusammen, und es gilt $\omega = v/R$ (Abrollen auf einer Ebene). Bei fester Bahngeschwindigkeit v wird die Kreisfrequenz für $\beta \rightarrow 0$ immer größer.

Reibungskraft: Sei die Winkelschiene zunächst nicht geneigt, $\gamma = 0$. Dann kompensieren die Zwangskräfte, welche die beiden Schenkel der Winkelschiene in Richtung der jeweiligen Flächennormalen auf die Kugel ausüben, die Gewichtskraft F_G (Abb. 2),

$$F_{Z,l} + F_{Z,r} = -F_G \quad .$$

Für die Beträge dieser Zwangskräfte findet man durch eine einfache geometrische Betrachtung,

$$F_{Z,l} = F_{Z,r} = \frac{F_G/2}{\sin(\beta/2)} = \frac{mg}{2 \sin(\beta/2)} \quad .$$

Für $\beta = 180^\circ$ würde die Winkelschiene zur Ebene entarten und der Beitrag dieser Zwangskräfte wäre $F_{Z,l} + F_{Z,r} = mg$. Hingegen würde für kleine Spreizwinkel β die Wirkung dieser Zwangskräfte auf die Rollreibung

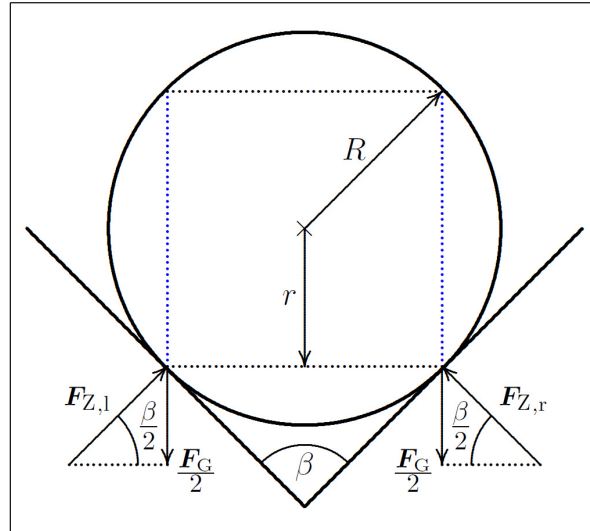


Abb. 2: Abrollkreise mit dem Radius r auf der Kugeloberfläche (blau gepunktet) in einer Führungsschiene mit dem Spreizwinkel $\beta = 90^\circ$. Die beidseitigen Zwangskräfte $F_{Z,l}$ und $F_{Z,r}$ übt das Material der Winkelschiene auf die Kugel aus.

sehr groß werden.³⁾ Der Betrag der Rollreibungskraft wird nun wiederum proportional zur Summe der Beträge dieser Zwangskräfte angesetzt,

$$F_R = \mu \cdot (F_{Z,l} + F_{Z,r}) \quad .$$

Bei einer um γ geneigten Winkelschiene wird durch die Zwangskräfte nur der Bruchteil $\cos \gamma$ der Gewichtskraft kompensiert. Folglich erhält man für die Reibungskraft,

$$F_R = \mu \cdot mg \frac{\cos \gamma}{\sin(\beta/2)} \quad (11)$$

Die Reibung verschwindet also bei einer senkrechten Winkelschiene, $\gamma = 90^\circ$, und für $\gamma = 0$ ist sie maximal. Für Neigungswinkel $\gamma < 90^\circ$ wächst die Reibungskraft für kleinere Spreizwinkel β und wird letztlich für $\beta \rightarrow 0$ sehr groß.

Energie: Ersetzt man in (6) das Trägheitsmoment nach (7) und die Kreisfrequenz nach (10), so kann für die beiden Bewegungsenergien wie folgt geschrieben werden,

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2 \sin^2(\beta/2)}$$

³⁾Für kleine Spreizwinkel der Winkelschiene würde die Kugel eher gleiten (rutschen) als rollen und somit die Gleitreibung wesentlich werden. Praktisch würde die Kugel für noch kleinere Spreizwinkel sogar festklemmen.

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5 \sin^2(\beta/2)} \right) m \cdot v^2 .$$

Für die Energiebilanz (9) folgt somit unter Beachtung von (4), (8) und (11),

$$mgs \sin \gamma = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5 \sin^2(\beta/2)} \right) m \cdot v^2 + \mu mg \frac{\cos \gamma}{\sin(\beta/2)} \cdot s . \quad (12)$$

Für kleine Neigungswinkel, $\gamma \lesssim 6^\circ$, kann $\cos \gamma \approx 1$ und $\sin \gamma \approx \gamma/\text{rad}$ genähert werden. Mit dem Spreizwinkel $\beta = 90^\circ$ folgt $\sin(\beta/2) = 1/\sqrt{2}$. Damit kann (12) wie folgt umgeschrieben werden,

$$\gamma g = \frac{9v^2}{10s} + \sqrt{2} \mu g \quad (13)$$

Die beschriebenen Kräfte verursachen eine konstante Translationsbeschleunigung $a = d^2s(t)/dt^2$. Dies ist eine Bewegungsgleichung. Startet die Kugel aus der Ruhelage und wird die zurückgelegte Strecke s aus der Ruhelage vermessen, gelten also zur Anfangszeit $v(t=0) = 0$ bzw. $s(t=0) = 0$, so folgt durch Integration der Bewegungsgleichung $v(t) = ds(t)/dt = at$. Eine weitere Integration liefert das Weggesetz,

$$s(t) = \frac{a}{2} t^2 \quad (14)$$

Setzt man hierin $t = v/a$, so erhält man $v^2/s = 2a$. Damit lässt sich (13) wie folgt umschreiben,

$$a = -\frac{5\sqrt{2}}{9} \cdot g \cdot \mu + \frac{5}{9} \cdot g \cdot \gamma \quad (15)$$

Der Neigungswinkel γ ist hier im Bogenmaß einzusetzen und es muss gelten, $0 \leq \gamma \lesssim 0,1 \text{rad} \approx 6^\circ$.

2 Messprinzip und Auswertung

2.1 Translationsbeschleunigung

Die Translationsbeschleunigung a ändert sich mit dem Neigungswinkel γ . Man kann nun für einen bestimmten Neigungswinkel γ die zugehörige Beschleunigung

$a(\gamma)$ aus dem Weggesetz (14) für ein Messpaar (s_m, t_{mn}) berechnen,

$$a_{mn} = \frac{2s_m}{t_{mn}^2} . \quad (16)$$

Nach den obigen Ausführungen hängt die Beschleunigung nur vom Neigungswinkel ab, was auf den Ansatz (3) für die Reibungskraft zurückgeht. Folglich erwartet man, dass bei festem n die Werte a_{mn} für alle Wegstecken s_m annähernd gleich sind,

$$a_{1n} \approx a_{2n} \approx \dots \approx a_{Mn} . \quad (17)$$

Findet man jedoch signifikante Unterschiede zwischen diesen Werten, so kann dies darauf zurückgeführt werden, dass die Reibungskräfte von der Bahn- und Rotationsgeschwindigkeit abhängen.

Alternativ kann man nach t_{mn} auflösen,

$$t_{mn} = \frac{1}{\sqrt{a_{mn}}} \cdot \sqrt{2s_m} .$$

Trägt man nun $y_{mn} \equiv t_{mn}$ über $x_m \equiv \sqrt{2s_m}$ für alle $m = 1, \dots, M$ (n fest) auf, so liegen diese Punkte näherungsweise auf einer Geraden,

$$y_{mn} = A_n + B_n \cdot x_m .$$

Aus deren Anstieg kann die Beschleunigung geschätzt werden,

$$a_n = B_n^{-2} .$$

Dies setzt jedoch die Gültigkeit von (17) voraus. Findet man nun für das absolute Glied A_n einen Wert, der signifikant größer als Null ist, so kann dieser als Zeitspanne interpretiert werden, mit der die Kugel infolge der Haftreibung verzögert anläuft. Diese Interpretation setzt jedoch voraus, dass systematische Fehler bei der Zeitmessung vernachlässigbar sind. Ein signifikant negativer Wert weist auf eine systematische Messabweichung infolge der händischen Zeitmessung hin.

2.2 Erdbeschleunigung und Reibungskoeffizient

Bestimmt man die Translationsbeschleunigung a_n für verschiedene Neigungswinkel γ_n , so kann man für die Wertepaare $\{(x_n, y_n)\}$, mit $x_n = \gamma_n$ und $y_n = a_n$ eine lineare Regression durchführen. Dann ist nach Gl.(15) der Anstieg B der Regressionsgeraden $y =$

$A + Bx$ eine Schätzung für $5g/9$, woraus man die Erdbeschleunigung erhält,

$$g = \frac{9}{5} B . \quad (18)$$

Das absolute Glied A schätzt nach Gl.(15) den Term $-5\sqrt{2}g\mu/9$. Folglich erhält man die Rollreibungszahl aus,

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{9A}{5g} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{A}{B} . \quad (19)$$

3 Versuchsaufbau

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 3 dargestellt. Mit dem verschiebbaren Anschlag werden die Abrollwege eingestellt. Zur Einstellung der Neigungswinkel γ dienen Unterlegklötze.

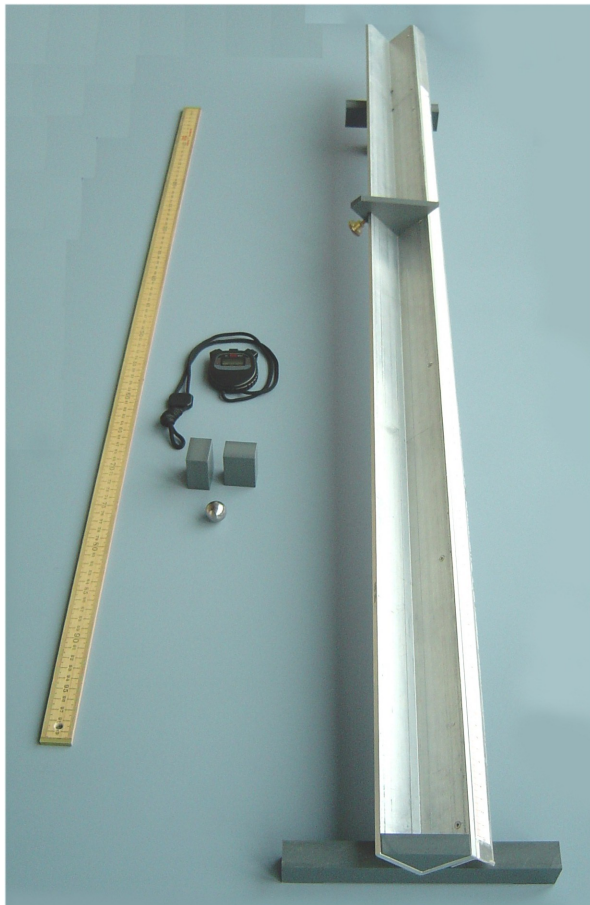


Abb. 3: Gesamtansicht der Versuchsanordnung: Winkelschiene mit verschiebbarem Anschlag (rechts), Kugel, Unterlegklötze und Stoppuhr (Mitte) sowie Messstab (links)

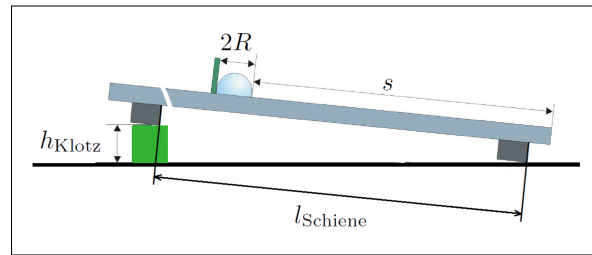


Abb. 4: Anordnung der Winkelschiene mit Unterlegklotz und Kugel zur Messung der Rollstrecke s . Der Neigungswinkel γ folgt nach (20) aus der Wegstrecke l_{Schiene} und der Klotzhöhe h_{Klotz} .

4 Hinweise

4.1 Neigungswinkel

Der Neigungswinkel γ ergibt sich nach Abb. 4 aus

$$\frac{\gamma}{\text{rad}} = \arcsin \frac{h_{\text{Klotz}}}{l_{\text{Schiene}}} \approx \frac{h_{\text{Klotz}}}{l_{\text{Schiene}}} . \quad (20)$$

Die Näherung ist hinreichend genau für die hier einzustellenden Neigungswinkel $\gamma \lesssim 6^\circ \approx 0,1\text{rad}$.

Die maximalen Messabweichungen von h_{Klotz} und l_{Schiene} seien Δh_{Klotz} bzw. $\Delta l_{\text{Schiene}}$. Diese Abweichungen pflanzen sich auf γ wie folgt fort,

$$\frac{\Delta\gamma}{\text{rad}} = \frac{h_{\text{Klotz}} + \Delta h_{\text{Klotz}}}{l_{\text{Schiene}} - \Delta l_{\text{Schiene}}} - \frac{\gamma}{\text{rad}} . \quad (21)$$

Die Einstellung der Rollwege s verlangt besondere Sorgfalt. Es wird empfohlen, zunächst einen Rollweg s_m einzustellen und dann nacheinander die Rollzeiten für die verschiedenen Neigungswinkel γ zu messen. All dies wird dann für den nächsten Rollweg wiederholt usw.

4.2 Zeitmessung

Die Zeitmessung wird im Allgemeinen genauer, wenn die Bedienung der Stoppuhr und das Loslassen der Kugel von einer Person ausgeführt werden.

A Anhang

A.1 Trägheitsmoment einer Kugel

Die Kugel (Radius R , konstante Massedichte ρ) dreht sich beim Abrollen auf der Winkelschiene um eine ihrer Mittelpunktsachsen. Zur Berechnung ihres Trägheitsmoments J bez. einer dieser Achsen denkt man sich die Kugel zerlegt in Hohlzylinder (Rohrstücke) mit dem Radius r , $0 \leq r \leq R$, und der infinitesimalen Wandstärke dr , die konzentrisch zur Drehachse liegen, Abb. 5. Die entsprechende Zylinderhöhe ist dann $H = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Der Hohlzylinder hat die Oberfläche $2\pi r \cdot H$ und folglich das (infinitesimale) Masselement

$$\begin{aligned} dm &= \rho \cdot 2\pi r \cdot H dr \\ &= \rho \cdot 4\pi \cdot r \sqrt{R^2 - r^2} dr . \end{aligned}$$

Dieses liefert zum gesamten Trägheitsmoment J den Beitrag $dJ = r^2 dm$. Die Integration über alle Elemente liefert,⁴⁾

$$\begin{aligned} J &= \int_0^R r^2 dm \\ &= 4\pi\rho \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr \end{aligned}$$

⁴⁾Beachte:

$$\int r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{(R^2 - r^2)^{5/2}}{5} - R^2 \frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3}$$

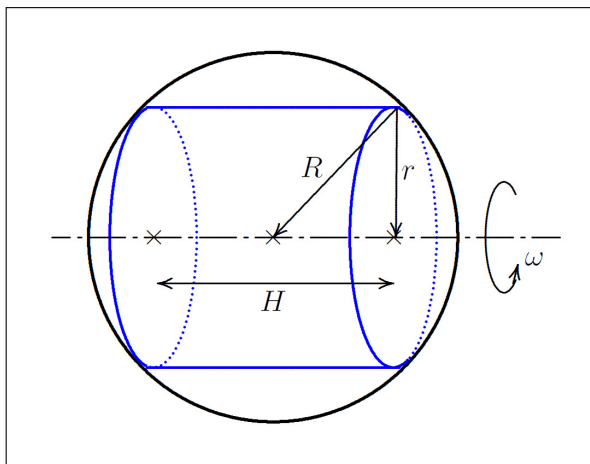


Abb. 5: Zur Berechnung des Trägheitsmoments der Kugel wird sie gedanklich in Hohlzylinder (blau) zerlegt, die konzentrisch im Abstand r von der Drehachse liegen.

$$= 4\pi\rho \frac{2}{15} R^5 .$$

Ersetzt man hier die Massedichte durch die Kugelmasse, $\rho = m/V$, mit dem Kugelvolumen $V = 4\pi R^3/3$, so folgt schließlich,

$$J = \frac{2}{5} m R^2 .$$