
Elektronik

1-semesterige Vorlesung für Studenten der Physik

BERND POMPE

Institut für Physik der Universität Greifswald

Studentenfassung vom 3. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	9
2	Grundlagen (Selbststudium)	11
2.1	Elektrische Ladung	11
2.2	Elektrische Kraft	11
2.3	Elektrisches Feld	12
2.4	Arbeit im elektrischen Feld	13
2.5	Elektrische Spannung	13
2.6	Maschenregel (2. Kirchhoffsche Regel)	14
2.7	Elektrischer Strom	15
2.8	Knotenregel (1. Kirchhoffsche Regel)	15
2.9	Maßeinheiten	17
2.10	Körper im elektrischen Feld	18
2.11	Kondensator und Kapazität	18
2.12	Plattenkondensator	19
2.13	Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren	19
2.14	Elektrischer Widerstand und Leitwert	20
2.15	Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen	20
2.16	Energieumsatz	21
2.17	Nichtlineare U/I -Kennlinie	22
2.18	Spannungsquelle	22
2.19	Impedanzwandler und Verstärker	24
2.20	Leistungsumsatz in Spannungsquellen	24
2.21	Reihen und Parallelschaltung von Spannungsquellen	25
2.22	Voltmeter	25
2.23	Amperemeter	26
2.24	Gleichzeitige Messung von Strom und Spannung	27
2.25	Spannungsteiler und Potentiometerschaltung	28
2.26	Spannungsteiler unter Last	29
2.27	Messung des Innenwiderstands eines Voltmeters	31
2.28	Stromquelle	31
2.29	Messung des Innenwiderstands eines Amperemeters	32
2.30	Elektrische Schaltung und Kabel	33

2.31	Umladung eines Kondensators	33
2.32	Spannungsmessung mit Kompensationsmethode	38
2.33	Sensoren	39
3	Passive Bauelemente	41
3.1	Widerstand	41
3.1.1	Idealer und Realer Widerstand	41
3.1.2	Temperaturrauschen	42
3.1.3	Beschriftung	43
3.1.4	Baureihen	45
3.1.5	Stabilität realer ohmscher Widerstände	46
3.1.6	Im Praktikum verfügbare Widerstände	46
3.2	Kondensator	46
3.2.1	Beschreibung im Komplexen	47
3.2.2	Ersatzschaltbild	48
3.2.3	Technische Kondensatoren	48
3.3	Induktivität	51
3.3.1	Definition	51
3.3.2	Schaltsymbol	51
3.3.3	Gesamtinduktivität	51
3.3.4	Beispiele für reale Induktivitäten	52
3.3.5	Eigenschaften realer Induktivitäten	52
3.4	Leitungen, Kabel	53
3.4.1	Koaxialkabel	53
4	Grundsaltungen mit passiven Bauelementen	55
4.1	Spannungsteiler und Filter 1. Ordnung	55
4.2	Kapazitiv belasteter Spannungsteiler	57
4.3	Frequenzkompensierter Spannungsteiler	59
4.4	Tastköpfe in der Messtechnik	59
4.5	Reihenschaltung von zwei Hochpässen (Filter 2. Ordnung)	61
4.6	Doppel-T-Filter (Bandsperr)	62
4.7	Phasenschieber (Allpass)	65
4.8	Zweipol-Ersatzschaltung	66
4.9	Komplexe Leistungsanpassung	66
5	Lineare Systeme und Fourier-Transformation	69
5.1	Lineares zeitinvariantes System	69
5.2	Fourier-Transformation	72
5.2.1	Fourier-Reihe für periodische Funktionen	72
5.2.2	Kommutatives Diagramm	77
5.2.3	Spektraldichte	78
5.3	Laplace-Transformation	81

5.3.1	Laplace–Transformierte und Kommutatives Diagramm	82
5.3.2	Laplace–Transformierte von Übertragungsfunktionen	83
5.3.3	Laplace–Transformierte von speziellen Signalen	83
5.3.4	Rechenregeln zur Laplacetransformation	85
5.3.5	Laplace–Rücktransformation mit Residuensatz	87
5.3.6	Beispiel: Spungantwort eines Tiefpass 1. Ordnung	87
5.3.7	Beispiel: Pulsantwort eines Tiefpass 1. Ordnung	89
6	Halbleiter–Bauelemente	91
6.1	Diode	91
6.1.1	pn–Übergang	92
6.1.2	Reale Dioden	92
6.1.3	Grundsaltungen mit Dioden	97
6.2	Bipolartransistor	101
6.2.1	Grundlegende Eigenschaften von Bipolartransistoren	101
6.2.2	Aufbau	102
6.2.3	Kennlinien und Kenngrößen	102
6.2.4	Arbeitspunkteinstellung	108
6.2.5	Kleinsignalbetrieb	109
6.2.6	Grenzdaten	111
6.2.7	Grundsaltungen	116
6.3	Schaltungen mit Bipolartransistoren	121
6.3.1	Verstärker mit Stromgegenkopplung	121
6.4	Feldeffekttransistor	127
6.4.1	Funktionsweise und Typen	127
6.4.2	Kennlinien	129
7	Operationsverstärker	135
7.1	Eigenschaften von Operationsverstärkern	135
7.1.1	Idealer und realer Operationsverstärker	135
7.1.2	Gleichtaktunterdrückung	137
7.1.3	Eingangsfehlspannung	138
7.1.4	Eingangsruhe– und –fehlstrom	138
7.1.5	Frequenzgang	138
7.1.6	Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsspannung	140
7.1.7	Elektrometer–Gegenkopplung	141
7.2	Schaltungen mit Operationsverstärkern	143
7.2.1	Invertierender Verstärker	143
7.2.2	Messung der Differenzverstärkung	145
7.2.3	Invertierender Summierer	145
7.2.4	Astabiler Multivibrator	145
7.2.5	Schmitt–Trigger	147
7.2.6	Differenzierer	148
7.2.7	Integrierer	149

7.2.8	Bandsperre	151
7.2.9	Logarithmierer	152
7.2.10	Exponierer	154
8	Digitale Schaltungen	157
8.1	Aussagenlogik	157
8.1.1	Logische Funktionen	157
8.1.2	Rechnen mit logischen Variablen	159
8.1.3	Normalformen	161
8.1.4	Karnaugh–Tafeln	163
8.2	Logisches Gatter	164
8.2.1	Grundlagen	164
8.2.2	Schaltkreisfamilien	165
8.2.3	TTL–NAND–Gatter	168
8.2.4	Gatter mit offenem Kollektorausgang	170
8.2.5	Gatter mit Tristate–Ausgängen	171
8.3	Kombinatorische Schaltungen	171
8.3.1	Grundsaltungen	172
8.3.2	Test auf Gleichheit	172
8.3.3	Binäraddition	172
8.3.4	Codeumsetzer — Siebensegmentanzeige	174
8.4	Sequentielle Schaltungen	175
8.4.1	Schmitt–Trigger	175
8.4.2	Astabiler Multivibrator	175
8.4.3	Monostabiler Multivibrator (Univibrator)	176
8.4.4	Bistabiler Multivibrator (Flipflop)	177
8.4.5	Entpreller	178
8.4.6	RS–Flipflop	178
8.4.7	D–Flipflop	180
8.4.8	JK–Flipflop	181
9	Analog–Digital–Wandlung	183
9.1	Abtasttheorem	183
9.1.1	Begründung des Abtasttheorems	184
9.1.2	Praktische Rekonstruktion	188
9.2	Diskrete Fourier–Transformation	189
9.2.1	Allgemeine Eigenschaften der DFT	191
9.2.2	Bandpassfilterung mittels DFT	192
9.2.3	Hinweise zur Berechnung der DFT	192
9.2.4	Zwei–dimensionale DFT	193
9.2.5	Kurzzeit–Fourieranalyse	194
9.2.6	Periodogramme von Sprachsignalen	194

A	Fourier–Transformation	197
A.1	Fourier–Entwicklungen	197
A.2	Reihenentwicklung einer symmetrischen Rechteckimpulsfolge	197
A.3	Reihenentwicklung eines symmetrischen Dreiecksignals	198
A.4	Spektraldichte eines Rechteckfensters	199
A.5	Zeitfunktion eines spektralen Rechteckfensters	200
A.6	Programm: Fast–Fourier–Transformation	200
A.7	Programm: Interpolation	202
B	Datenblätter	207
B.1	Kleinsignaldiode 1N4148	208
B.2	Gleichrichterdiode 1N4001	210
B.3	Schottkydiode BAS40	212
B.4	Schottkydiode BAT15–03W	216
B.5	Brückengleichrichter B40D .. B500D	219
B.6	Bipolartransistor BFY50	221
C	Miszellen	225
C.1	Wörterbuch	225
D	Übungsaufgaben	227
D.1	Aufgabenblatt 1 — Reale Spannungsquelle unter Last	228
D.2	Aufgabenblatt 2 — Umladung eines realen Kondensators	229
D.3	Aufgabenblatt 3 — Kondensator bei Ansteuerung mit harmonischer Wechselspannung	230
D.4	Aufgabenblatt 4 — Kondensator bei Ansteuerung mit Rechteckspannung	231
D.5	Aufgabenblatt 5 — RCL–Serienschaltung	232
D.6	Aufgabenblatt 6 — Realer Widerstand	233
D.7	Aufgabenblatt 7 — Passiver Bandpass	234
D.8	Aufgabenblatt 8 — Laplacetransformation	235
D.9	Aufgabenblatt 9 — Spannungsstabilisierung mit Z–Diode	236
D.10	Aufgabenblatt 10 — OPV, Integrierer	236
D.11	Aufgabenblatt 11 — Karnaugh–Tafeln	238
E	Testfragen	239

Kapitel 1

Einführung

Elektronik ist eine technische Disziplin. Ihre naturwissenschaftliche Basis liefern vor allem die Elektrodynamik und Festkörperphysik. Grundanliegen der Elektronik ist es, technische Geräte zur Signal- bzw. Informationsverarbeitung zu bauen. Im Unterschied zur Elektrotechnik sind in der Elektronik Aspekte der Übertragung von Elektroenergie zweitrangig.

Die Geräte der Elektronik sind modular aufgebaut. Sie bestehen zum einen aus vergleichsweise einfachen Bauelementen wie elektrischen Widerständen, Kondensatoren, Induktivitäten und elektrischen Leitungen. Darüber hinaus gibt es aber auch Halbleiterbauelemente wie Dioden und Transistoren sowie darauf aufbauende integrierte Schaltungen, die in ihrer komplexesten Form einige Millionen Bauelemente beinhalten.

Die elektronische Signalverarbeitung umfasst die Signalgewinnung bzw. -konvertierung (mittels Sensoren und Aktoren) sowie die Signalübertragung, -filterung und -speicherung.

Elektronische Geräte sind ein wesentlicher Bestandteil der technischen Basis moderner Industriegesellschaften. Es gibt kaum einen gesellschaftlichen Bereich, der ohne elektrische Geräte auskommt, denken wir nur an die PC-Technik und das Internet sowie an den Maschinenbau. Ohne Elektronik käme die gesamte Industrie zum Erliegen. Kein modernes physikalisches oder sonstiges Labor kommt ohne elektrische Messtechnik aus. Die Elektronik liefert die technische Basis von allen modernen Schlüsseltechnologien.

Der hier angebotene ein-semesterige Kurs zur Elektronik für Studenten der Physik umfasst Vorlesungen im Umfang 3 Semester-Wochenstunden (SWS) und Übungen im Umfang von 1 SWS. Der Kurs wird begleitet von einem ein-semesteriges Elektronikpraktikum (3 SWS).

Kapitel 2

Grundlagen (Selbststudium)

2.1 Elektrische Ladung

Die elektrische Ladung Q ist eine Grundeigenschaft von Materie. So sind beispielsweise die Elementarteilchen Elektron und Proton einfach negativ bzw. positiv geladen, es gibt aber auch ungeladene Teilchen wie das Neutron. Die Ladung des Protons heisst *Elementarladung*,¹⁾

$$e = 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ As} \text{ , } \pm 10^{-5} \% \text{ .}$$

Sie ist der kleinst mögliche Betrag der elektrischen Ladung. Beliebige Körper (oder Stoffmengen) bilden letztlich eine Ansammlung von Elementarteilchen, folglich ist die Ladung eines Körpers immer ein ganzzahliges Vielfaches von e . Dabei addieren sich die in einem Körper enthaltenen positiven und negativen Ladungen, so dass die elektrische Ladung Q des Körpers nur die Differenz zwischen der Anzahl N_+ der positiven und der Anzahl N_- der negativen Elementarladungen beschreibt, $Q = (N_+ - N_-)e$.

2.2 Elektrische Kraft

Zwischen zwei mit Q_1 und Q_2 elektrisch geladenen Körpern wirkt eine Kraft \mathbf{F} . In einem sehr einfachen Fall ist diese durch das *Coulombsche Gesetz* beschrieben,

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ .} \quad (2.1)$$

Es gilt für Körper in einem elektrisch isolierenden homogenen Medium wie Luft, wobei die Körperabmessungen klein gegenüber ihrem Abstand r sind, so dass die Ladungsverteilung auf einem jeden Körper als punktförmig angesehen werden kann, so genannte *Punktladungen*. Eine Punktladung stellt man sich räumlich auf einen Punkt konzentriert vor, was jedoch nicht heisst, dass ihre elektrische Ladung Q ebenso klein sein muss. Die Kraft zeigt in Richtung der Verbindungsgeraden zwischen den Orten der Punktladungen, ihr Richtungssinn ist anziehend für Ladungen ungleichen Vorzeichens und andernfalls abstoßend (Abb. 2.1a bzw. b).²⁾

¹⁾Zur Definition der Maßeinheiten s. S. 17

²⁾Das Coulombsche Gesetz (2.1) ist in seiner Form dem Newtonschen Gravitationsgesetz $\mathbf{F}_{\text{grav}} \sim m_1 m_2 / r^2$ ähnlich. Die Rolle der Masse m spielt hier die elektrische Ladung Q . Allerdings ist, im Unterschied zur elektrischen, die gravitative Wechselwirkung immer anziehend.

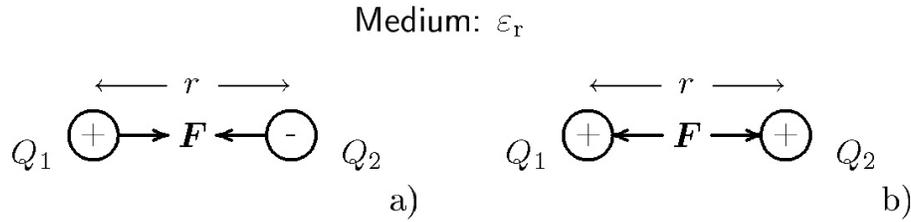


Abb. 2.1: Coulombsches Gesetz (2.1): (a) Punktladungen ungleichen Vorzeichens ziehen sich an, und (b) solche gleichen Vorzeichens (beide positiv wie im Bild oder beide negativ) stoßen sich ab. Der Betrag der Kraft zwischen den Punktladungen ist proportional den elektrischen Ladungen und umgekehrt proportional dem Abstandsquadrat r^2

In das Coulombsche Gesetz geht die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums ein. Sie ergibt sich aus der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, die auf $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$ exakt festgelegt (definiert) ist, und aus dem ebenfalls festgelegten Wert der Vakuum-Permeabilität $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ N A}^{-2}$, es gilt

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} .$$

Damit ist auch ϵ_0 ein exakter Wert,

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi \cdot (299\,792\,458)^2} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \approx 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} .$$

Die *relative Dielektrizitätskonstante* (Dielektrizitätszahl) ϵ_r beschreibt das Medium, also den Stoff, in dem sich die geladenen Körper befinden (Tab. 2.1).

Tab. 2.1: Dielektrizitätszahlen ϵ_r einiger Materialien bei 20°C und Normaldruck 10^5Pa . Die weite Spanne von ϵ_r im Muskelgewebe ergibt sich für unterschiedliche Frequenzen f von harmonisch veränderlichen elektrischen Wechselfeldern

Material	ϵ_r	Material	ϵ_r
Vakuum	1	Benzol	2,3
Luft	1,0006	Lipide	3,5
Paraffin	2	Zellmembranen	9
Papier	1,8 ... 2,6	Muskelgewebe	$30 \dots 3 \cdot 10^6 (f = 10^{10} \dots 10\text{Hz})$
Glas	5 ... 16	Wasser	80,3
Ferroelektrika	> 1000		

2.3 Elektrisches Feld

Im Allgemeinen sind die Kraftwirkungen zwischen elektrisch geladenen Körpern komplizierter, als im Coulombschen Gesetz beschrieben, zumal wenn die geladenen Körper räumlich ausgedehnt sind. Zur Beschreibung der allgemeinen Situation wird das *elektrische Feld* eingeführt. Dazu stellen wir uns am Ort \mathbf{x} eine kleine positive Ladung der Größe Q vor, die *Probeladung*. Das ist eine Punktladung, deren Ladung so klein sei, dass sie den ursprünglichen Feldverlauf nicht merklich verändert. Wirkt auf sie die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, so ordnet man diesem Ort die elektrische Feldstärke \mathbf{E} zu,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{Q} .$$

Folgt man im Raum, ausgehend von einem beliebigen Punkt \mathbf{x} , immer ein kleines Wegstück der lokalen Richtung von $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, so schreitet man auf einer *Feldlinie* voran (Abb. 2.2). Feldlinien zwischen zwei unterschiedlich geladenen Körpern sind immer von der positiven zur negativen Ladung gerichtet.

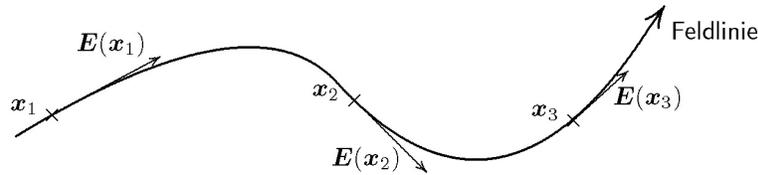


Abb. 2.2: Der elektrische Feldstärkevektor $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ liegt tangential an der Feldlinie am Ort \mathbf{x}

2.4 Arbeit im elektrischen Feld

Bei der Verschiebung einer Probeladung Q in einem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ entlang einer kleinen Wegstrecke $\Delta\mathbf{x}$ von Punkt \mathbf{x} nach $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, muss Arbeit verrichtet werden. Dadurch ändert sich ihre potentielle Energie W um

$$\Delta W = -F \Delta x \cos \angle(\mathbf{F}, \Delta\mathbf{x}) = QE \Delta x \cos \angle(\mathbf{F}, \Delta\mathbf{x}) . \quad (2.2)$$

Die potentielle Energie einer positiven Probeladung vergrößert sich, wenn die Projektion von $\Delta\mathbf{x}$ auf \mathbf{E} dem Feld entgegengerichtet ist (Abb. 2.3a).³⁾ Bei einer negativen Probeladung kehrt sich die Kraftrichtung um (Abb. 2.3b).

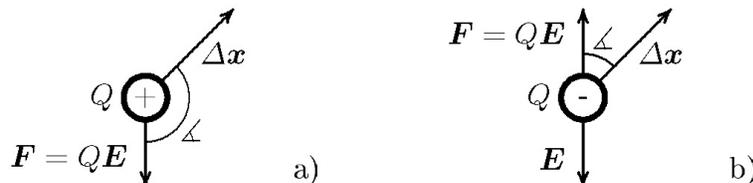


Abb. 2.3: Verschiebungsarbeit einer Punktladung Q im \mathbf{E} -Feld (2.2): (a) Wird eine positive Punktladung Q entgegen dem elektrischen Feldstärkevektor \mathbf{E} verschoben, so muss Arbeit verrichtet werden. (b) Dieselbe Verschiebung einer negativen Ladung setzt Arbeit frei

2.5 Elektrische Spannung

Gegeben sei ein Probekörper mit der elektrischen Ladung Q im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Man hält einen beliebigen Punkt \mathbf{x}_0 im Raum als Bezugspunkt fest, und definiert, dass hier die potentielle Energie des Probekörpers Null ist, $W(\mathbf{x}_0) = 0$. Dieses Bezugspotential wird in der Technik auch *Massepotential* genannt. Verschiebt man nun eine Probeladung Q von \mathbf{x}_0 zu einem beliebigen Punkt \mathbf{x} , so hat sie dort die potentielle Energie $W(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}_0) = W(\mathbf{x})$. Diese hängt nur vom Endpunkt \mathbf{x} ab, nicht aber vom Verlauf des Weges, auf dem die Probeladung von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x} gelangt. Man sagt deshalb auch, das elektrische Feld

³⁾Im Schwerfeld der Erde entspricht dies dem Anheben eines Körpers mit der Gewichtskraft \mathbf{F} um die Höhe $-\Delta x \cos \angle(\mathbf{F}, \Delta\mathbf{x})$.

ist ein *Potentialfeld*. Das *elektrische Potential* φ an der Stelle \mathbf{x} ist dann definiert durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{W(\mathbf{x})}{Q} . \tag{2.3}$$

Die Potentialdifferenz

$$U_{12} = \varphi(\mathbf{x}_2) - \varphi(\mathbf{x}_1)$$

(2.4)

heisst *elektrische Spannung*.

Wählt man einem beliebigen Ort \mathbf{x} , mit dem Potential $\varphi(\mathbf{x})$, und fasst dann alle Punkte \mathbf{x}^* um \mathbf{x} zusammen, die dasselbe Potential haben, also $\varphi(\mathbf{x}^*) = \varphi(\mathbf{x})$, dann bilden diese Punkte den *Äquipotentialbereich*. Beispielsweise erzeugt eine Punktladung ein kugelsymmetrisches elektrisches Feld (Abb. 2.4). Die Äquipotentialbereiche sind hier konzentrische Kugeloberflächen, bei der Darstellung in einer Schnittebene sieht man sie als *Äquipotentiallinien*. An einem beliebigen Ort \mathbf{x} steht der Feldstärkevektor $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ immer senkrecht auf der entsprechenden Äquipotentialfläche bzw. -linie durch \mathbf{x} .⁴⁾

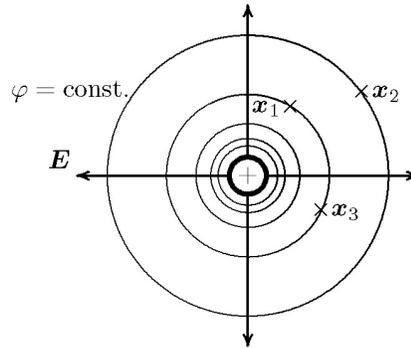


Abb. 2.4: Kugelsymmetrisches elektrisches Feld, das durch eine positive Punktladung erzeugt wird. Die konzentrischen Kreise sind Äquipotentiallinien. Bei der Verschiebung einer positiven Probeladung von \mathbf{x}_1 nach \mathbf{x}_2 wird Arbeit frei, wohingegen von \mathbf{x}_2 nach \mathbf{x}_3 Arbeit verrichtet werden muss. Die Verschiebung von \mathbf{x}_1 nach \mathbf{x}_3 kann entlang einer Äquipotentiallinien bzw. auf einer Äquipotentialfläche erfolgen. Dabei wird zu keinem Zeitpunkt Arbeit geleistet oder frei

2.6 Maschenregel (2. Kirchhoffsche Regel)

Verschiebt man eine Probeladung Q auf einem Weg

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{x}_N$$

in einem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, so ist die gesamte Änderung der potentiellen Energie gleich der Summe der Änderungen auf jeder Teilstrecke, also

$$\Delta W_{1N} = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \dots + \Delta W_{(N-1)N} . \tag{2.5}$$

Der Wegverlauf zwischen den Punkten ist dabei unbedeutend, weil \mathbf{E} ein Potentialfeld ist. Mit (2.3) und (2.4) erhält man dann aus (2.5), dass die elektrische Spannung zwischen den Punkten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_N gleich

⁴⁾Die Äquipotentiallinien entsprechen im Schwerfeld den Höhenlinien, wie man sie von Landkarten kennt.

der Summe der Spannungen auf jeder Teilstrecke ist,

$$U_{1N} = U_{12} + U_{23} + \dots + U_{(N-1)N} .$$

Beim Umlauf auf einem geschlossenen Weg, einer so genannten *Masche*, fallen Anfangs- und Endpunkt zusammen, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_N$. Folglich gilt dann $U_{1N} = \varphi(\mathbf{x}_N) - \varphi(\mathbf{x}_1) = 0$. Dies führt zur *Maschenregel*:

$$0 = U_{12} + U_{23} + \dots + U_{(N-1)N} \quad (2.6)$$

In einer Masche ist die Summe der elektrischen Spannungsabfälle Null (Abb. 2.5).

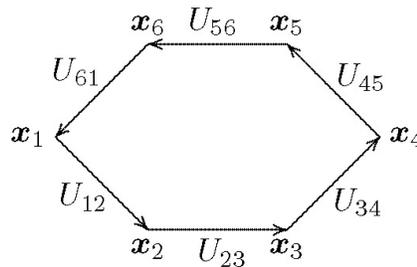


Abb. 2.5: Eine Masche, die aus sechs Punkten des Raumes gebildet wird. Zwischen den Punkten liegen in einer elektrischen Schaltung Bauelemente wie zum Beispiel Widerstände, Kondensatoren und Spannungsquellen

Die Ursache für das Auftreten einer Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten einer Masche kann recht unterschiedlich sein. Beispielsweise kann durch einen ohmschen Widerstand R ein Strom der Stärke I fließen. Nach dem Ohmschen Gesetz fällt dann über diesem Widerstand die Spannung $U = R \cdot I$ ab. Es kann aber auch in einem Zweig der Masche eine (elektrochemische) Spannungsquelle (Batterie) liegen, mit der Ursprung⁵⁾ U_0 und dem Innenwiderstand R_i . Ein Beispiel zeigt Abb. 2.6.

2.7 Elektrischer Strom

Befinden sich in einem elektrischen Feld frei bewegliche Ladungsträger, z.B. Elektronen in einem Metall, so werden sie infolge der elektrischen Kraft bewegt. Der entsprechende Transport elektrischer Ladungen heißt *elektrischer Strom*. Die *elektrische Stromstärke*,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} ,$$

ist die Ladungsmenge ΔQ , die pro Zeiteinheit Δt durch einen elektrischen Leiter strömt. Das Vorzeichen (der Richtungssinn) der Stromstärke wird dem der Spannung über dem Leiter gleichgesetzt, sie ist also vom höheren zum niedrigeren Potential gerichtet.

2.8 Knotenregel (1. Kirchhoffsche Regel)

Durch ein kleines Volumenelement eines stromführenden elektrischen Leiters strömen pro Zeiteinheit genau so viele elektrische Ladungen ein wie aus, denn elektrische Ladungen können weder erzeugt noch

⁵⁾Die Ursprungung wird auch *elektromotorische Kraft* (EMK) genannt, obwohl sie gar keine Kraft darstellt.

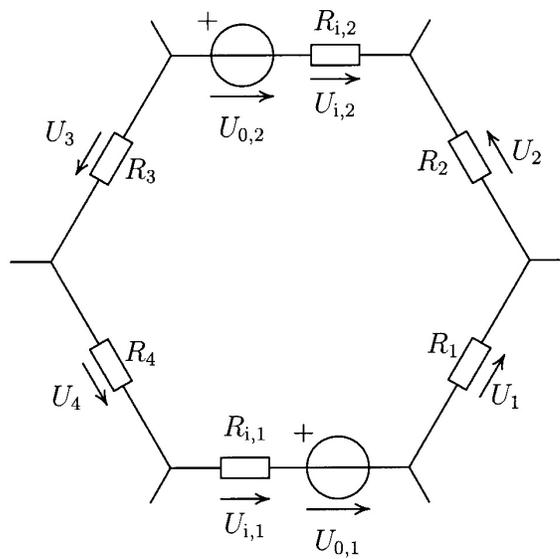


Abb. 2.6: Eine Masche mit vier ohmschen Widerständen und zwei Spannungsquellen. Eine Spannungsquelle kann man sich als Reihenschaltung einer idealen Quelle mit der Ursprungspannung U_0 und einem ohmschen Innenwiderstand R_i denken. In der Summe aller Spannungsabfälle innerhalb der Masche werden Spannungen negativ gezählt, wenn der Weg entgegen den Spannungsrichtungen (markiert durch Pfeile) verläuft. Bei einem Umlauf entgegen dem Uhrzeigersinn erhält man folglich $U_{i,1} + U_{0,1} + U_1 + U_2 - U_{i,2} - U_{0,2} + U_3 + U_4 = 0$

zerstört werden (Erhaltung der Gesamtladung). In einem Knoten von elektrischen Leitungen mögen nun die zu- und abfließenden Stromstärken in den Leitungen mit positiven bzw. negativen Vorzeichen gezählt werden. Dies führt auf die *Knotenregel*:

$$\boxed{\sum_{n=1}^N I_n = 0} \quad (2.7)$$

Die Summe der in einen Knoten fließenden Stromstärken ist Null (Abb. 2.7).

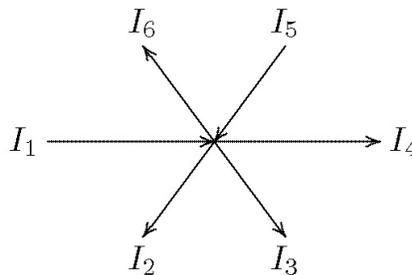


Abb. 2.7: Ein Knoten, in den über zwei Leitungen elektrische Ströme zu- and über vier abfließen

2.9 Maßeinheiten

[Stromstärke] = Ampere: Die Maßeinheit der Stromstärke I ist das *Ampere* (A). Es bildet eine Basiseinheit des *Internationalen Einheitensystems* und wird definiert aus der gegenseitigen Kraftwirkung stromdurchflossener elektrischer Leiter: 1 A ist die Stärke I eines konstanten elektrischen Stromes durch zwei parallele Leiter im Vakuum, die den Abstand $r = 1$ m haben und zwischen denen je Leiterlänge $l = 1$ m die nach dem Ampereschen Gesetz hervorgerufene Kraft

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2 l}{r} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

beträgt. Folglich ist die Definition des Ampere mit der Festlegung der Permeabilität des Vakuums zu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ gleichbedeutend.

[Ladung] = Coulomb: Die Maßeinheit der elektrischen Ladung Q ist das *Coulomb* (C). 1 C ist die Elektrizitätsmenge, die in der Zeitspanne 1 s bei der Stromstärke 1 A durch einen Leiter fließt,

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A s} .$$

[Spannung] = Volt: Die Maßeinheit der elektrischen Spannung U ist das *Volt* (V). 1 V ist gleich der Spannung zwischen zwei Punkten eines Leiters, in dem bei der Stromstärke 1 A die Leistung 1 W umgesetzt wird,

$$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1} .$$

2.10 Körper im elektrischen Feld

Ein Material, das frei bewegliche Ladungsträger enthält, heißt *elektrischer Leiter*. In Metallen wie Kupfer und Aluminium sind dies Elektronen im sogenannten Leitungsband. Bringt man einen Körper aus einem leitenden Material, z.B. einen Kupferdraht, in ein elektrisches Feld, verschieben sich innerhalb des Körpers diese Ladungsträger. Dadurch baut sich im Körperinneren ein zusätzliches elektrisches Feld auf, das sich dem von außen stammenden Feld additiv überlagert, so dass das Innere feldfrei ist. Folglich hat dann jeder Punkt im Körper das gleiche elektrische Potential, denn sobald dies nicht der Fall wäre, gäbe es einen Verschiebungsstrom, der sehr rasch wieder zum Ausgleich führen würde. Die verschobenen Ladungen sammeln sich an der Oberfläche des Körpers, falls sich der Körper in einem isolierenden Medium befindet, so daß die Ladungen den Körper nicht verlassen können.

Besteht der Körper nur aus einem Drahtkäfig, so stellt sich innerhalb des Käfigs ebenso Feldfreiheit ein, was in der Technik vielfältig zur Abschirmung elektrischer Störfelder genutzt wird (Faradayscher Käfig). Eine Autokarosserie ist eben solch ein Käfig, der bei Gewitter Insassen auf isolierenden Sitzen vor Blitzschlag schützt. In der elektrischen Messtechnik verwendet man Koaxialkabel, bei denen die Messleitung von einem Drahtgeflecht umgeben wird, das auf Bezugspotential liegt. Damit werden Störungen der Messsignale durch äußere elektrische Einflüsse verringert.

Befindet sich der Körper in einem elektrischen Wechselfeld, etwa ein menschlicher Körper unter einer Hochspannungsleitung, so kommt es innerhalb des Körpers zu einem Verschiebungsstrom, der zu jedem Zeitpunkt für innere Feldfreiheit sorgt. Je schneller das äußere Feld wechselt, desto stärker ist der Verschiebungsstrom im Körper.

Wird die Feldstärke hinreichend groß, so können Ladungsträger den Körper auch verlassen und möglicherweise im isolierenden Medium zur Stoßionisation führen, was die elektrische Leitfähigkeit plötzlich stark erhöht und zu Leuchterscheinungen führen kann (Blitz).

2.11 Kondensator und Kapazität

Zwei Körper aus leitfähigem Material können beispielsweise durch Reibungselektrizität, einen Generator oder durch elektrochemische Vorgänge in einer Batterie elektrisch aufgeladen werden. Dabei fließen vom einen Körper Ladungsträger auf den anderen. Sind die Körper nach der Ladungstrennung elektrisch isoliert, so speichern sie die elektrische Energie $QU/2$. In der Technik nennt man solch eine Anordnung *Kondensator*, mit den beiden Körpern als Kondensatorplatten.

Kondensatoren können auch ineinander gewickelte Aluminiumfolien sein, die mit paraffiniertem Papier elektrisch isoliert sind. An die Stelle der Metall-Platten können auch Elektrolyte treten, die mit einem Oxid elektrisch isoliert werden. Elektrolytkondensatoren können bei gleicher Speicherkapazität viel kleiner gebaut werden als Wickelkondensatoren, allerdings dürfen sie nur in einer Richtung gepolt werden. Darüber hinaus ist ihre elektrische Isolation weniger gut, was eine raschere Selbstentladung zur Folge hat. Wurde bei der Aufladung die Ladungsmenge Q verschoben, so baut sich zwischen den Körpern eine Potentialdifferenz U auf, die proportional zu Q ist. Die Proportionalitätskonstante ist vom isolierenden Material zwischen den Kondensatorplatten, dem *Dielektrikum*, und der räumlichen Anordnung der Körper abhängig. Man fasst all dies für einen konkreten Kondensator in einer Größe zusammen, der *Kapazität*

(Abb. 2.8).

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.8)$$

(Sie ist nicht mit der Einheit C der elektrischen Ladung zu verwechseln, die wie alle Maßeinheiten steil gesetzt wird).

Mit stetiger Erhöhung der Spannung auf einem Kondensator wird die Kraftwirkung auf die Ladungsträger des Dielektrikum schließlich so groß, dass sie das Dielektrikum verlassen können und somit einen elektrischen Strom von einer Platte auf die andere ermöglichen. Dabei wird der Kondensator in der Regel irreversibel zerstört. Bei technischen Kondensatoren wird deshalb neben der Kapazität auch die maximal zulässige Spannung angegeben.

Das Dielektrikum kann bei realen Kondensatoren nicht als idealer Isolator angesehen werden, insbesondere nicht bei Elektrolyt-Kondensatoren. Reale Kondensatoren stellt man sich deshalb immer als Parallelschaltung eines idealen Kondensators mit einem ohmschen Widerstand vor, dem *Leckwiderstand* R_C mit zumeist $R_C > 1\text{M}\Omega$ (Abb. 2.8c).

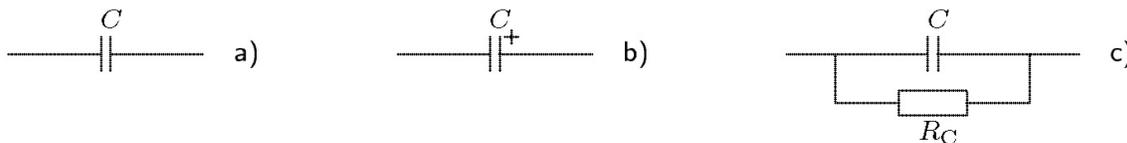


Abb. 2.8: (a) Schaltsymbol eines Kondensators (allgemein), (b) eines Elektrolyt-Kondensators, (c) realer Kondensator

2.12 Plattenkondensator

Ein *Plattenkondensator* kann als Grundtyp eines Kondensators angesehen werden. Er besteht aus zwei gleichen planparallelen Platten leitfähigen Materials, mit jeweils der Fläche A im Abstand l . Zwischen ihnen befindet sich ein homogenes elektrisch isolierendes Medium mit der Dielektrizitätszahl ϵ_r . Seine Kapazität beträgt

$$C_{\text{Platte}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{l} . \quad (2.9)$$

Die Dicke der Platten ist unbedeutend, da sich die elektrischen Ladungen auf der Oberfläche des Plattenkörpers anordnen. Das Platteninnere ist nach der Aufladung feldfrei. Die Feldlinien treten senkrecht aus der Plattenoberfläche ins Dielektrikum. Im Plattenzwischenraum beträgt die Feldstärke $E = U/l$.

2.13 Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren

Werden zwei Kondensatoren C_1 und C_2 parallel geschaltet, so ist die Gesamtkapazität C gleich der Summe der Einzelkapazitäten (Abb. 2.9a),

$$C = C_1 + C_2 . \quad (2.10)$$

Für einen Plattenkondensator (2.9) ist dies unmittelbar einsichtig, wenn man sich zu den zwei Kondensatoren C_1 und C_2 je einen äquivalenten Plattenkondensator denkt, mit gleichem Plattenabstand und Dielektrikum. Dann addieren sich bei der Parallelschaltung gerade die entsprechenden Plattenflächen, $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A_1 + A_2}{l}$.

In Reihe geschaltete Kondensatoren (Abb. 2.9b) haben hingegen die Gesamtkapazität

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} . \quad (2.11)$$

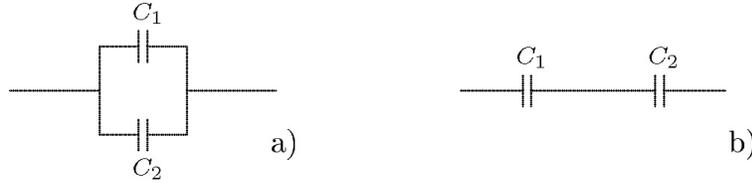


Abb. 2.9: (a) Parallel- und (b) Reihenschaltung von Kondensatoren (Kapazitäten)

2.14 Elektrischer Widerstand und Leitwert

Fällt über einem Körper die Spannung U ab, die zu einer Stromstärke I in ihm führt, so hat er den *elektrischen Widerstand*

$$R = \frac{U}{I} \quad (2.12)$$

Dieser Zusammenhang heisst *ohmsches Gesetz*. Die Einheit des Widerstands ist das Ohm, $[R] = 1 \Omega = 1 \text{ V/A}$. Der Kehrwert $G = 1/R$ heisst *Leitwert*, mit der Einheit Siemens, $[G] = 1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$.

Im Allgemeinen ändert sich I nicht proportional zu U , ist dies jedoch im relevanten Spannungsbereich der Fall, spricht man vom *ohmschen* Widerstand.

Formt man aus einem bestimmten Material einen Stab mit der Querschnittsfläche A und der Länge l , so beträgt der elektrische Widerstand zwischen seinen Enden

$$R_{\text{Stab}} = \rho \frac{l}{A} . \quad (2.13)$$

Die Konstante ρ ist der *spezifische Widerstand*, sie charakterisiert das elektrische Leitvermögen des Materials (Tab. 2.2).

2.15 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Werden zwei Widerstände R_1 und R_2 in Reihe (Serie) geschaltet (Abb. 2.10a), so berechnet sich der Gesamtwiderstand R aus der Summe der Einzelwiderstände,

$$R_g = R_1 + R_2 . \quad (2.14)$$

Für zwei Stäbe gleichen Materials (also gleichem ρ), gleicher Querschnittsfläche A und den Längen l_1 bzw. l_2 ist dieser Zusammenhang unmittelbar einsichtig, $R = \rho \frac{l_1+l_2}{A}$.

Für den Gesamtwiderstand der Reihenschaltung von beliebigen vielen Widerständen $R_1 \dots R_N$ gilt

$$R_g = \sum_{n=1}^N R_n \quad (2.15)$$

Tab. 2.2: Spezifischer Widerstand ρ einiger Materialien bei 20°C, Körpermaterialien bei 37°C und Frequenzen von 20...10⁵ Hz

Material	ρ in Ωm	Körpermaterial	ρ in Ωm
Silber	$0,016 \cdot 10^{-6}$	Urin	0,3
Kupfer	$0,018 \cdot 10^{-6}$	Intrazellulärflüssigkeit	0,6
Wolfram	$0,055 \cdot 10^{-6}$	Extrazellulärflüssigkeit	1
Eisen	$0,100 \cdot 10^{-6}$	Blut	1,50
Quecksilber	$0,958 \cdot 10^{-6}$	Zellmembran	$10^6 \dots 10^9$
Glas	10^{11}	Skelettmuskulatur in Faserrichtung	1,5
Bernstein	$> 10^{16}$.. quer zur Faserrichtung	20
		Herzmuskulatur in Faserrichtung	2,5
		.. quer zur Faserrichtung	5,6
		Nerven grau (Mittel über alle Richtg.)	2,8
		Nerven weiß (Mittel über alle Richtg.)	6,8
		Fettgewebe	25
		Knochen	166

Die Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 (Schreibweise: $R_1 \parallel R_2$; Abb. 2.10b) liefert den Gesamtwiderstand

$$R_g = R_1 \parallel R_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . \quad (2.16)$$

Unter Verwendung der Leitwerte erhält man $R^{-1} = G = G_1 + G_2$. Für zwei Stäbe gleichen Materials, gleichen Längen l und den Querschnittsflächen A_1 bzw. A_2 ist dieser Zusammenhang unmittelbar einsichtig, $G = \rho^{-1} \frac{A_1 + A_2}{l}$.

Aus (2.16) folgt für den Gesamtwiderstand der Parallelschaltung von beliebig vielen Widerständen

$$R_g = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n} \right)^{-1} \quad (2.17)$$

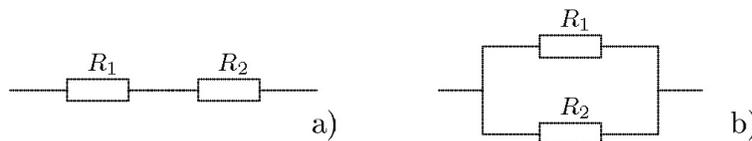


Abb. 2.10: (a) Reihen- und (b) Parallelschaltung von ohmschen Widerständen

2.16 Energieumsatz

Fällt über den Widerstand R die Spannung U ab, so fließt durch ihn in der Zeiteinheit Δt die Ladungsmenge $\Delta Q = I \cdot \Delta t$. Die Ladungsträger verlieren dabei die potentielle Energie

$$\Delta W = U \cdot \Delta Q = U \cdot I \cdot \Delta t ,$$

die in Wärme umgewandelt wird. Die pro Zeiteinheit gewandelte Energie, die *Leistung* P , ist dann $\Delta W/\Delta t$, und folglich

$$P = U \cdot I \quad (2.18)$$

Ihre Einheit ist das Watt, $[P] = 1 \text{ W} = 1 \text{ V A}$.

Damit ein technischer Widerstand durch den Stromfluß nicht zu stark erwärmt und letztlich zerstört wird, muss er die Wärme rasch genug an die Umgebung abgeben können, wozu er eine hinreichend große Oberfläche braucht. Neben dem Ω -Wert ist deshalb die maximal zulässige Leistung eines technischen Widerstands wichtig.

2.17 Nichtlineare U/I -Kennlinie

Verkleinert sich der Widerstand bei Erwärmung, so nennt man das Material *Heißleiter* oder auch *Thermistor*. Der Widerstand von Hand zu Hand eines menschlichen Körpers beträgt bei einer angelegten Spannung von 10 V etwa $10 \text{ k}\Omega$ und sinkt bei 1 kV auf etwa $2 \text{ k}\Omega$. Damit verhält er sich wie ein Heißleiter. Verhält sich ein Material jedoch umgekehrt, wie z.B. Metalle, so nennt man ihn *Kaltleiter*. Der Wolframdraht einer Glühlampe ist ein Kaltleiter, bei ansteigender Spannung steigt der Leistungsumsatz P was ihn bis hin zur Glut erwärmt. Sein Widerstand nimmt dabei zu, was näherungsweise durch

$$\frac{U(T)}{I} = R(T) = R_0 \left(1 + \beta(T - T_0) \right) \quad (2.19)$$

beschrieben wird, mit $R_0 = R(T_0)$, dem Widerstandswert bei der Bezugstemperatur T_0 (z.B. Zimmertemperatur) und dem Temperaturkoeffizient β , $[\beta] = \text{K}^{-1}$. Im Unterschied zum ohmschen Widerstand, wächst nun U nicht proportional mit I , vielmehr vergrößert sich der Anstieg der U/I -Kennlinie mit wachsender Stromstärke. Dies wird durch den *differentiellen Widerstand* r ausgedrückt,

$$r(I) = \Delta U / \Delta I \quad (2.20)$$

Er beschreibt, wie stark sich bei einer kleinen Stromänderung von I auf $I + \Delta I$ der Spannungsabfall ändert. Für einen ohmschen Widerstand R gilt, $r(I) = \text{const.} = R$.

Setzt man die Leistung (2.18) proportional zur Temperaturdifferenz $T - T_0$, so erhält man

$$R = R_0(1 + \gamma P) \quad ,$$

mit dem Koeffizient γ , $[\gamma] = \text{W}^{-1}$. Fasst man also $R = U/I$ als Funktion der Leistung $P = UI$ auf, so erhält man eine Gerade mit γR_0 als Anstieg,

$$R = R_0 + \gamma R_0 P \quad (2.21)$$

2.18 Spannungsquelle

Eine ideale *Spannungsquelle* kann als ein Kondensator mit unendlich großer Kapazität C angesehen werden, der auf die Spannung U_0 aufgeladen ist. Die Kondensatorplatten heißen hier Pole. Vom Plus- zum Minus-Pol fällt dann die konstante Spannung U_0 ab, und zwar selbst dann, wenn man die Pole mit einem Leiter verbindet, der den Widerstand $R > 0$ hat. Denn durch den Strom $I = U_0/R$ fließen dann

pro Zeiteinheit nur endliche Ladungsmengen ΔQ ab, was wegen $C = +\infty$ keine Spannungsänderung bewirken kann, $\Delta U_0 = \Delta Q/C = 0$. Für reale Spannungsquellen wie Batterien trifft dieses Bild jedoch nur näherungsweise zu.

Jede reale Spannungsquelle hat einen nicht verschwindenden *Innenwiderstand*, $R_i > 0$, den man sich immer in Reihe mit einem äußeren Widerstand R geschaltet vorstellen muss, und über den die Spannung

$$U_i = \frac{R_i}{R + R_i} U_0$$

abfällt (Abb. 2.11). Dabei ist U_0 die Spannung, welche zwischen den Polen der Spannungsquelle für $R = +\infty$ abfällt, also ohne Verbraucher (ohne Last). Sie wird *elektromotorische Kraft*, *Urspannung* oder auch *Leerlaufspannung* genannt.

Im Allgemeinen fällt über dem Verbraucher R nur die Spannung $U = U_0 - U_i$ ab. Verschwindet der äußere Widerstand ($R = 0$), so spricht man vom *Kurzschluss* der Spannungsquelle. Der entsprechende Kurzschlussstrom wird nur noch durch den Innenwiderstand begrenzt,

$$I_K = \frac{U_0}{R_i} . \quad (2.22)$$

Insbesondere bei elektronisch geregelten Spannungsquellen hängt der Innenwiderstand vom Laststrom I ab. Ist er kleiner als der maximale zulässige Nennstroms der Gerätes $I < I_{\max}$, so ist R_i bei hochwertigen Labornetzteilen zumeist vernachlässigbar klein, für $I > I_{\max}$ wird R_i jedoch sehr groß, so daß die Ausgangsspannung "zusammenbricht".

In elektrischen Schaltungen wird der Innenwiderstand einer Spannungsquelle häufig nicht eingezeichnet. Man nimmt dann an, dass bei der Realisierung der Schaltung der konkrete Innenwiderstand klein genug ist, so dass er keinen merklichen Einfluss ausübt oder einfach zum Lastwiderstand R dazugerechnet werden kann.

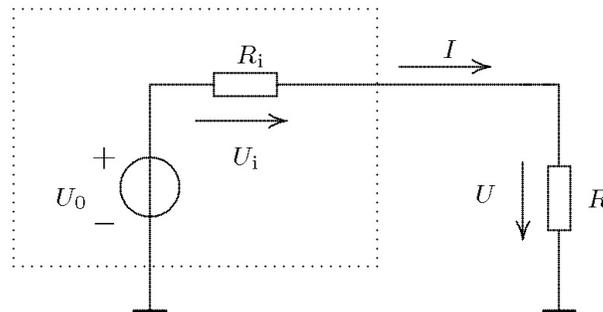


Abb. 2.11: Eine reale Spannungsquelle (im gepunkteten Rechteck) besteht aus der Reihenschaltung von einer idealen Spannungsquelle mit der Urspannung U_0 und einem ohmschen Innenwiderstand R_i . Der äußere Widerstand (Lastwiderstand) ist R . Das Massepotential wird mit einem dicken kurzen Strich gezeichnet. Alle Punkte mit Massepotential denkt man sich elektrisch leitend verbunden

Bei realen Spannungsquellen kann ein Kurzschluss ihre Zerstörung bewirken, zumal wenn dieser längere Zeit andauert. Hingegen sind z.B. Laborspannungsquellen (sog. Labornetzteile) meist elektronisch gesichert (kurzschlussfest). Damit ein Kurzschluss in der Stromversorgung einer 220 V/50 Hz-Hausinstallation nicht die Zuleitungen schmelzen lässt, ist eine "Sollschmelzstelle" in den Stromkreis eingebaut, die *Schmelzsicherung*, in neueren Anlagen auch Bimetall-Sicherungsautomaten.

Der Ladezustand einer Batterie oder eines Akkumulators ist vor allem mit einer Erhöhung des Innenwiderstands verbunden, weniger mit einer Abnahme der Leerlaufspannung U_0 . Deshalb kann der Ladezustand nicht durch einfaches Messen von U_0 mit einem hochohmigen Voltmeter erfolgen, vielmehr muss gemessen werden, wie U_0 unter Last (Stromfluss) über dem Innenwiderstand zusammenbricht. Beispielsweise kann der Ladezustand am Kurzschlussstrom (2.22) abgelesen werden.

2.19 Impedanzwandler und Verstärker

In einer elektrischen Schaltung kann man zwei beliebige Messpunkte immer als Pole einer Spannungsquelle ansehen, mit einem bestimmten Innenwiderstand, der durchaus sehr groß sein kann. Dies wird beispielsweise bei der Messung des Elektrokardiogramms gemacht, wo man sich für die zeitlich veränderliche Spannung zwischen zwei Punkten auf der Haut über dem Herzen interessiert. Eine direkte Spannungsmessung ist dabei aber nicht möglich, denn der Innenwiderstand dieser Spannungsquelle ist sehr groß, so dass ein Messinstrument mit vergleichbarem Eingangswiderstand diese Spannung allzu stark zusammenbrechen lassen könnte. Deshalb kommen hier spezielle Verstärker zum Einsatz, so genannte *Impedanzwandler*, deren Ausgang eine Spannungsquelle mit derselben Leerlaufspannung ist, wie die zwischen den Punkten auf der Haut, allerdings mit einem bedeutend geringerem Innenwiderstand. Im Allgemeinen werden hier aber auch *Verstärker* eingesetzt, die neben der Impedanzwandlung auch noch eine Streckung (oder auch Stauchung) der Spannung um einen meist einstellbaren Faktor bewirken.

2.20 Leistungsumsatz in Spannungsquellen

Eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i möge mit dem äußeren Widerstand R belastet werden (Abb. 2.11). Dann fließt ein Strom der Stärke $I = U_0/(R_i + R)$, was die Spannungsabfälle $U_i = R_i I$ über R_i und $U = RI$ über R bedingt. Somit beträgt der Energieumsatz (2.18) in R_i , also in der Spannungsquelle,

$$P_i = U_i I = \frac{R_i}{(R_i + R)^2} U_0^2 .$$

Über R , also in der äußeren Last, ist der Energieumsatz

$$P = UI = \frac{R}{(R_i + R)^2} U_0^2 .$$

Der gesamte Leistungsumsatz beträgt somit $P_i + P = U_0^2/(R_i + R)$.

Ist eine Spannungsquelle mit der Ursprungspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i gegeben, so stellt sich die Frage, wie groß der Lastwiderstand R sein muss, damit der Leistungsumsatz P maximal wird. Dazu folgende Rechnung:

Wir setzen $x \cdot R = R_i$, so dass

$$P(R) = \frac{R}{(R_i + R)^2} U_0^2 = \frac{R}{(x \cdot R + R)^2} U_0^2 = \frac{x}{(x + 1)^2} \cdot \frac{U_0^2}{R_i} .$$

Diese Leistung wird maximal, wenn der Term $f(x) \equiv \frac{x}{(x+1)^2}$ maximal wird. Dies ist der Fall für

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2x}{(x+1)^3} = 0 .$$

Aus $\frac{df}{dx}(x=1) = 0$ folgt: Sind der Last- und Innenwiderstand gleich groß, $R_i = R$, so ist die äußere (abgegebene) Leistung P maximal (*Leistungsanpassung*). Über R_i und R fällt dann jeweils die halbe Ursprungung ab, $U_i = U = U_0/2$.

2.21 Reihen und Parallelschaltung von Spannungsquellen

Zwei Spannungsquellen mit den Leerlaufspannungen $U_{0,1}$ und $U_{0,2}$ und den Innenwiderständen $R_{i,1}$ und $R_{i,2}$ können hintereinander geschaltet werden, dabei addieren sich die Einzelspannungen zur gesamten Leerlaufspannung $U_0 = U_{0,1} + U_{0,2}$, mit dem Innenwiderstand $R_i = R_{i,1} + R_{i,2}$ (Abb. 2.12a).

Schaltet man zwei Spannungsquellen parallel (Abb. 2.12b), so fließt in diesen ein Strom vom Betrag $|I| = |U_{0,1} - U_{0,2}|/R_i$. Für ungleiche Ursprungungen und kleine Innenwiderstände wird dieser Strom sehr groß, so dass der Leistungsumsatz und damit die Erwärmung zur Zerstörung der Spannungsquellen führen kann. Die Parallelschaltung von Spannungsquellen mit deutlich unterschiedlicher Leerlaufspannung sollte deshalb unterbleiben.

Batterien bzw. Akkumulatoren unterschiedlicher Bauart, z. B. Nickel-Metall-Hybrid- ($U_{0,1} \approx 1,2\text{ V}$) und alkalische Akkumulatoren ($U_{0,2} \approx 1,5\text{ V}$), sollten nicht parallel geschaltet werden, weil dann die Spannungsdifferenz, $U_{0,2} - U_{0,1} \approx 0,3\text{ V}$, auch ohne äußere Beschaltung einen Entladestrom hervorruft. Ihre Reihenschaltung ist aus dieser Sicht zwar erlaubt, allerdings sollten immer nur Akkumulatoren annähernd gleicher Ladungsmenge (zumeist angegeben in Einheiten von mAh) in Reihe geschaltet werden, andernfalls wäre der Akkumulator mit der geringsten Ladung zuerst entladen und würde sogar bei weiterer Verwendung des Akkupacks stark unterladen werden können, was ihn schließlich zerstört.

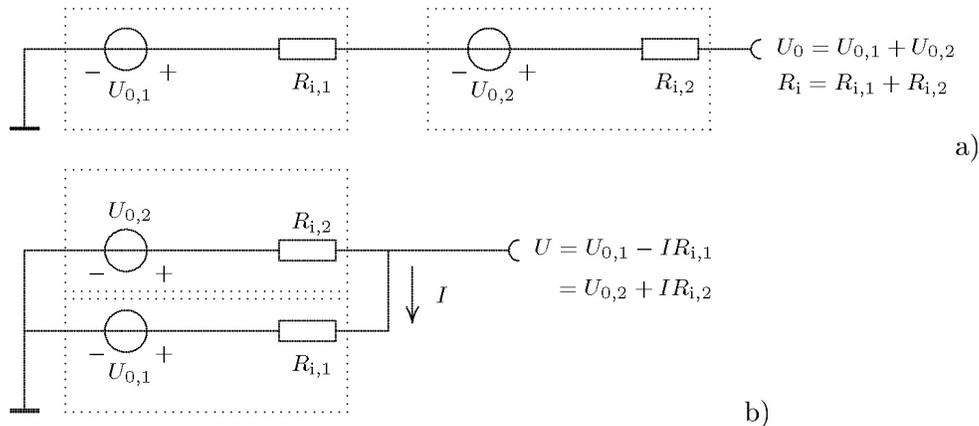
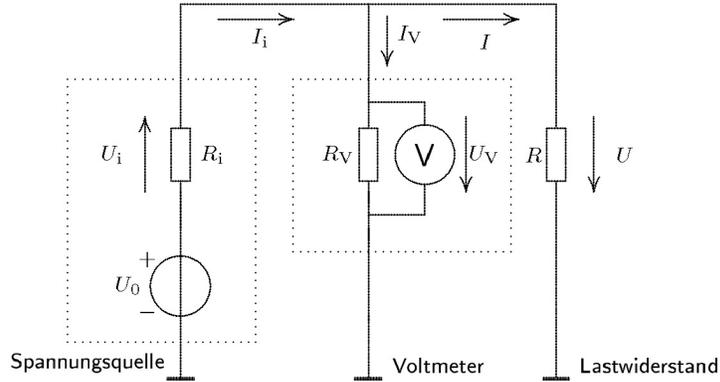


Abb. 2.12: (a) Reihen- und (b) Parallelschaltung von Spannungsquellen. Bei der Parallelschaltung fließt auch ohne äußere Last ein Strom I , wenn die Ursprungungen $U_{0,1}$ und $U_{0,2}$ unterschiedlich groß sind. Sind die Innenwiderstände $R_{i,1}$ und $R_{i,2}$ klein, so kann I sehr groß sein

2.22 Voltmeter

Ein *Voltmeter* dient der Messung der elektrischen Spannung. Der Innenwiderstand R_V eines idealen Voltmeters ist unendlich, so dass es die auszumessende Spannungsquelle nicht belastet (Strom im Voltmeter ist Null). Bei realen (modernen) Voltmetern beträgt der Innenwiderstand jedoch $R_V = 10^5 \dots 10^7 \Omega$.


 Abb. 2.13: Spannungsmessung über einem Lastwiderstand R

Dadurch wird die auszumessende Spannung mehr oder weniger verfälscht, was im Folgenden genauer diskutiert wird.

Eine Spannungsquelle U_0 mit dem Innenwiderstand R_i werde mit einem Widerstand R belastet. Dann fließt durch R der Strom $I = U_0/(R + R_i)$. Der Spannungsabfall über R ist dann $U = RI = U_0R/(R + R_i)$. Schaltet man nun ein Voltmeter parallel zum Lastwiderstand und damit auch parallel zur Spannungsquelle, so ändert sich der Strom I , weil durch das Voltmeter der Strom I_V fließt (Abb. 2.13). Es gilt nun

$$I_i = \frac{1}{R \parallel R_V + R_i} U_0 = \frac{R + R_V}{RR_V + R_i(R + R_V)} U_0 .$$

Die gemessene Spannung ist demzufolge

$$U_V = U_0 - I_i R_i = \frac{R}{R + R_i + RR_i/R_V} U_0 . \quad (2.23)$$

Der Betrag ΔU_V , um den die Spannung U über R durch Zuschalten des Voltmeters zu klein gemessen wird, bezogen auf die Leerlaufspannung U_0 , ist demzufolge

$$\frac{\Delta U_V}{U_0} = \frac{R}{R + R_i} - \frac{R}{R + R_i + RR_i/R_V} = \frac{R^2 R_i}{R_V (R + R_i)^2 + R^2 R_i + RR_i^2} . \quad (2.24)$$

Ist der Innenwiderstand R_V des Voltmeters groß gegenüber dem Produkt RR_i aus Last- und Innenwiderstand der Spannungsquelle, so hat das Voltmeter einen nur geringen Einfluß auf die Spannungsmessung. Im Spezialfall der Leistungsanpassung ($R = R_i$) gilt,

$$\frac{\Delta U_V}{U_0} = \frac{R}{4R_V + 2R} .$$

2.23 Amperemeter

Ein *Amperemeter* dient der Messung der elektrischen Stromstärke. Es wird in Reihe in den Strompfad geschaltet, der dazu aufgetrennt werden muss. Ein ideales Amperemeter hat den Innenwiderstand Null, $R_A = 0$, so dass über dem Messinstrument selbst keine Spannung abfällt und demzufolge auch die

Stromstärke $I = U_0/(R_i + R)$ im Lastwiderstand R durch Zuschalten des Amperemeters nicht verändert wird (Abb. 2.14).

Ein reales Amperemeter, etwa als Bestandteil eines modernen Digitalmultimeters, hat allerdings einen nicht verschwindenden Innenwiderstand, der bis zu einige $100\ \Omega$ betragen kann, abhängig vom Messbereich. Der Strom im Messkreis beträgt dann

$$I = \frac{U_0}{R_i + R + R_A} .$$

Bei Zuschalten des Amperemeters nimmt also der Strom I im Messkreis um den Betrag

$$\Delta I_A = \frac{U_0}{R_i + R} - \frac{U_0}{R_i + R + R_A} = \frac{U_0}{R_i + R + (R_i + R)^2/R_A} \quad (2.25)$$

ab. Ist R_A klein gegen R oder R_i , so ist der Einfluss des Amperemeters gering und möglicherweise vernachlässigbar. Für $R = R_i$ gilt

$$\Delta I_A = \frac{U_0}{2R} \frac{R_A}{2R + R_A} .$$

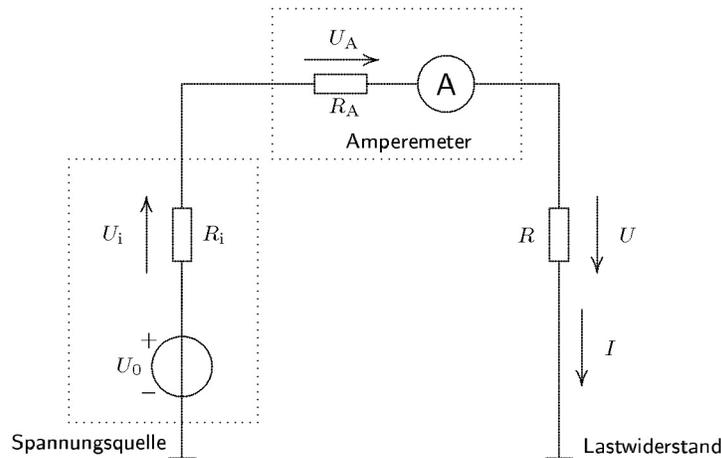


Abb. 2.14: Messung der Stromstärke in einem Lastwiderstand R

2.24 Gleichzeitige Messung von Strom und Spannung

Häufig werden Strom und Spannung an einem Lastwiderstand R gleichzeitig gemessen. Dies ist beispielsweise bei der Aufnahme von Kennlinien der Fall (U/I -Charakteristik). Dafür gibt es zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten:

Spannungsrichtige Messung (Abb. 2.15a)

Hier ist die Messspannung U_V gleich der über dem Lastwiderstand R abfallenden Spannung U . Allerdings wird der tatsächliche Strom I durch R mit I_A zu groß gemessen, weil der Bruchteil $I_V = \frac{U_V}{R_V}$ durch das Voltmeter fließt. Folglich muss hier wie folgt korrigiert werden:

$$I = I_A - \frac{U_V}{R_V} = I_A \left(1 - \frac{I_V}{I_A} \right) , \quad (2.26)$$

was voraussetzt, dass neben den gemessenen Größen I_A und U_V auch der Innenwiderstand R_V des Voltmeters bekannt ist. Für $I_V \ll I_A$, also $R \ll R_V$, kann die Korrektur zumeist vernachlässigt werden.

Stromrichtige Messung (Abb. 2.15b)

Hier ist der Messstrom I_A gleich dem Strom I im Lastwiderstand R , jedoch ist die Messspannung U_V größer als die Spannung U über R , weil über dem Innenwiderstand R_A des Amperemeters die Spannung $U_A = I_A R_A$ abfällt. Die Spannung über R kann jedoch aus den Messgrößen U_V und I_A berechnet werden, falls R_A bekannt ist,

$$U = U_V - I_A R_A = U_V \left(1 - \frac{U_A}{U_V} \right) . \quad (2.27)$$

Die Korrektur ist für $U_A \ll U_V$, also $R_A \ll R$, praktisch unbedeutend.

Strommesser werden nieder- und Voltmeter hochohmig gebaut. Misst man also bei großen Widerständen ($R \gg R_A$) strom- und bei kleinen ($R \ll R_V$) spannungsrichtig, so ist die Spannungs- bzw. Stromkorrektur praktisch zumeist vernachlässigbar.

2.25 Spannungsteiler und Potentiometerschaltung

Über der Reihenschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 möge die Spannung U_0 abfallen (Abb. 2.16a). Dann fällt über R_1 die Spannung

$$U_1 = \alpha U_0 , \quad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} , \quad (2.28)$$

ab, also der Bruchteil α von U_0 , mit $\alpha = 0 \dots 1$. Dies nennt man *Spannungsteiler* oder auch *Potentiometerschaltung*.

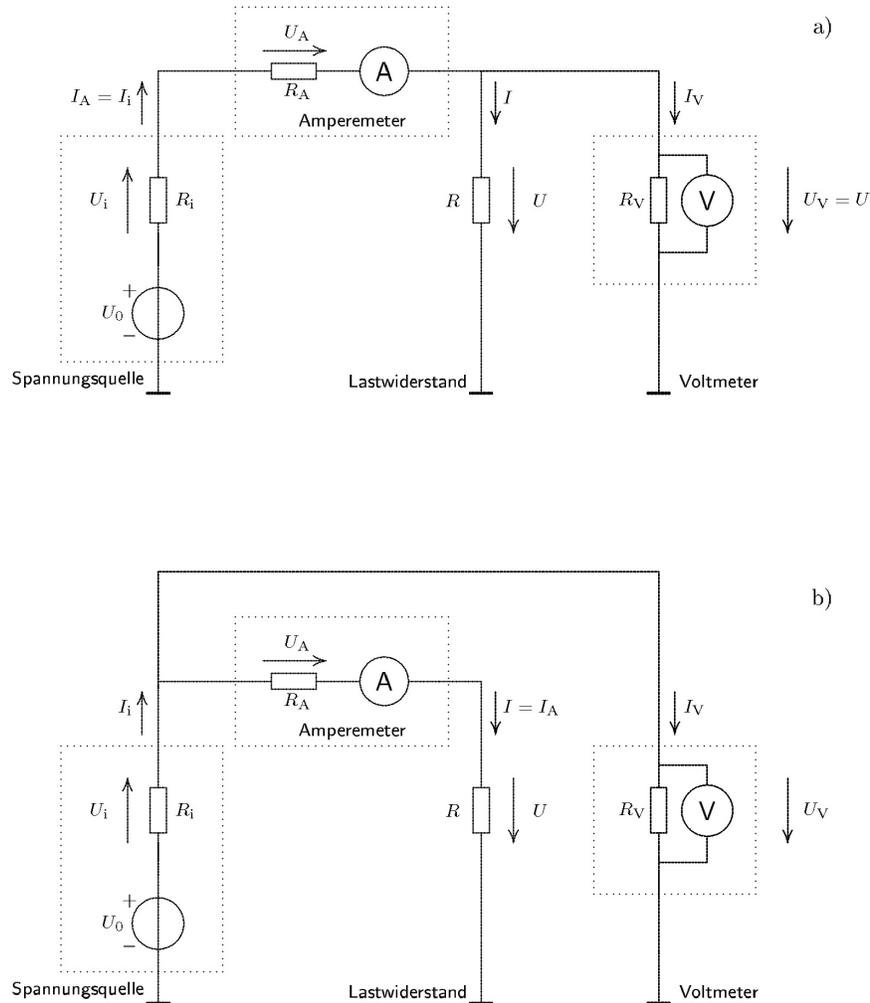
Sind die Widerstände zwei Teilstücke eines Drahtes der Gesamtlänge L , dann fällt über einem Teilstück der Länge l die folgende Teilerspannung ab,

$$U_1 = \frac{l}{L} U_0 , \quad \text{mit } l = 0 \dots L .$$

Variiert man nun l , etwa durch Verschieben eines Schleifers, so kann man bequem U_1 im Bereich $0 \dots U_0$ ändern. Der Schleifer wird als Pfeil gezeichnet (Abb. 2.16b).

Anstelle des unhandlichen Drahtes verwendet man in der Technik zumeist dünne Schichten aus Kohlenstoff oder Metalloxid, die auf einen isolierenden Grundkörper in einem Kreisbogen aufgedampft sind, und auf denen der Schleifer gedreht werden kann. Dieser Aufbau ist zumeist gekapselt, zum Schutz der Widerstandsschicht. Einfache Geräte dieser Art heißen *Regelwiderstand*, mechanisch aufwendigere *Potentiometer*. Einige Präzisions-Potentiometer haben ein Schneckengetriebe, so dass z. B. 10 Umdrehungen der Drehachse den gesamten Regelbereich überstreichen. Damit kann sehr bequem eine Feinabstimmung erfolgen. Daneben finden aber auch noch Drahtpotentiometer Verwendung, wobei aber der Draht auf einen Keramikkörper gewickelt ist, und der Schleifer immer nur in kleinen Stufen $\Delta l > 0$, der Länge einer Wicklung, verstellt werden kann.

Wird an ein Potentiometer die Spannung U mit einer niederohmigen Spannungsquelle gelegt und liegt zwischen dem Schleifer und der Masse (an der Buchse U_1) ein niederohmiger Lastwiderstand, so fließt beim Verschieben des Schleifers in Richtung Spannungsquelle (in Abb. 2.16b) nach oben) ein immer

Abb. 2.15: (a) Spannungs- und (b) stromrichtige Messung an einem Lastwiderstand R

größerer Strom, der schließlich die Widerstandsschicht zwischen dem Schleifer und der Buchse U so stark erwärmen kann, daß sie zerstört wird. Potentiometer dürfen deshalb nicht zu niederohmig belastet werden.

2.26 Spannungsteiler unter Last

Die Teilerspannung U_1 eines Potentiometers (bzw. Spannungsteilers, Abb. 2.16) hängt nur vom Widerstandsverhältnis R_2/R_1 ab. Das wird deutlich, wenn (2.28) wie folgt umgeschrieben wird, $U_1 = U_0(1 + R_2/R_1)^{-1}$. Darüber hinaus kann der Energieumsatz $P = U_0^2/(R_1 + R_2)$ am Spannungsteiler durch hochohmige Widerstände beliebig klein gehalten werden, ohne U_1 zu ändern, solange nur das Widerstandsverhältnis gewahrt bleibt. Dies ist zunächst vorteilhaft. Wird aber der Spannungsteiler mit einem Lastwiderstand R beschaltet (parallel zu R_1), so würde U_1 zusammenbrechen, wenn der Teiler im Vergleich zu R allzu hochohmig ist (Abb. 2.17).

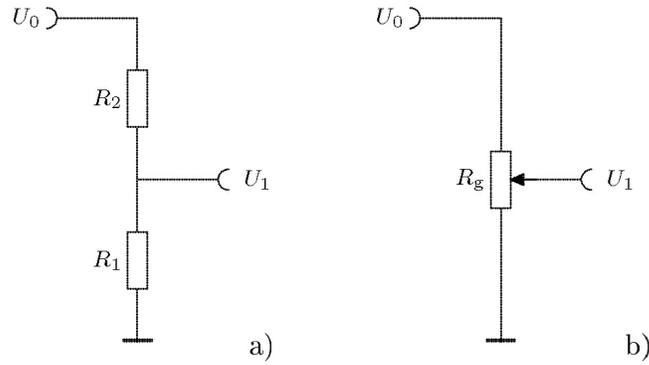


Abb. 2.16: Spannungsteiler aus (a) Festwiderständen und (b) Potentiometer (Regelwiderstand)

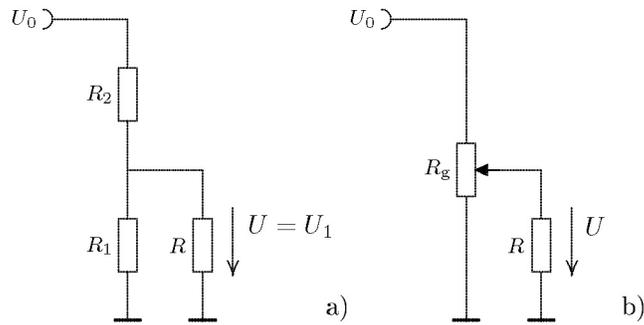


Abb. 2.17: Mit R belasteter Spannungsteiler aus (a) Festwiderständen und (b) Potentiometer (Regelwiderstand)

Allgemein tritt für den belasteten Spannungsteiler anstelle von (2.28),

$$U_1 = \frac{R_1 \parallel R}{R_1 \parallel R + R_2} U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R} U_0 \quad (2.29)$$

Die Situation ist der Spannungsmessung in Abb. 2.13 ähnlich, wenn man (R_i, R, R_V) durch (R_2, R_1, R) ersetzt. Die Rolle des Voltmeters ist dann die der Last.

Mit den Bezeichnern

$$R_g = R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

für den Gesamtwiderstand bzw. für das Teilverhältnis erhält man

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\alpha}{1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{R_g}{R}} \quad (2.30)$$

Ist $\alpha(1 - \alpha) \frac{R_g}{R}$ klein gegen eins, so gilt $U_1 \approx \alpha U_0$, die Teilerspannung (2.28) ist also durch die Last R kaum verringert. Dies ist der Fall, wenn z.B. R groß gegen R_g ist oder wenn der Term $\alpha(1 - \alpha) \in [0, 1/4]$ für $\alpha \gtrsim 0$ oder $\alpha \lesssim 1$ sehr klein ist.

Für $\alpha = 1/2$, (1 : 2)-Teiler, wird $\alpha(1 - \alpha) = 1/4$. Dies ist der Maximalwert für $\alpha(1 - \alpha)$, was zugleich die relative Abweichung vom unbelasteten Fall, also $U_1/\alpha U_0$, maximiert. Es gilt hier

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{2R}{4R + R_g} \quad (2.31)$$

Die Änderung der Teilerspannung (2.28) bei Zuschalten der Last R beträgt $\Delta U_1 = \alpha U_0 - U_1$, mit U_1 aus (2.30). Somit gilt

$$\frac{\Delta U_1}{U_0} = \alpha - \frac{\alpha}{1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{R_g}{R}} = \frac{\alpha^2(1 - \alpha)}{\frac{R}{R_g} + \alpha(1 - \alpha)} . \quad (2.32)$$

Für $\alpha = 1/2$ geht dies über in

$$\frac{\Delta U_1}{U_0} = \frac{R_g}{8R + 2R_g} . \quad (2.33)$$

Man sieht aus (2.30), dass für einen kleinen Gesamtwiderstand R_g die Teilerspannung U_1 beliebig nahe dem unbelasteten Wert αU_0 kommt, allerdings steigt dabei der Energieumsatz im Potentiometer stark an. Will man beispielsweise mit einem Potentiometer eine regelbare Spannungsquelle aufbauen, mit dem Regelbereich $U_1 = 0 \dots U_0$, dann darf man R_g nicht zu hoch ohmig wählen. Entsprechende Potentiometer werden z.B. aus einem Widerstandsdraht gefertigt, der auf einen Grundkörper aus Keramik gewickelt ist. Derartige Aufbauten sind kostenintensiv und nehmen viel Platz in Anspruch. Eleganter ist hingegen der Aufbau mit einem elektronischen Regler, was hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.

2.27 Messung des Innenwiderstands eines Voltmeters

Wählt man beim Spannungsteiler in Abb. 2.16a $R_1 = R_2 = R$ (Teilerverhältnis $\alpha = 1/2$), dann liegt über R_1 die Spannung $U_1 = U_0/2$. Belastet man ihn nun mit einem Voltmeter (Innenwiderstand R_V), ersetzt man also in Abb. 2.17a R durch R_V , dann erhält man unter Beachtung von (2.31) (nun mit den Bezeichnungen $R \rightarrow R_V$ und $R_g \rightarrow 2R$)

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{2R_V}{4R_V + 2R} .$$

Umgestellt, erhält man

$$R_V = \frac{U_1}{U_0 - 2U_1} R . \quad (2.34)$$

Sind die Ursprungspannung U_0 und der Widerstand R des $1/2$ -Teilers bekannt, so kann also aus der am Voltmeter angezeigten Spannung U_1 der Innenwiderstand R_V desselben Voltmeters berechnet werden. In der Praxis sollte man R etwa in der Größe des zu erwartenden Wertes für R_V wählen.

2.28 Stromquelle

Eine ideale *Stromquelle* liefert unabhängig vom Lastwiderstand R eine feste Stromstärke I . Ihr Innenwiderstand ist unendlich groß. Praktisch kann man sie sich auch als Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand R_i vorstellen, der groß im Vergleich zur Last R ist, $R \ll R_i$ (Abb. 2.11). Für den Strom gilt hier

$$I = \frac{U_0}{R + R_i} = \frac{U_0/R_i}{1 + R/R_i} \approx \frac{U_0}{R_i} \cdot \left(1 - \frac{R}{R_i}\right) .$$

Bei $R^{-1} = G = +\infty$ (Leitwert unendlich) fließt dann der *Urstrom* $I_0 = U_0/R_i$. Solange R klein gegenüber R_i ist, gilt $I \approx I_0$. Beispielsweise erhält man für $U_0 = 10 \text{ V}$ und $R_i = 10^5 \Omega$ den Urstrom $I_0 = 10^{-4} \text{ A}$, und für Lasten $R < R_i/100 = 1 \text{ k}\Omega$ weicht I um weniger als 1% von I_0 ab. Größere Urströme I_0 werden hier mit größeren Ursprungspannungen U_0 erreicht. In der Praxis baut man jedoch Stromquellen mit komplexeren elektronischen Schaltungen auf.

Die Beschreibung elektrischer Schaltungen mit Spannungen und Widerständen kann als weitgehend analog zur Beschreibung mit Strömen und Leitwerten angesehen werden. Die unbelastete Stromquelle ist dann die Belastung mit einem unendlich großen Leitwert, ebenso, wie die unbelastete Spannungsquelle die Belastung mit einem unendlich großen Widerstandswert ist.

2.29 Messung des Innenwiderstands eines Amperemeters

Die Messung des Innenwiderstands R_A eines Amperemeters wird hier auf die Messung zweier Spannungen zurückgeführt. Die verwendete Schaltung in Abb. 2.18 besteht aus den Widerständen R_0 und R , die einen Spannungsteiler bilden. Die Teilerspannung U über R wird mit einem Voltmeter gemessen, das den Spannungsteiler mit seinem Innenwiderstand R_V belastet. Die Messspannung beträgt dann nach (2.29)

$$U = \frac{R \parallel R_V}{R \parallel R_V + R_0} U_0 .$$

Wird nun das Amperemeter als weitere Last parallel zum Voltmeter bzw. zu R geschaltet, dann verringert sich die Messspannung auf

$$U^* = \frac{R \parallel R_V \parallel R_A}{R \parallel R_V \parallel R_A + R_0} U_0 .$$

Eliminiert man U_0 , dann folgt

$$U^* = \frac{R \parallel R_V \parallel R_A}{R \parallel R_V \parallel R_A + R_0} \frac{R \parallel R_V + R_0}{R \parallel R_V} U .$$

Dies könnte nun nach R_A aufgelöst werden. Die Rechnung vereinfacht sich jedoch, wenn R etwa so groß gewählt wird, wie der erwartete Wert von R_A , und R_0 bedeutend größer als R , aber noch klein gegen R_V . Es gelte also insgesamt

$$R_A \approx R \ll R_0 \ll R_V . \quad (2.35)$$

Dann folgt

$$U^* \approx \frac{R \parallel R_A}{R \parallel R_A + R_0} \frac{R + R_0}{R} U .$$

und nach R_A umgestellt,

$$R_A \approx \frac{U^*}{U - U^*} R . \quad (2.36)$$

Unter der Bedingung (2.35) kann also die Messung des Innenwiderstands R_A auf die Messung zweier Spannungen, U und U^* , zurückgeführt werden, wobei R als bekannt vorausgesetzt wird.

Der Gesamtstrom ist wesentlich durch R_0 bestimmt, $I_0 \approx U_0/R_0$. Er sollte etwa halb so groß wie der Messbereich des Amperemeters sein. Den Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle kann man formal zu R_0 hinzuzählen, weil er in Reihe mit R_0 liegt. (Für $R_i \ll R_0$ ist dies aber bedeutungslos.)

Auf die Formel (2.36) kommt man auch, wenn mit Leitwerten $G = 1/R$ und $G_A = 1/R_A$ gerechnet wird: Unter der Bedingung (2.35) kann die Messschaltung als Stromquelle mit dem Urstrom $I_0 = U_0/R_0$ angesehen werden, der bei geöffnetem Schalter über R die Spannung $U \approx RI_0$ abfallen lässt. Bei geschlossenem Schalter fließt über R nur noch der Teilstrom $I_0 G/(G + G_A)$, entsprechend dem relativen Leitwert dieses Strompfades. Der entsprechende Spannungsabfall über R ist dann

$$U^* \approx \frac{G}{G + G_A} I_0 R \approx \frac{G}{G + G_A} U .$$

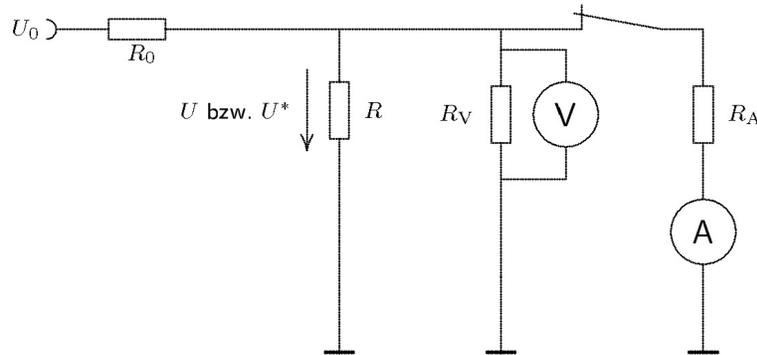


Abb. 2.18: Schaltung zur Messung des Innenwiderstands R_A des Amperemeters nach (2.36) unter den Bedingungen (2.35). Bei geöffnetem Schalter wird am Voltmeter die Spannung U gemessen und bei geschlossenem Schalter U^*

Daraus folgt wiederum (2.36).

Nach den allgemeinen Ausführungen zu Stromquellen (S. 31) ändert sich für $R \ll R_0$ der Gesamtstrom I_0 bei Zuschalten des Amperemeters um weniger als $I_0 \cdot R/R_0$. Daraus folgt der Näherungsfehler $\Delta U^* \approx U^* \cdot R/R_0$. Ein kleiner Fehler ΔU^* zieht für R_A den Fehler

$$\Delta R_A = \left| \frac{dR_A}{dU^*} \right| \Delta U^* = \left| \frac{U}{U^2 - 2UU^* + U^{*2}} \right| \Delta U^* R$$

nach. Wegen $R_A \approx R$ gilt $U^* \approx U/2$ und somit

$$\Delta R_A \approx \frac{2R}{R_0} R . \quad (2.37)$$

Dies ist der maximale Fehler für R_A infolge der rechnerischen Vereinfachungen, die zur Gleichung (2.36) führten.

2.30 Elektrische Schaltung und Kabel

Eine elektrische Schaltung ist eine Anordnung von verschiedenen Bauelementen, wie z. B. Spannungsquellen, Widerstände, Kondensatoren und Messgeräte, die mit elektrisch leitenden Drähten, so genannten *Kabeln*, verbunden sind. Ideale Kabel haben einen Widerstand Null, folglich fällt über sie keine Spannung ab. Reale Kabel haben einen von Null verschiedenen, in der Regel aber vernachlässigbar kleinen Widerstand. Ist ein Kabel in Reihe mit einem anderen Widerstand geschaltet, so kann der Kabelwiderstand auch zu diesem Widerstand hinzugerechnet werden. Beispielsweise kann bei einer Spannungsquelle oder einem Amperemeter der Kabelwiderstand zum Innenwiderstand dieser Geräte zugerechnet werden.

2.31 Umladung eines Kondensators

Aufladung Wird an einen (ungeladenen) Kondensator C über einen Vorwiderstand R die Spannung U_0 gelegt, so lädt sich der Kondensator auf (Abb. 2.19). Dieser Umladevorgang vollzieht sich jedoch nicht plötzlich. Um die Umladekurve $U(t)$, also die zeitliche Abhängigkeit der Spannung über dem Kondensator, zu bestimmen, geht man wie folgt vor: Zu einem beliebigen Zeitpunkt t des Aufladevorgangs liegt am Kondensator die Spannung $U(t)$. Dann fällt über R die Spannung $U_0 - U(t)$ ab, welche den momentanen

Strom $I(t) = [U_0 - U(t)]/R$ auf den Kondensator fließen lässt. In der (kurzen) Zeitspanne Δt fließt dann die Ladungsmenge $\Delta Q(t) = I(t) \cdot \Delta t = [U_0 - U(t)]/R \cdot \Delta t$ auf den Kondensator. Dies bedingt die momentane Spannungsänderung

$$\Delta U(t) = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{U_0 - U(t)}{RC} \Delta t$$

über dem Kondensator. Dividiert man nun beide Seiten durch Δt und macht den Grenzübergang zu infinitesimalen Zeitspannen, $\Delta t \rightarrow 0$, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_0 - U(t)}{RC} . \tag{2.38}$$

Die gesuchte Funktion $U(t)$ muss diese Gleichung erfüllen und zur Anfangszeit $t = 0$ die Anfangsspannung $U(t = 0)$ ergeben, die hier Null gesetzt wird (Kondensator anfangs ungeladenen). Die einzige Funktion, welche dies erfüllt, ist

$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) , \quad t \geq 0 \tag{2.39}$$

Die Aufladung des Kondensators erfolgt also nach einer Exponentialfunktion (Abb. 2.19, rechts). Die Geschwindigkeit der Aufladung wird durch die Zeitkonstante

$$\tau = RC$$

bestimmt. Je größer sie ist, desto langsamer vollzieht sich die Aufladung. Nach der Zeit τ liegt über dem Kondensator die Spannung $U(t) = U_0(1 - e^{-1}) \approx 0,63U_0$. Streng genommen ist der Umladevorgang erst nach unendlicher langer Zeit abgeschlossen, aber schon nach der Zeit $t = 3\tau$ unterscheidet sich $U(t)$ um weniger als 5% von U_0 .

Entladung Liegt über dem Kondensator zur Anfangszeit $t = 0$ die Spannung U_0 und wird dieser über den Vorwiderstand R entladen. Bezeichne $U(t) = I(t) \cdot R$ die Spannung zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Dann ändert sich die Spannung innerhalb einer (kurzen) Zeitspanne $t \dots t + \Delta t$ um den Wert

$$\Delta U(t) = -\frac{\Delta Q}{C} = -\frac{I(t) \cdot \Delta t}{C} = -\frac{U(t) \cdot \Delta t}{RC} .$$

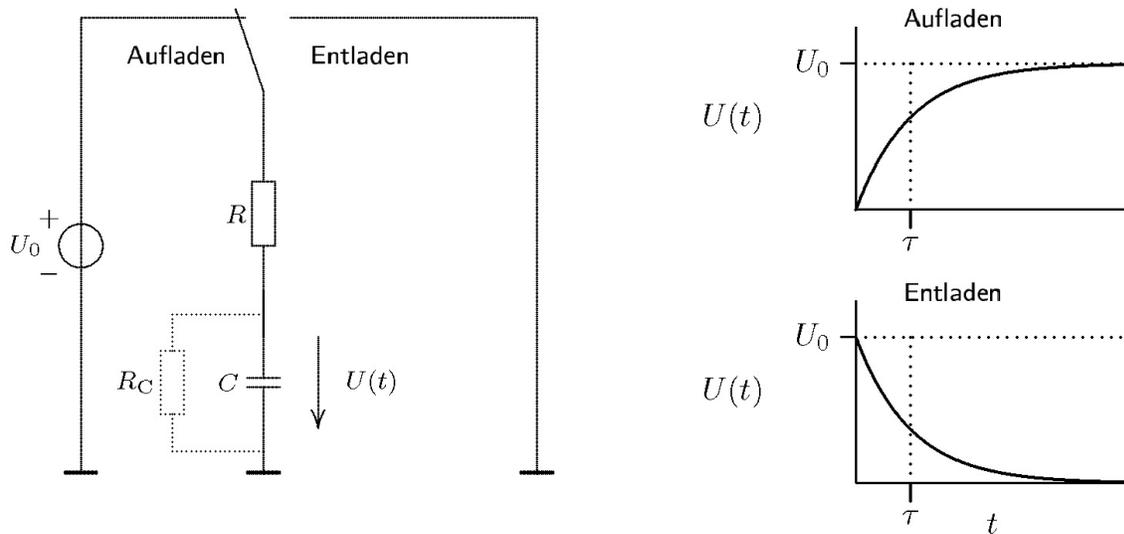
Dies führt für $\Delta t \rightarrow 0$ auf die Differentialgleichung.

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{U(t)}{RC} ,$$

mit der Lösung (Entladefunktion)

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} , \quad t \geq 0 \tag{2.40}$$

Die Spannung fällt somit ebenso exponentiell. Nach der Zeit τ ist sie auf das $(1/e)$ -Fache der Anfangsspannung U_0 gesunken, wobei $1/e \approx 0,37 \approx 1/3$.

Abb. 2.19: Auf- bzw. Entladung einer Kapazität C über einen Vorwiderstand R und der Spannung U_0

Umladung eines realen Kondensators Nach Abb. 2.8c ist ein realer Kondensator die Parallelschaltung eines idealen Kondensators C mit einem Widerstand $R_C < +\infty$. Dadurch fließt während der Umladung in der Zeit Δt die Ladung $(U(t)/R_C) \cdot \Delta t$ ab, um welche die Ladungsänderung ΔQ auf der Kapazität gegenüber dem oben betrachteten Fall, $R_C = \infty$, verringert wird. Die momentane Spannungsänderung auf dem Kondensator ist nun

$$\Delta U(t) = \frac{1}{C} \left(\frac{U_0 - U(t)}{R} - \frac{U(t)}{R_C} \right) \Delta t ,$$

was für $\Delta t \rightarrow 0$ die folgende Differentialgleichung liefert,

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_0}{RC} - \frac{U(t)}{\alpha RC} , \quad \text{mit } \alpha = \frac{R_C}{R + R_C} .$$

liefert. Für die Anfangsbedingung $U(0) = 0$ hat sie die (eindeutige) Lösung

$$U(t) = \alpha U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha RC}} \right) , \quad t \geq 0 \quad (2.41)$$

Nun wird asymptotisch nur noch der Bruchteil αU_0 der angelegten Spannung erreicht, was der Teilerspannung von R und R_C entspricht.

Bei der Entladung eines Kondensators kann man sich R_C parallel zu R geschaltet denken. Folglich tritt nun anstelle von R in (2.40) der Term $R \parallel R_C = RR_C / (R + R_C) = \alpha R$. Beginnt die Umladung bei der Spannung $U(0) = \alpha U_0$, erhält man die Entladekurve

$$U(t) = \alpha U_0 e^{-\frac{t}{\alpha RC}} , \quad t \geq 0 . \quad (2.42)$$

Bei realen Kondensatoren ist also die Zeitkonstante um den Faktor α geringer als für einen idealen Kondensator ($R_C = +\infty$). Für $R_C \rightarrow +\infty$ gilt $\alpha \rightarrow 1$, so dass (2.41) und (2.42) in (2.39) bzw. (2.40) übergehen.

Misst man während der Umladung die Spannung $U(t)$ über dem Kondensator mit einem Voltmeter oder einem Oszillographen, dann muss man sich den Innenwiderstand R_V des Messgerätes zu R_C parallel geschaltet denken. Folglich gelten dann

$$\alpha = \frac{R_C \parallel R_V}{R + R_C \parallel R_V} = \frac{R_C R_V}{(R_C + R_V)R + R_C R_V} ,$$

und umgestellt

$$R_C = \frac{R R_V}{(1/\alpha - 1)R_V - R} . \quad (2.43)$$

Ansteuerung eines Kondensators mit einem Rechtecksignal Wird in der Schaltung in Abb. 2.19 anstelle der Gleichspannung eine veränderliche Spannung in Form eines Rechtecksignals

$$U_0(t) = \begin{cases} A & : m \cdot T < t \leq (m + 1/2) \cdot T , \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ -A & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.44)$$

verwendet, mit der Periodendauer T und der Amplitude A , so wird der Kondensator ständig umgeladen (Abb. 2.20). Dabei schwankt die Spannung zwischen $\pm U_{\max}$. Die Entladung beginnt bei $U(t = 0) = +U_{\max}$. Unter Beachtung von (2.40) folgt,

$$U(t = T/2) = -U_{\max} = -A + (U_{\max} + A) e^{-\frac{T/2}{RC}} .$$

Daraus kann U_{\max} berechnet werden,

$$U_{\max} = A \frac{1 - e^{-\frac{T/2}{RC}}}{1 + e^{-\frac{T/2}{RC}}} . \quad (2.45)$$

Wird die Periode T kleiner, bzw. die Frequenz $f = T^{-1}$ größer, was einem schnelleren Wechsel der Rechteckspannung entspricht, so verringert sich U_{\max} . Für $f \rightarrow +\infty$ strebt sie gegen Null. Die rechteckige Kurvenform von $U_0(t)$ geht dabei in die Dreiecksform von $U(t)$ über. Je kleiner die Zeitkonstante $\tau = RC$ bei einer gegebenen Frequenz f ist, desto geringer ist U_{\max} (Abb. 2.20).

Harmonische Ansteuerung eines Kondensators Verwendet man in der Schaltung Abb. 2.19 eine harmonische Spannung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ und der Amplitude A ,

$$U_0(t) = A \cos \omega t ,$$

so erhält man über dem Kondensator die Spannung

$$U(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot \cos \left(\omega t - \arctan(\omega RC) \right) .$$

Gegenüber $U_0(t)$ ist also die Spannung am Kondensator in der Amplitude um den Faktor

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (2.46)$$

abgeschwächt, und in der Phase um

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

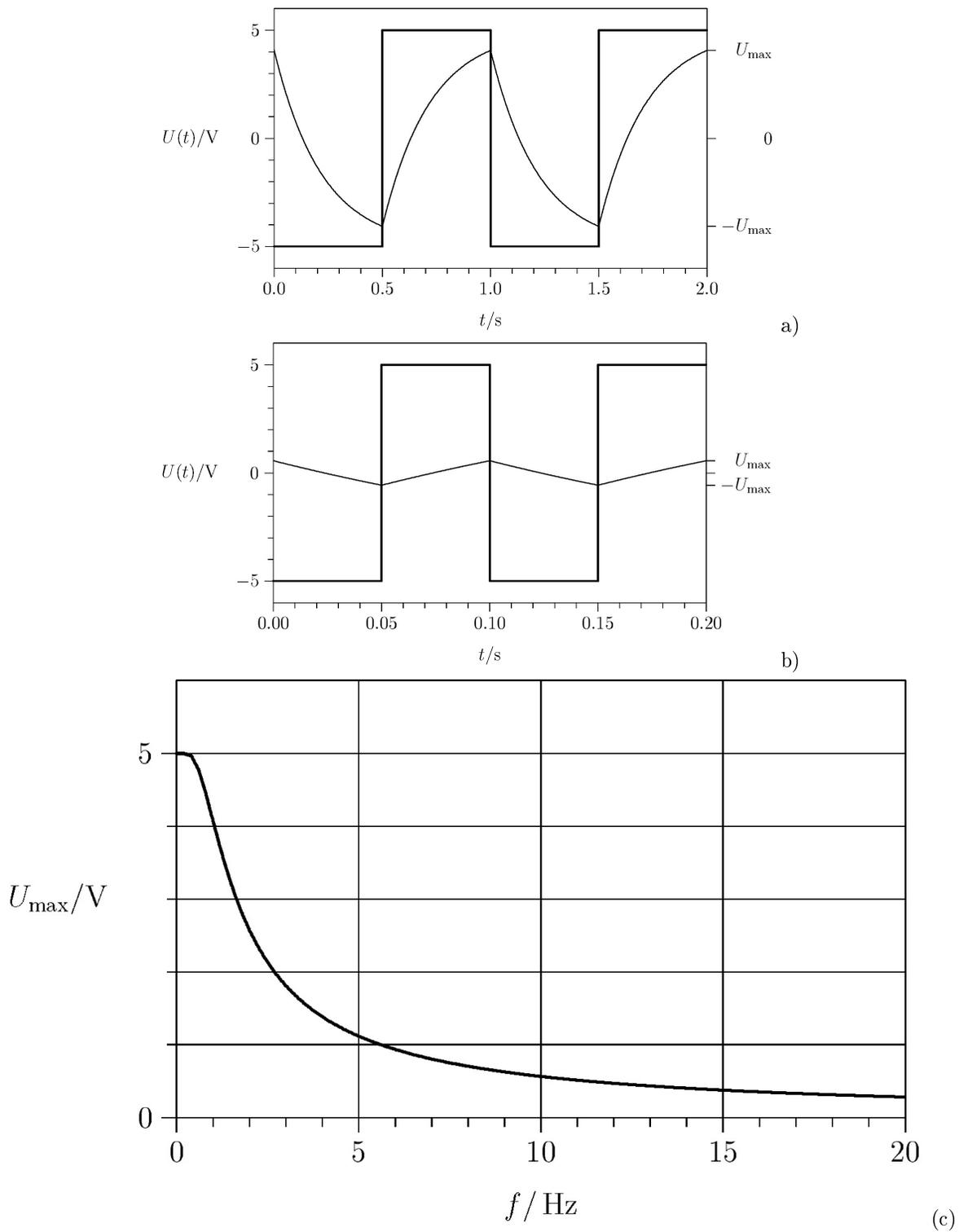


Abb. 2.20: a) und b): Spannung $U(t)$ über einem Kondensator (dünne Linie) bei Ansteuerung mit einem Rechtecksignal (dicke Linie) nach Abb. 2.19 ($C = 220\mu\text{F}$, $R = 1\text{k}\Omega$, $A = 5\text{V}$, (a) $f = 1\text{Hz}$, (b) $f = 10\text{Hz}$). c): Maximalwert (2.45) der Spannung $U(t)$ über dem Kondensator als Funktion der Frequenz f

verschoben.

Bei der sogenannten *Grenzfrequenz*

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.47)$$

gelten

$$G(2\pi f_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \varphi(2\pi f_0) = -\pi/4 . \quad (2.48)$$

Für schnell veränderliche Spannungen mit $\omega RC \gg 1$ gilt

$$U(t) \approx \frac{A}{\omega RC} \cdot \cos(\omega t - \pi/2) .$$

Hochfrequente Spannungen werden also über dem Kondensator stark abgeschwächt und in der Phase um -90° verschoben, mit anderen Worten, $U_0(t)$ eilt $U(t)$ um $T/4$ in der Phase voraus. Wegen der Amplitudenabschwächung benutzt man Kondensatoren zur Unterdrückung schnell veränderlicher Signale, zur sogenannten *Glättung* bzw. *Tiefpassfilterung*.

2.32 Spannungsmessung mit Kompensationsmethode

Nach (2.22) könnte die Urspannung $U_0 = I_K R_i$ einer Spannungsquelle aus dem Kurzschlussstrom I_K und dem Innenwiderstand R_i bestimmt werden. Will man jedoch, etwa zum Schutz der Spannungsquelle, den Kurzschluss vermeiden, oder ist R_i sehr groß und vielleicht auch unbekannt, so bietet sich eine Kompensationsmethode an (Abb. 2.21): Regelt man mit dem Potentiometer den Strom I auf Null, so kann am Voltmeter unmittelbar die Urspannung U_0 abgelesen werden. Im abgeglichenen Zustand wird die unbekannte Spannungsquelle nicht belastet.

Die Spannung U ist eine Hilfsspannung, Stromfreiheit kann nur eingeregelt werden, falls $U \geq U_0$ gilt. Den Widerstand R denkt man sich als Reihenschaltung von drei Widerständen: die Innenwiderstände R_A und R_i des Amperemeters bzw. der unbekanntes Spannungsquelle sowie einen Schutzwiderstand R_S . Der Strom durch die unbekannte Spannungsquelle kann somit bei einer beliebigen Einstellung des Potentiometers den Wert

$$I_{\max} = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_A + R_S + R_i}$$

nicht übertreffen. Der Leistungsumsatz in der unbekanntes Spannungsquelle kann demzufolge nicht größer sein als

$$P_{\max} = R_i I_{\max}^2 = \frac{R_i}{(R_A + R_S + R_i)^2} U^2 . \quad (2.49)$$

Die Widerstände R_A und R_i sind fest, jedoch kann der Schutzwiderstand R_S frei verändert werden und mit seiner Vergrößerung P_{\max} zum Schutz der unbekanntes Spannungsquelle gering gehalten werden.

Mit Vergrößerung von R sinkt jedoch die Empfindlichkeit der Strommessung, was wie folgt zu erklären ist: Am Schleifer des Potentiometers liegt die Spannung (vgl. (2.30, S. 30)

$$U_V = \frac{\alpha}{1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{R_g}{R \parallel R_V}} U , \quad (2.50)$$

welche unmittelbar am Voltmeter angezeigt wird. Die Last des Spannungsteilers (Potentiometers) wird durch die Parallelschaltung von $R = R_A + R_S + R_i$ mit dem Innenwiderstand R_V des Voltmeters gebildet. Dabei ist $\alpha = 0 \dots 1$ wiederum das Teilverhältnis, $\alpha = R_1/R_g$, mit dem Teilwiderstand R_1 des

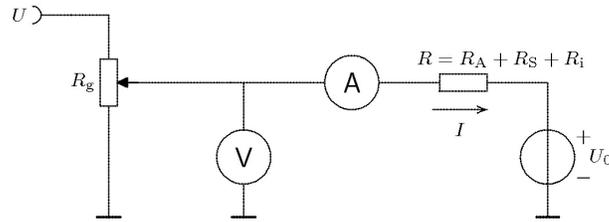


Abb. 2.21: Stromfreie Messung der Ursprungspannung U_0 durch Spannungskompensation. Stellt man das Potentiometer so ein, dass am Amperemeter $I = 0$ angezeigt wird, so gibt das Voltmeter die gesuchte Ursprungspannung U_0 an

Potentiometers vom Schleifer zum Masseanschluss (vgl. Abb. 2.17). Daraus ergibt sich der Strom

$$I(\alpha) = \frac{U_V}{R} = \frac{\alpha}{1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{R_g}{R \parallel R_V}} \frac{U}{R} .$$

Die Empfindlichkeit E der Messung ist hier die Änderung von I bezogen auf eine kleine Änderung der Stellgröße α (entspricht dem relativen Drehwinkel am Potentiometer),

$$E = \frac{dI}{d\alpha} = \frac{1 + \alpha^2 \frac{R_g}{R \parallel R_V}}{\left[1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{R_g}{R \parallel R_V}\right]^2} \frac{U}{R} .$$

Im abgestimmten Zustand ($I = 0$) gilt $U_V = U_0$ und $\alpha = U_0/U$. Unter Beachtung von (2.50) sowie $\alpha = U_0/U$ (gilt nur im abgestimmten Zustand) folgt schließlich

$$E_a = \left(1 + \frac{R_g}{R \parallel R_V} \frac{U_0^2}{U^2}\right) \frac{U}{R} \approx \left(1 + \frac{R_g}{R} \frac{U_0^2}{U^2}\right) \frac{U}{R} \quad \text{mit } R = R_A + R_S + R_i . \quad (2.51)$$

Darin ist die Näherung zulässig, wenn der Innenwiderstand des Voltmeters in der Parallelschaltung mit R vernachlässigt werden kann, also für $R \ll R_V$. Die Empfindlichkeit (im abgestimmten Zustand) steigt mit Verringerung von R . Dem sind jedoch praktische Grenzen gesetzt, denn nur der Schutzwiderstand R_S als Bestandteil von R ist frei wählbar, so dass praktisch immer $R \geq R_A + R_i$ gilt. Verwendet man anstelle eines Amperemeters ein empfindlicheres Galvanometer, das nur Stromfreiheit anzeigt, so tritt an die Stelle von R_A der kleinere Innenwiderstand des Galvanometers. Allerdings ist dies nur für $R_i \lesssim R_A$ sinnvoll.

Die Empfindlichkeit steigt auch, wenn der Spannungsteiler (das Potentiometer) hochohmig ausgelegt wird, $R \ll R_g$. Sie ist aber auch von der Hilfsspannung U abhängig, wobei sie ihr Minimum $E_{\min} = 2U/R$ für $U = \sqrt{\frac{R_g}{R \parallel R_V}} U_0$ annimmt, falls $R \parallel R_V \leq R_g$ und somit $U_0 \leq U$ gilt, so dass ein Abgleich überhaupt erst möglich wird.

2.33 Sensoren

Will man eine physikalische Größe G messen, so wandelt man in modernen Messgeräten G zunächst in eine elektrische Größe G_e , verarbeitet diese dann in einer Messschaltung und bringt sie schließlich zur häufig digitalen Anzeige. Den Wandler $G \rightarrow G_e$ nennt man *Sensor*. Sensoren gibt es z. B. für die physikalischen Größen Temperatur, Druck und Lichtintensität. Elektrische Größen sind z. B. Strom, Spannung oder elektrischer Widerstand. Mögliche nichtlineare Zusammenhänge f zwischen G und G_e können mit der

Messschaltung weitgehend ausgeglichen werden. Wichtig ist allein, dass der Zusammenhang $G_e = f(G)$ streng monoton ist, also f eine eindeutig umkehrbare Funktion ist, die so genannte *Kennlinie* des Sensors. Ruft eine Änderung der physikalischen Größe um ΔG die Änderung der elektrischen um ΔG_e hervor, so gibt der Quotient

$$E(G) = \frac{\Delta G_e}{\Delta G} = \frac{f(G + \Delta G) - f(G)}{\Delta G}$$

die Empfindlichkeit des Sensors an. Im Allgemeinen hängt E vom *Arbeitspunkt* ab. Das ist der Wert G , bei dem die Änderung erfolgt.

Im einfachen Fall einer *linearen Kennlinie* gilt $G_e = f(G) = a \cdot G + b$, mit den Konstanten a , $[a] = [G_e]/[G]$, und b , $[b] = [G_e]$. Die Empfindlichkeit E ist dann gleich a , unabhängig vom Arbeitspunkt.

Kapitel 3

Passive Bauelemente

3.1 Widerstand

3.1.1 Idealer und Realer Widerstand

Ein Bauelement hat den elektrischen *Widerstand* R , wenn der elektrische Strom I , $[I] = \text{A}$, proportional der angelegten Spannung U , $[U] = \text{V}$, ist.

$$U \equiv R \cdot I, \quad [R] = \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}} \quad (3.1)$$

Man spricht dann auch von einem *ohmschen Widerstand*, im Unterschied zu Widerständen, die diese Proportionalität nicht zeigen. Gleichung (3.1) ist das sogenannte *Ohmsche Gesetz*. Es gilt für einen idealen ohmschen Widerstand auch dann, wenn Strom und Spannung beliebig groß sind oder wenn sie sich mit der Zeit t beliebig ändern,

$$U(t) = R \cdot I(t) .$$

Das Schaltsymbol eines ohmschen Widerstands zeigt Bild (3.1).

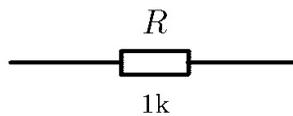


Abb. 3.1: Schaltsymbol eines ohmschen Widerstands. Bei der Angabe des Widerstandwertes wird häufig die Maßeinheit Ω weggelassen, es bedeuten also $1\text{k} = 1\text{k}\Omega$ und $100 = 100\Omega$.

Streng genommen gibt es in der Realität keine ohmschen Widerstände. Dies hat verschiedene Gründe. So wird beispielsweise in einem ohmschen Widerstand die Leistung

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2$$

umgesetzt, d.h., P ist die elektrische Energie, die pro Zeiteinheit im Widerstand in Wärme umgesetzt wird. Damit erhöht sich die Temperatur des Bauelementes und führt möglicherweise zu seiner Zerstörung. Damit dies nicht geschieht, geben Hersteller für die Widerstands-Bauelemente einen höchsten zulässigen

Leistungsumsatz P_{\max} an. Einige Standardbaureihen im Bereich der Schaltelektronik (keine Leistungselektronik) haben zum Beispiel den Wert $P_{\max} = 0,250 \text{ W}$.¹⁾ Bei der Dimensionierung von Schaltungen ist deshalb neben dem Widerstandswert auch immer der maximale Leistungsumsatz zu beachten.

Ein *realer Widerstand* zeigt bei allzu großen sowie bei sich zeitlich schnell veränderlichen Strömen bzw. Spannungen mehr oder weniger große Abweichungen vom Ohmschen Gesetz (3.1). Das Ersatzschaltbild in Abb. 3.2 erfasst insbesondere das Verhalten realer Widerstände bei schnellen Änderungen von I bzw. U .

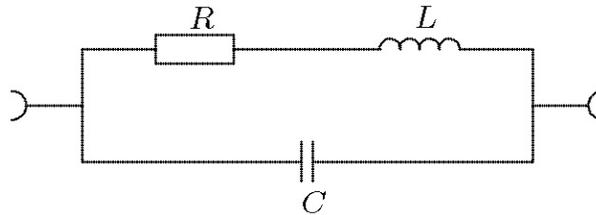


Abb. 3.2: Ersatzschaltbild für einen realen Widerstand

Der „parasitäre Kondensator“ C schließt schnell veränderliche Komponenten von $U(t)$ kurz. Gewissermaßen wird bei hohen Frequenzen der Widerstand kleiner.

Die „parasitäre Induktivität“ L ist besonders groß bei gewickelten Drahtwiderständen, oder auch bei Schichtwiderständen, sofern die Schicht wendelförmig auf einen keramischen Träger aufgebracht ist. Metall- und Kohleschichtwiderständen werden durch Einbrennen solch einer Wendel abgeglichen. Werden ohmsche Widerstände bei sehr hohen Frequenzen benötigt, so sollte eine Widerstandsbauart gewählt werden, bei der die Widerstandsschicht nicht wendelförmig ist. Darüber hinaus sollten die Anschlußdrähte möglichst kurz und wenig gewunden sein.

3.1.2 Temperaturrauschen

Durch die thermische Bewegung von Ladungsträgern (Leitungselektronen) kommt es zu zufälligen elektrischen Spannungsstößen zwischen den Enden eines Leiters bzw. Widerstandes. Die resultierende *Rauschspannung* kann als zufälliges, zeitlich schnell veränderliches Signal $U(t)$ zwischen den Enden des Widerstandes R abgegriffen werden. Das unvermeidliche Rauschen begrenzt die Möglichkeiten der Signalübertragung und einer „sinnvollen“ –verstärkung. Rauschspannungen treten nicht nur bei ohmschen Widerständen auf, sondern prinzipiell in allen elektronischen Bauteilen.

Die zufällige Rauschspannung $U(t)$ ist in guter Näherung normalverteilt, mit dem Mittelwert Null und der Standardabweichung U_{th} . Die entsprechende Wahrscheinlichkeits-Verteilungsdichte ist also

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} U_{\text{th}}} e^{-\frac{u^2}{2U_{\text{th}}^2}} . \tag{3.2}$$

NYQUIST berechnete die *effektive thermische Rauschspannung*

$$U_{\text{th}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot p(u) \, du} = \sqrt{\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} U^2(t) \, dt} . \tag{3.3}$$

¹⁾Solche Widerstände werden im Elektronikpraktikum an der EMAU Greifswald, Institut für Physik verwendet.

Für einen Widerstand R bei der absoluten Temperatur T ist die effektive thermische Rauschspannung in einem beliebigen Frequenzband der Breite B gegeben durch

$$U_{\text{th}} = \sqrt{4kTRB} \quad , \quad (3.4)$$

(Boltzmannkonstante: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K). Für Zimmertemperatur $T = 293\text{K}$ sowie für $R = 1\text{M}\Omega$ und $B = 1\text{MHz}$ erhalten wir

$$U_{\text{th}} \approx 0,127\text{mV} \quad .$$

Bei kleinen Signalen ($< 100\text{mV}$) macht dies immerhin schon mehr als 1‰ der Amplitude des Nutzsignals aus.

Die *effektive thermische Rauschleistung* bestimmt sich aus

$$P_{\text{th}} \equiv U_{\text{th}}^2/R = 4kTB \quad , \quad [P_{\text{th}}] = \text{Ws} \cdot \text{Hz} = \text{W} \quad .$$

Die *effektive spektrale thermische Rauschleistungsdichte* ist

$$P_{\text{th}}^* \equiv P_{\text{th}}/B = 4kT \quad , \quad [P_{\text{th}}^*] = \text{W}/\text{Hz} = \text{Ws} \quad .$$

Rauschspannung und –leistung hängen nicht vom absoluten Wert der Frequenz ab. Letztlich ist dies Ausdruck dafür, dass im Rauschspannungsverlauf keine statistischen Abhängigkeiten auftreten. Die spektrale Rauschleistungsdichte ist also nach NYQUIST über den ganzen Frequenzbereich konstant (frequenzunabhängig). Man nennt solch ein Signal deshalb *Weisses Rauschen*.

Reale Widerstände zeigen allerdings infolge gewisser Quanteneffekte eine endliche obere Grenzfrequenz von ca. 10GHz bei Zimmertemperatur. Die Stärke des Temperaturrauschens ist auch materialabhängig, was ebenso durch die obigen Formeln nicht erfasst wird. Das führt in der Praxis dazu, dass Metallschichtwiderstände gegenüber Kohleschichtwiderständen ein geringeres Temperaturrauschen zeigen.

Will man das Signal–Rausch–Verhältnis in elektronischen Schaltungen klein halten, so darf man sie nach (3.4) nicht unnötig hochohmig dimensionieren. Umgekehrt werden aber bei einer allzu niederohmigen Dimensionierung andere Fehlerquellen auftreten, die mit der Erhöhung der Verlustleistung und folglich mit einer Temperaturerhöhung der Bauelemente zusammenhängen. Letzteres sollte natürlich auch aus Gründen der Energieeffizienz, insbesondere bei batteriebetriebenen Geräten, vermieden werden. Widerstände für größere Verlustleistungen beanspruchen auch mehr Platz auf der Leiterplatte.

3.1.3 Beschriftung

Widerstände werden alphanumerisch beschriftet oder durch einen Farbcode (Farbringe oder –punkte). Bei der alphanumerischen Kennzeichnung wird in der Regel anstelle des Kommas der Multiplikator (Zehnerpotenz) codiert, wie die folgenden Beispiele zeigen:

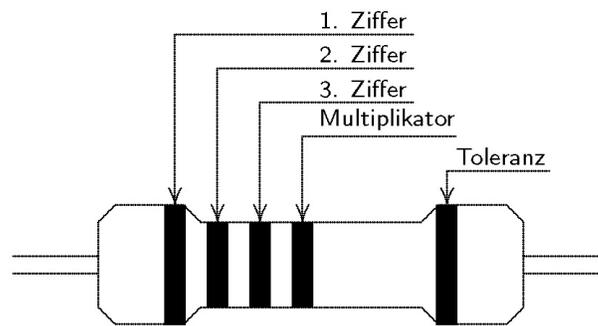
Beschriftungsbeispiel	Widerstandswert
955R	$955 \times 10^0 \Omega$
9k1	$9,1 \times 10^3 \Omega$
13k	$13 \times 10^3 \Omega$
3M0	$3,0 \times 10^6 \Omega$

Die Bedeutung des Farbcodes zeigt Abb. 3.3. Danach würde beispielsweise wie folgt decodiert werden:

1.Zif.	2.Zif.	3.Zif.	Multipl.	Tol.
<i>Gelb</i>	<i>Violett</i>	<i>Schwarz</i>	<i>Braun</i>	<i>Braun</i>
4	7	0	10^1	$\pm 1\%$

Es handelt sich also um einen Widerstandswert von $4,7\text{k}\Omega$, mit einer Toleranz von $\pm 1\%$.

Bei der Interpretation des Farbcodes ist darauf zu achten, dass der Ring zur 3. Ziffer auch fehlen kann. Der Ring zur Toleranz ist dann zumeist weiter zur Mitte hin plaziert. Der erste Ring (1. Ziffer) ist dann jener, der weiter außen angeordnet ist. Bei Angabe aller 5 Ringe ist der Toleranzring mehr oder weniger deutlich von den übrigen Ringen abgesetzt. Besonders bei ungünstigen Einfärbungen des Widerstandskörpers (z. B. mit Blau) sind die Farbringe oft schlecht zu erkennen. In diesem Fall empfiehlt es sich, den Widerstand vor seiner Verwendung mit einem Multimeter zur Kontrolle auszumessen.



Farbe	Ziffer 1..3	Multiplikator	Toleranz/%
Schwarz	0	10^0	–
Braun	1	10^1	± 1
Rot	2	10^2	± 2
Orange	3	10^3	–
Gelb	4	10^4	–
Grün	5	10^5	$\pm 0,5$
Blau	6	10^6	$\pm 0,25$
Violett	7	10^7	$\pm 0,1$
Grau	8	10^8	–
Weiss	9	10^9	–
Gold	–	10^{-1}	± 5
Silber	–	10^{-2}	± 10
keine	–	–	± 20

Abb. 3.3: Farbkennzeichnung von Widerständen

Tab. 3.1: Nennwerte einer Widerstandsdekade n für verschiedene E-Baureihen

Widerstandswert / $10^n \Omega$	E6	E12	E24
1,0	×	×	×
1,1			×
1,2		×	×
1,3			×
1,5	×	×	×
1,6			×
1,8		×	×
2,0			×
2,2	×	×	×
2,4			×
2,7		×	×
3,0			×
3,3	×	×	×
3,6			×
3,9		×	×
4,3			×
4,7	×	×	×
5,1			×
5,6		×	×
6,2			×
6,8	×	×	×
7,5			×
8,2		×	×
9,1			×

3.1.4 Baureihen

Festwiderstände werden in genormten Abstufungen hergestellt. Allzu feine Abstufungen sind in der Schaltungspraxis zumeist nicht nötig. Dabei werden sogenannte *E-Baureihen* unterschieden. Die Abstufung in einer Widerstandsdekade n der E6-, E12- und E24-Baureihe zeigt Tab. 3.1.

Noch feinere Abstufungen liefern die Baureihen E48 und E96. Wird dennoch einmal ein in seiner Größe unüblicher (nicht vorhandener) Festwiderstand benötigt, so kann man sich mit einer Reihenschaltung mehrerer Festwiderstände behelfen, oder es wird der Festwiderstand in Reihe mit einem einstellbaren Widerstand (Regelwiderstand oder Potentiometer) betrieben. Einstellbare Widerstände stellen jedoch immer eine zusätzliche Fehlerquelle dar, weil sie sich in der Regel stärker bei Schwankungen von Temperatur und Luftfeuchtigkeit sowie bei mechanischer Beanspruchung ändern. Durch Kapselung u.a. konstruktive Vorkehrungen wird die Stabilität veränderbarer Widerstände verbessert. Allerdings steigt damit auch der Preis. Darüber hinaus nehmen einstellbare Widerstände mehr Platz auf der Leiterplatte in Anspruch.

3.1.5 Stabilität realer ohmscher Widerstände

Die Angaben zum Nennwert R eines Widerstandes beziehen sich auf den Zeitpunkt der Anlieferung. Mit ihrer Alterung verändert sich der Nennwert. Für Metallschichtwiderstände gilt für die alterungsbedingte Änderung ΔR_{Alter} des Widerstandswertes pro Jahr

$$-0,005 R + 0,05\Omega \lesssim \Delta R_{\text{Alter}} \lesssim 0,01 R + 0,05\Omega .$$

Die Änderung des Widerstandswertes ΔR_{Temp} bei einer Temperaturänderung ΔT erfolgt im Temperaturbereich $20^\circ\text{C} \dots 70^\circ\text{C}$ gemäß

$$\Delta R_{\text{Temp}} \approx \pm(15 \dots 100) \cdot 10^{-6} \cdot R \cdot \Delta T/\text{K} .$$

Danach kann sich also der Widerstand $R = 10\text{k}\Omega$ bei einer Temperaturerhöhung um $\Delta T = 10\text{K}$ um bis zu $\Delta R_{\text{Temp}} = \pm 10\Omega$ ändern.

Metallschichtwiderstände zeigen gegenüber Kohleschichtwiderständen eine bessere Langzeitstabilität. Darüber hinaus sind sie bei vergleichbaren Abmaßen stärker thermisch belastbar. Genaue Angaben finden sich z. B. in [6], S. 6–5.

3.1.6 Im Praktikum verfügbare Widerstände

Im Praktikum steht Ihnen ein Widerstandssortiment folgender Charakteristik zur Verfügung:

Baureihe	E12
Art	Metallschicht
kleinster W.-Wert	12 Ω
größter W.-Wert	1 $\text{M}\Omega$
max. Verlustleistung	1/4 \pm 1% W
$\Delta R_{\text{Temp}}/R$	$\approx -10^{-5}/\text{K}$

3.2 Kondensator

Ein Kondensator ist eine Anordnung zur Speicherung von elektrischen Ladungen Q . In elektronischen Schaltungen sind Kondensatoren neben ohmschen Widerständen die wichtigsten passiven Bauelemente. Im einfachsten Fall kann man sich einen Kondensator als zwei Metallplatten mit jeweils der Fläche A vorstellen, die planparallel im Abstand d angeordnet sind und durch ein dielektrisches Material (Dielektrikum = elektrischer Isolator) mit der Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ voneinander getrennt sind. In dieser Anordnung beträgt die Kapazität,

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} , \quad \epsilon_0 = 8,854(1) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} .$$

Bei einem *idealen Kondensator* ruft eine (infinitesimale) Ladungsänderung dQ auf den Platten eine proportionale Änderung dU der zwischen den Kondensatorplatten abfallenden elektrischen Spannung U hervor. Die Proportionalitätskonstante ist der Kapazitätswert C (kurz „Kapazität“ genannt),

$$dQ = C \cdot dU . \tag{3.5}$$

Bei einer *idealen Kapazität* ist C für alle Spannungswerte U konstant, und es gilt

$$Q = C \cdot U .$$

Die Einheit der Kapazität ist das Farad:

$$1\text{F} = 1\text{As/V} .$$

Das Schaltsymbol für einen idealen Kondensator zeigt Abb. 3.4.

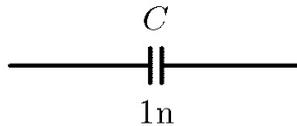


Abb. 3.4: Schaltsymbol eines idealen Kondensators. Bei der Angabe der Kapazität wird häufig die Maßeinheit F weggelassen, es bedeuten also $100\text{n} = 100\text{nF}$.

Fällt über den Kondensatorplatten die zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ ab, so kann nach (3.5) der momentane elektrische Strom $I \equiv \text{d}Q/\text{d}t$ auf die Platten berechnet werden,

$$I(t) = C \cdot \frac{\text{d}U(t)}{\text{d}t} . \quad (3.6)$$

Von besonderem Interesse sind harmonische Spannungsverläufe $U(t) = \hat{U} \cos \omega t$. Für sie folgt für den Strom

$$\begin{aligned} I(t) &= -C \cdot \omega \cdot \hat{U} \sin \omega t \\ &= C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cos(\omega t + \pi/2) \\ &= C \cdot \omega \cdot U(t + \pi/(2\omega)) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der Strom ist also auch harmonisch, mit der gleichen Periode $T = 2\pi/\omega$, allerdings eilt er der Spannung in der Phase um $\pi/(2\omega) = T/4$ voraus.

3.2.1 Beschreibung im Komplexen

Eine mathematisch elegante Darstellung gelingt mit einer komplexen Schreibweise. Dazu setzen wir

$$U(t) = \hat{U} \cdot (\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t) = \hat{U} \cdot e^{j\omega t}$$

und interpretieren bei allen komplexen Größen immer nur den Realteil als physikalisch relevant. Weil die Differentiation der Spannung nach der Zeit wie in Gl. (3.6) eine *lineare* Operation darstellt, erhält man in komplexer Schreibweise²⁾

$$\begin{aligned} \frac{\text{d}U(t)}{\text{d}t} &= \hat{U} \cdot \omega \cdot (-\sin \omega t + j \cdot \cos \omega t) \\ &= j \cdot \omega \cdot \hat{U} \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot U(t) \\ &= \omega \cdot \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \pi/2)} = \omega \cdot U(t + \pi/(2\omega)) \\ &= \omega \cdot \hat{U} \cdot [\cos(\omega t + \pi/2) + j \cdot \sin(\omega t + \pi/2)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

²⁾In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit $\sqrt{-1} = e^{j\pi/2}$ üblicherweise mit j bezeichnet, wohingegen in der Mathematik die Bezeichnung i üblich ist.

Der Realteil der Ableitung der komplexwertigen Spannung ist also gleich der Ableitung der rein reellwertigen in Gl. (3.7). Aus Gl. (3.8) und Gl. (3.6) folgt

$$U(t) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I(t) . \quad (3.9)$$

Wegen der Analogie von (3.9) zum ohmschen Gesetz (3.1) wird

$$R_C \equiv \frac{1}{j\omega C}$$

als *komplexer Widerstand der Kapazität C* eingeführt. Somit können wir (3.9) auch wie folgt schreiben,

$$U = R_C \cdot I .$$

Dabei darf aber nicht vergessen werden, dass dieser Zusammenhang *nur für harmonisch veränderliche Spannungs- bzw. Stromverläufe gilt*, bei der Kreisfrequenz ω . Wie bei nicht harmonischen zeitlichen Änderungen zu verfahren ist, wird weiter unten im Abschnitt *Fourier-Transformation* beschrieben.

3.2.2 Ersatzschaltbild

Das bei realen Kondensatoren verwendete dielektrische Material ist kein idealer elektrischer Isolator. So fließen durch einen realen Kondensator immer auch Ströme bei einer anliegenden Gleichspannung. Darüber hinaus kommt es bei einer anliegenden Wechselspannung zur Änderung der para- bzw. dielektrischen Polarisationsrichtung im Rhythmus der Spannungswechsel. Dabei wird ein Teil der zugeführten elektrischen Energie in Wärme umgewandelt. All diese Effekte werden näherungsweise durch das Ersatzschaltbild in Abb. 3.5 erfasst.

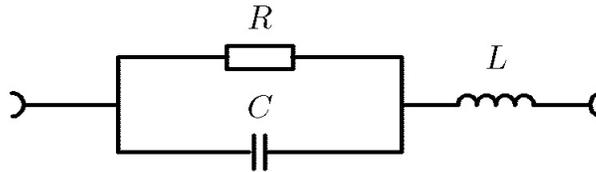


Abb. 3.5: Schaltsymbol eines realen Kondensators. Bei der Angabe der Kapazität wird häufig die Maßeinheit F weggelassen, es bedeuten also $100\text{n} = 100\text{nF}$.

3.2.3 Technische Kondensatoren

Folienkondensator: Die Kondensatorplatten bestehen hier aus zwei zylindrisch aufgewickelten Aluminiumfolien, die durch ein Dielektrikum elektrisch isoliert sind (Abb. 3.6). Um ungewünschte Wickelinduktivitäten möglichst gering zu halten, werden die Stirnseiten durchgehend kontaktiert. Als Dielektrikum dienen z. B. paraffingetränktes Papier, Kunststoff oder ein Lackfilm. Folienkondensatoren haben Nennwerte von $10\text{pF} \dots 10\mu\text{F}$. Bei vergleichbaren Kapazitätswerten haben sie größere Abmessungen als etwa Keramikkondensatoren. Dafür zeigen sie aber eine bedeutend geringere Drift bei Temperatur- und Feuchteschwankungen oder auch während des Alterns. Bei besonders hohen Stabilitätsanforderungen werden sie von einem Metallgehäuse geschützt.

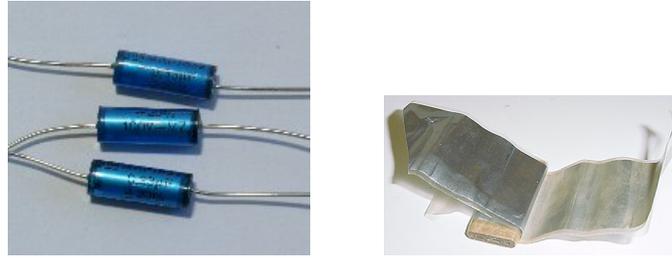


Abb. 3.6: Folienkondensator (rechts aufgewickelt)

Keramikkondensator: Kapazitätswerte von 0,1pF bis 1000nF bei einer recht kompakten Bauweise werden mit *Keramikkondensatoren* erreicht (Abb. 3.7). Dabei kommen als Dielektrikum Keramiken wie TiO_2 , MgSiO_2 und MgTiO_3 zum Einsatz, die eine sehr hohe relative Dielektrizitätskonstante haben ($\epsilon_r = 2000 \dots 10000$). Die Kondensatorplatten sind aufgedampfte Metallschichten.

Die Kapazitätswerte sind allerdings stark von der Temperatur und der Spannung abhängig. Deshalb können sie nur dort eingesetzt werden, wo diese Schwankungen kaum eine Rolle spielen, wie bei Stütz-, Sieb- und Koppelkondensatoren. Durch eine geschickte Reihen- oder auch Parallelschaltung von Keramikkondensatoren mit negativem und positivem Temperaturkoeffizienten kann die Temperaturstabilität der resultierenden Gesamtkapazität verbessert werden.

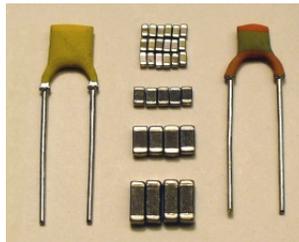


Abb. 3.7: MLCC-Keramikkondensator (englisch: multi layer ceramic capacitor). In der Mitte Ausführungen in SMD-Bauweise (englisch: surface mounted device), an den Seiten in THT-Bauweise (englisch: Through Hole Technology)

Elektrolytkondensator (Elko): Höhere Nennkapazitäten erreicht man mit *Elektrolytkondensatoren*, sogenannten *Elkos* ($1 \dots 5000\mu\text{F}$). Sie sind in der Regel gepolt, d.h., ein Anschluss, die Anode, muß immer auf einem höheren elektrischen Potential als der andere, die Kathode, liegen. Andernfalls würde eine Deformierung des Elektrolytes eintreten und somit der Kondensator zerstört werden. Die Anoden-Elektrode (positiver Pol) besteht aus einem Metall, auf dem durch Elektrolyse eine nicht leitende Isolierschicht erzeugt wird, die das Dielektrikum des Kondensators bildet. Nach dem Anodenmaterial unterscheidet man *Aluminium-, Tantal- und Niob-Elektrolytkondensatoren*. Der Elektrolyt (z. B. eine elektrisch leitende Flüssigkeit) ist die Kathode (negativer Pol). Tantal- und Niob-Elkos sind hochwertiger als Aluminium-Elkos, weil sie bei gleichen Nennwerten kompakter gebaut werden können, geringere Restströme aufweisen und eine geringere Temperaturabhängigkeit aufweisen.

Elkos haben einen relativ hohen Verlustfaktor, d.h., einen relativ kleinen Widerstand R im Ersatzschaltbild von Abb. 3.5. Der resultierende Reststrom ist zur Regenerierung der dielektrischen Oxidschicht (z.B.

Aluminium- oder Tantaloxid) erforderlich. Die Kathode bildet ein mit dem Elektrolyt getränktes Papier. Elkos werden u.a. als Siebkondensator verwendet.

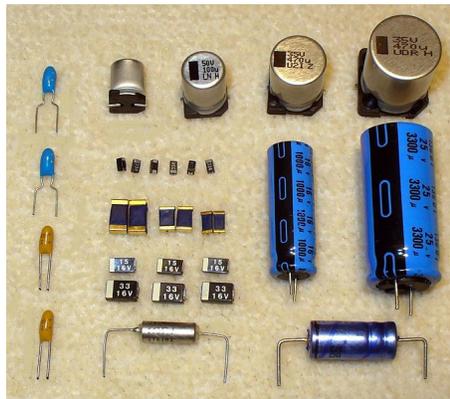


Abb. 3.8: Übliche Bauformen von Tantal- (links) und Aluminium-Elektrolytkondensatoren (rechts)

Doppelschicht-Kondensatoren: Diese auch Super- oder EDLC-Kondensatoren (engl.: electrochemical double layer capacitor) genannten Kapazitäten werden unter den Markennamen *Goldcaps*, *Supercaps*, *Boostcaps* und *Ultracaps* gehandelt (Abb. 3.9). Sie haben die größte Energiedichte aller Kondensatoren. Ihre hohe Kapazität basiert auf der Dissoziation von Ionen in einem flüssigen Elektrolyt, die ein Dielektrikum von wenigen Atomlagen bilden, bei einer vergleichsweise großen Elektrodenoberfläche. Es sind gepolte Bauelemente, die aber nicht in die Gruppe der Elektrolytkondensatoren eingeordnet werden.



Abb. 3.9: Bauformen von Doppelschicht-Kondensatoren

Nennkapazität, Abstufung: Die Kapazität industriell gefertigter Kondensatoren liegt üblicherweise im Bereich von etwa 0,1 pF bis zu einigen Farad. Die Abstufung der Nennwerte von Kondensatoren erfolgt bei Nennkapazitäten unter 1 μ F entsprechend den Widerstandsbaureihen E6, E12 und seltener auch gemäß E24. Allzu feine Abstufungen der Nennkapazitätswerte sind nicht sinnvoll, weil Kapazitäten in der Regel eine recht hohe Toleranz von mindestens $\pm 5\%$ haben.

Nennspannung: Neben der Nennkapazität ist die Nennspannung ein wesentlicher technischer Parameter. Generell wird die Bauweise von Kondensatoren größer, wenn sie für höhere Nennspannungen ausgelegt sind. Bei Folienkondensatoren bedeutet dies, dass die Dicke der dielektrischen Schicht für höhere Spannungen dicker sein muss, um elektrische Durchschläge zu vermeiden.

3.3 Induktivität

3.3.1 Definition

Eine Induktivität ist eine zweipolige Anordnung, durch die ein elektrischer Strom I fließen kann und bei der zwischen den Polen eine elektrische Spannung U abfällt, die der zeitlichen Änderung des Stromes proportional ist,

$$U(t) = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt}, \quad [L] = \text{H} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}. \quad (3.10)$$

Der (negative) Proportionalitätsfaktor L ist die sogenannte *Induktivität*. Ihre Maßeinheit heißt *Henry*, H , nach dem US-amerikanischen Physiker JOSEPH HENRY (1797–1878).

Eine Induktivität kann zum Beispiel durch eine zylinderförmige Drahtspule gebildet werden. Ändert sich der Strom im Spulendraht, so ändert sich auch der magnetische Fluss Φ entlang der Zylinderachse (Umfeld des Spulendrahtes), worauf zwischen den beiden Leiterenden derselben Spule eine Spannung induziert wird. Man nennt dies auch Eigeninduktivität oder Selbstinduktion. Die Induktivität ergibt sich aus $L = d\Phi/dI$.

3.3.2 Schaltsymbol

Das Schaltsymbol einer Induktivität zeigt Abb. 3.10.

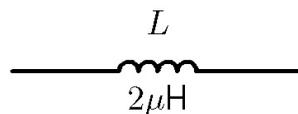


Abb. 3.10: Schaltsymbol einer idealen Induktivität.

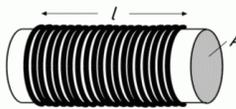
3.3.3 Gesamtinduktivität

Bei verschalteten Einzelinduktivitäten L_1, L_2, \dots, L_N berechnet sich die gesamte Induktivität L für die Reihen- sowie die Parallelschaltung ebenso wie bei ohmschen Widerständen. Es gelten:

$$\begin{aligned} \text{Reihenschaltung:} \quad L &= L_1 + L_2 + \dots + L_N \\ \text{Parallelschaltung:} \quad L^{-1} &= L_1^{-1} + L_2^{-1} + \dots + L_N^{-1} \end{aligned}$$

3.3.4 Beispiele für reale Induktivitäten

Zylinderspule: Ein dünner Draht sei auf einen Zylinder der Länge l gewickelt, mit N gleichmäßig verteilten Wicklungen. Der Zylinder habe den Radius R und die Querschnittsfläche A . Er bestehe aus einem Material mit der Permeabilitätszahl μ_r , z.B. aus Ferrit.³⁾ Dann gilt für die Induktivität,

$$L_{\text{Zyl}} \approx \frac{1}{1 + R/l} \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{l} \cdot A \cdot N^2$$


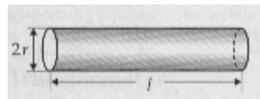
Für $R = 2 \cdot 10^{-3}$ m, $l = 20 \cdot 10^{-3}$ m, $N = 100$ und unter Beachtung von $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m sowie der Zylinder-Grundkreisfläche $A = \pi \cdot R^2$ erhält man

$$\frac{L_{\text{Zyl}}}{\text{H}} \approx \frac{10}{11} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{20 \cdot 10^{-3}} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 \cdot \mu_r = \frac{8 \cdot \pi^2}{11} \cdot 10^{-6} \cdot \mu_r \approx 7 \cdot 10^{-6} \cdot \mu_r$$

Somit gilt $L_{\text{Zyl}} \approx 7 \cdot \mu_r \times \mu\text{H}$.

Für eine Luftspule ($\mu_r = 1$) erhält man $L_{\text{Zyl,Luft}} \approx 7 \times \mu\text{H}$. Besteht der Zylinder hingegen aus einem Ferritkern mit $\mu_r = 10^3$, dann erhält man $L_{\text{Zyl,Ferrit}} \approx 10^3 \cdot L_{\text{Zyl,Luft}}$.

Einfachleitung: Eine einfache gerade (zylinderförmige) elektrische Leitung mit der Länge l und dem Radius $r \ll l$, aus einem Material mit der relativen Permeabilität μ_r , hat die Induktivität

$$L_{\text{Leiter}} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - \frac{3}{4} \right]$$


Für einen Kupferdraht ($\mu_r \approx 1$) mit $l = 10^{-1}$ m und $r = 0,5 \cdot 10^{-3}$ m erhält man,

$$L_{\text{Leiter,Cu}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-1} \cdot 5 \text{ H} = 10^{-9} \text{ H} .$$

Doppelleitung, kreisförmiger Querschnitt: Eine gerade elektrische Doppelleitung (2 parallele zylinderförmige Einfachleitungen) mit der Länge l und dem Radius $r \ll l$ und dem Leiterabstand d , aus einem Material mit der relativen Permeabilität μ_r , hat die Induktivität

$$L_{\text{DLeiter}} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot l}{\pi} \left[\ln \left(\frac{d}{r} \right) + \frac{1}{4} \right]$$


3.3.5 Eigenschaften realer Induktivitäten

Die Permeabilität μ_r von ferromagnetischen Substanzen wie Ferritkernen hängt zum Teil recht stark von der magnetischen Feldstärke ab. Folglich ist μ_r und somit auch die Induktivität i.Allg. eine nichtlineare Funktion der Stromstärke, $\mu_r(I)$.

³⁾Ferrite sind elektrisch schlecht oder nicht leitende ferrimagnetische keramische Werkstoffe aus Eisenoxid Hämatit (Fe_2O_3), oder Magnetit (Fe_3O_4) und weiteren Metalloxiden. Im nicht gesättigten Fall leiten Ferrite den magnetischen Fluss sehr gut was sich in der großen magnetischen Leitfähigkeit (Permeabilität) ausdrückt, $\mu_r = 4..15000$. Diese Werkstoffe haben somit einen kleinen magnetischen Widerstand.

3.4 Leitungen, Kabel

Fließt durch eine ideale elektrische Leitung ein Strom, so fällt über den Leiterenden keine elektrische Spannung ab. Der Strom kann hierbei sowohl in seiner Stärke wie auch seiner zeitlichen Änderung beliebig sein.

Reale Leiter weichen von dieser Idealvorstellung teilweise erheblich ab, insbesondere dann, wenn sich die Stöme schnell ändern. Entlang der Leitung breitet sich dann eine elektromagnetische Welle aus. Der realen Leitung ordnet man einen Leitungswellenwiderstand und einen Feldwellenwiderstand zu. Beide Widerstände existieren am gleichen Ort in einer Leitung nebeneinander und nehmen im Allgemeinen völlig unterschiedliche Werte an, die allerdings über die Geometrie der Leitungsberandung zueinander in Beziehung stehen.

Der Leitungswellenwiderstand kennzeichnet das Strom–Spannungsverhältnis einer elektromagnetischen Welle. Er hängt vom Material (Permittivität seiner Isolierung) und von der Leitungsgeometrie ab.

Der Feldwellenwiderstand beschreibt das Verhältnis zwischen elektrischem und magnetischem Feldanteil einer elektromagnetischen Welle. Er hängt nur vom Material ab.

3.4.1 Koaxialkabel

Ein übliches Koaxialkabel zeigt Abb. 3.11



Abb. 3.11: Koaxialkabel mit Leitungswellenwiderstand $50\ \Omega$. 1: Innenleiter (Seele), 2: Dielektrikum (Isolation zwischen Innen- und Außenleiter), 3: Außenleiter (Abschirmung, hier einfach ausgeführt, zuweilen auch zweifach). 4: Isolier- und Schutzmantel

Der Leitungswellenwiderstand (Kabelimpedanz) eines koaxialen Leiters (Koaxialkabel, Koaxkabel) beträgt bei hohen Frequenzen unter der Annahme $\mu_r = 1$:

$$Z_L = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{D}{d} \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{D}{d} \ \Omega, \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377 \ \Omega \quad (3.11)$$

Darin bezeichnen D und d die Durchmesser des Dielektrikums bzw. des Innenleiters. ε_r ist die relative Permittivität (Dielektrizitätskonstante) des Dielektrikums. Z_0 bezeichnet den Freiraumwellenwiderstand (auch Feldwellenwiderstand des Vakuums).

Kapitel 4

Grundsaltungen mit passiven Bauelementen

4.1 Spannungsteiler und Filter 1. Ordnung

Wir betrachten die Schaltungen in Abb. 4.1. Dazu verwenden wir die Abkürzungen $R_C = (j\omega C)^{-1}$ und $R_L = j\omega L$ für die komplexen Widerstände eines Kondensators bzw. einer Spule. Darüber hinaus verwenden wir im Folgenden häufig die Abkürzung

$$\Omega \equiv \omega RC .$$

Diese kann als eine auf $(RC)^{-1}$ normierte Kreisfrequenz angesehen werden, d.h., aus $\Omega = 1$ folgt $\omega = (RC)^{-1}$. Für Schaltungen mit Induktivitäten L setzen wir,

$$\Omega_L \equiv \omega L/R$$

Für harmonische Eingangsspannungen mit der Kreisfrequenz ω erhält man aus der Spannungsteilerregel und unter Beachtung von $R_C = (j\omega C)^{-1}$ und $R_L = j\omega L$ die folgenden Übertragungsfunktionen $H(j\omega) \equiv$

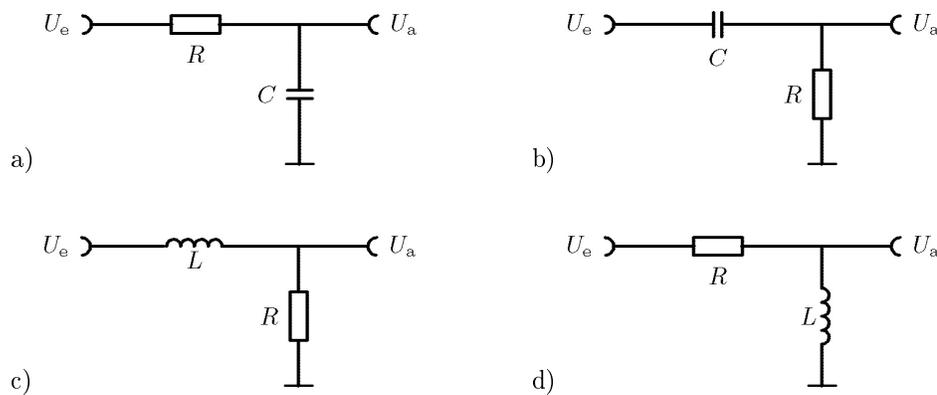


Abb. 4.1: a) RC-Tiefpass, b) RC-Hochpass, c) RL-Tiefpass, d) RL-Hochpass,

$$\frac{U_a}{U_e}:$$

$$\begin{aligned} \text{RC-Tiefpass : } H_{\text{RC-TP}}(j\omega) &= \frac{R_C}{R + R_C} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega RC} = \frac{1}{1 + j\Omega} \\ \text{RC-Hochpass : } H_{\text{RC-HP}}(j\omega) &= \frac{R}{R + R_C} = \frac{1}{1 - j \cdot (\omega RC)^{-1}} = \frac{j\Omega}{1 + j\Omega} \\ \text{RL-Tiefpass : } H_{\text{RL-TP}}(j\omega) &= \frac{R}{R + R_L} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega L/R} = \frac{1}{1 + j\Omega_L} \\ \text{RL-Hochpass : } H_{\text{RL-HP}}(j\omega) &= \frac{R_L}{R + R_L} = \frac{1}{1 - j \cdot (\omega L/R)^{-1}} = \frac{j\Omega_L}{1 + j\Omega_L} \end{aligned}$$

In Eulerscher Schreibweise lautet die Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = |H|(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)} .$$

Unter Beachtung von

$$\frac{1}{1 + j \cdot x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan x}$$

und

$$\frac{jx}{1 + j \cdot x} = \frac{(1 - jx)jx}{1 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot e^{j \cdot \arctan(1/x)}$$

findet man leicht die folgenden Übertragungsfunktionen:

	$ H (\omega)$	$\varphi(\omega)$
RC-Tiefpass :	$\frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$	$-\arctan \Omega$
RC-Hochpass :	$\frac{\Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$	$\arctan(1/\Omega)$
RL-Tiefpass :	$\frac{1}{\sqrt{1 + \Omega_L^2}}$	$-\arctan \Omega_L$
RL-Hochpass :	$\frac{\Omega_L}{\sqrt{1 + \Omega_L^2}}$	$\arctan(1/\Omega_L)$

RC-Tiefpass: Es ist üblich, den Betrag der Übertragungsfunktion doppeltlogarithmisch in Abhängigkeit von Ω (bzw. Ω_L) darzustellen, unter Verwendung des dekadischen Logarithmus $\lg \equiv \log_{10}$. Somit erhält man für den RC-Tiefpass,

$$\lg|H| = -\frac{1}{2} \cdot \lg(1 + \Omega^2) \begin{cases} \approx 0 & : \Omega \ll 1 \\ = -\lg\sqrt{2} = -0,1505\dots & : \Omega = 1 \\ \approx -\lg\Omega & : \Omega \gg 1 \end{cases} . \quad (4.1)$$

Den Verlauf dieser Übertragungsfunktion zeigt Abb. 4.2 a). Für $\Omega = \Omega_0 \equiv 1$ gilt $\omega = \omega_0 \equiv (RC)^{-1}$. Die (Kreis-)Frequenz ω_0 heißt *Grenzfrequenz* des Tiefpasses. Für $\Omega \ll 1$ gilt $U_a \approx U_e$, das heißt, harmonische Schwingungen mit der Frequenz $f = \omega/(2\pi) \ll 1/(2\pi RC)$ werden nahezu unverfälscht übertragen, $U_a \approx U_e$. Insbesondere gilt für Gleichspannungen ($f = 0$), $U_a = U_e$. Für $\Omega \gg 1$, also für Frequenzen $f \gg 1/(2\pi RC)$, fällt U_a annähernd indirekt proportional mit wachsender Frequenz.

Dezibel: Multipliziert man den logarithmischen Betrag der Übertragungsfunktion mit dem Faktor 20,

$$20 \times \lg|H| ,$$

so spricht man vom Übertragungsfaktor in Einheiten von *Dezibel*, abgekürzt: dB. Danach hat unser Tiefpass für $\Omega \gg 1$ folgende Eigenschaft: *Mit jeder Frequenzdekade fällt der Betrag der Übertragungsfunktion um -20 dB.* Der Abfall beträgt also -20 dB/Dekade. Dies sieht man aus

$$20 \times \lg|H|(10 \cdot \Omega) \approx -20 \times \lg(10 \cdot \Omega) = -20 \text{ dB} - 20 \times \lg\Omega \approx -20 \text{ dB} + 20 \times \lg|H|(\Omega) .$$

Darüber hinaus ist bei der Grenzfrequenz $\Omega = 1$ die Ausgangs- gegenüber der Eingangsspannung um $-20\lg\sqrt{2} \approx -3$ dB abgefallen.

RL-Tiefpass: Die obigen Gleichungen, insbesondere Gl. 4.1, gelten auch für den RL-Tiefpass, wenn man $\Omega \equiv \omega L/R$ setzt.

Hochpass: Für den RC- und RL-Hochpass in Abb. 4.1 b) bzw. d) erhält man

$$\lg|H| = \lg\Omega - \frac{1}{2} \cdot \lg(1 + \Omega^2) \quad (4.2)$$

Dabei ist für den RC-Hochpass $\Omega \equiv \omega RC$ gesetzt und für den RL-Hochpass $\Omega \equiv \omega L/R$.

Bodediagramm: Die doppeltlogarithmische Darstellung des Betrags der Übertragungsfunktion (Amplitudengang) in Einheiten von Dezibel zusammen mit dem Phasendiagramm (Phasengang) heißt *Bodediagramm* (nach HENDRIK WADE BODE, 1905–1982, USA). Für die betrachteten Tief- und Hochpässe sind diese Diagramme in Abb. 4.2 dargestellt. Die Phasenverschiebungen bei der Grenzfrequenz $\Omega = 1$ betragen $-45^\circ = -(\pi/4)$ rad und $+45^\circ$ beim Tief- bzw. Hochpass. Die Amplitudenabschwächung beträgt hier ca. -3 dB.

4.2 Kapazitiv belasteter Spannungsteiler

In der Abb. 4.3 a) und b) sind ohmsche Spannungsteiler mit verschiedenen Belastungen R_L bzw. C_2 dargestellt. Die Übertragungsfunktionen $H(j\omega) = U_a/U_e$ lauten,

$$\text{Ohmsche Last } R_L: \quad H_R(j\omega) = \frac{R_2 \parallel R_L}{R_1 + R_2 \parallel R_L}$$

$$\text{Kapazitive Last } C_2: \quad H_C(j\omega) = \frac{R_2 \parallel R_{C_2}}{R_1 + R_2 \parallel R_{C_2}}$$

Darin steht $R_m \parallel R_n$ für die Parallelschaltung zweier beliebiger Widerstände R_m und R_n ,

$$R_m \parallel R_n \equiv \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_n} \right)^{-1} = \frac{R_m \cdot R_n}{R_m + R_n} .$$

Man erhält unter Verwendung der Zeitkonstanten $\tau_2 \equiv R_2 C_2$,

$$R_2 \parallel R_{C_2} = \frac{R_2 / (j\omega C_2)}{R_2 + 1 / (j\omega C_2)} = \frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2} \begin{cases} \approx R_2 & : \omega \ll \tau_2^{-1} \\ = \frac{R_2}{1 + j} & : \omega = \tau_2^{-1} \\ \approx R_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2} & : \omega \gg \tau_2^{-1} . \end{cases}$$

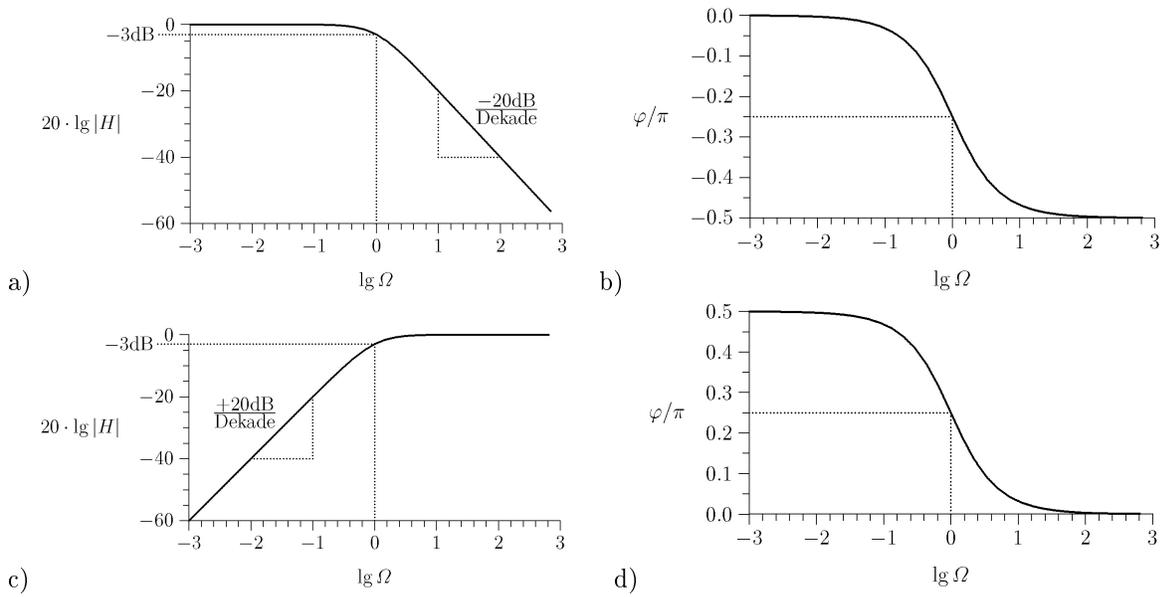


Abb. 4.2: Bodediagramme von passiven Filtern 1. Ordnung:
 Oben: Tiefpass wie in Abb. 4.1 a), c) Unten: Hochpass wie in Abb. 4.1 b), d)

Daraus folgt für den Spannungsteiler mit kapazitiver Last,

$$H_C(j\omega) \begin{cases} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} & : \omega \ll \tau_2^{-1} \\ = \frac{R_2}{R_2 + R_1(1 + j)} & : \omega = \tau_2^{-1} \\ \approx \frac{R_{C_2}}{R_1 + R_{C_2}} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_2} & : \omega \gg \tau_2^{-1} \end{cases} \quad (4.3)$$

Für niedrige Frequenzen arbeitet der kapazitive Spannungsteiler wie ein ohmscher, für große Frequenzen $\omega \gg (R_2 C_2)^{-1}$ sinkt die Ausgangsspannung wie beim Tiefpass 1. Ordnung, mit der Grenzkreisfrequenz $(R_1 C_2)^{-1}$.

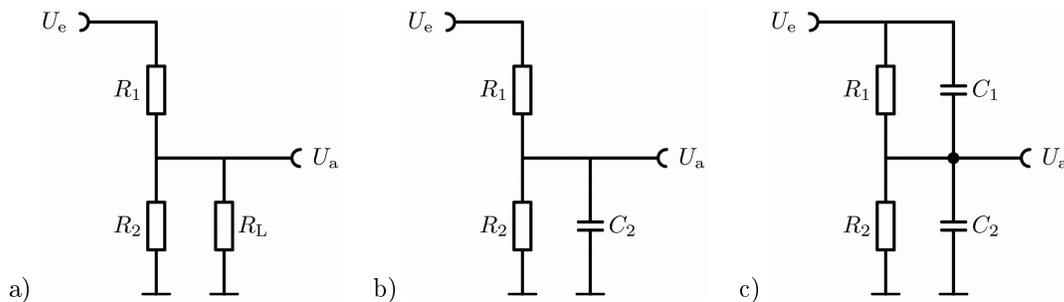


Abb. 4.3: Ohmsche Spannungsteiler mit a) ohmscher und b) kapazitiver Last, sowie c) frequenzkompensierter Spannungsteiler

4.3 Frequenzkompensierter Spannungsteiler

Der Abfall der Ausgangsspannung mit steigender Frequenz beim kapazitiv belasteten Spannungsteiler in Abb. 4.3 b), Gl. (4.3), lässt sich durch Verwendung eines zusätzlichen Kondensator C_1 parallel zum Widerstand R_1 kompensieren, Abb. 4.3 c). Die Übertragungsfunktion dieses Spannungsteilers lautet,

$$H_{CC}(j\omega) = \frac{R_2 \parallel R_{C_2}}{R_1 \parallel R_{C_1} + R_2 \parallel R_{C_2}} .$$

Unter Verwendung von $\Omega_1 \equiv \omega R_1 C_1$ und $\Omega_2 \equiv \omega R_2 C_2$ erhält man,

$$\begin{aligned} H_{CC}(j\omega) &= \frac{R_2/(1 + j\Omega_2)}{R_1/(1 + j\Omega_1) + R_2/(1 + j\Omega_2)} \\ &= \frac{R_2(1 + j\Omega_1)}{R_1(1 + j\Omega_2) + R_2(1 + j\Omega_1)} \\ &= \frac{R_2(1 + j\Omega_1)}{R_1 + R_2 + j(R_1\Omega_2 + R_2\Omega_1)} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\Omega_1}{1 + j\left(\frac{R_2\Omega_1 + R_1\Omega_2}{R_1 + R_2}\right)} \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $C_p \equiv C_1 + C_2$, $R_p \equiv R_1 \parallel R_2$ erhält man,

$$\frac{R_2\Omega_1 + R_1\Omega_2}{R_1 + R_2} = \omega \frac{R_2 \cdot R_1 C_1 + R_1 \cdot R_2 C_2}{R_1 + R_2} = \omega(C_1 + C_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \omega C_p R_p \equiv \Omega_p$$

und damit,

$$H_{CC}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\Omega_1}{1 + j\Omega_p} .$$

Somit können folgende Fälle unterschieden werden,

$$H_{CC}(j\omega) \begin{cases} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} & : \text{ Fall 1: } \omega = 0 \\ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} & : \text{ Fall 2: } R_1 C_1 = R_2 C_2 \text{ und } \omega \text{ beliebig} \\ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Omega_1}{\Omega_p} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} & : \text{ Fall 3: } \omega \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Der Fall 2 heißt *frequenzkompensierter Spannungsteiler*. Hier ist das Spannungsteilerverhältnis von der Frequenz unabhängig!

4.4 Tastköpfe in der Messtechnik

Eine wichtige Anwendung es frequenzkompensierten Spannungsteilers ist der Tastkopf eine Oszilloskopes, Abb. 4.4. Tastköpfe dienen vor allem dazu, die u.U. zeitlich schnell veränderliche Spannung eines Mesobjektes möglichst unverfälscht auf einem Oszilloskop darzustellen. Die Eingangstufe eines Oszilloskopes hat üblicherweise den Widerstand $R_m = 1\text{M}\Omega$ und die Kapazität $C_m = 2 \dots 20\text{ pF}$. Ohne Tastkopf würde eine Messanordnung eine kapazitiv belasteten Spannungsteiler aus dem Innenwiderstand R_i des

Messobjektes und dem Eingangswiderstand des Oszilloskopes R_m bilden, mit der oben beschriebenen Tiefpasscharakteristik. Wegen der („störenden“) Lastkapazitäten würden also hochfrequente harmonische Signalanteile stärker abgeschwächt als niederfrequente. Dadurch würde die Signalform verfälscht.

Als Lastkapazität wirken die Eingangskapazität C_m des Oszilloskopes zusammen (parallel geschaltet) mit der Kapazität $C_{Ltg.}$ der Messleitung. Eine übliche koaxiale Messleitung der Länge l hat die Kapazität

$$C_{Ltg.} \approx l \cdot 50 \text{ pF/m} .$$

Bei Verwendung eines Tastkopfes werden zusätzlich ein ohmscher Widerstand R_v und dazu parallel eine einstellbare Kapazität (sog. Trimmer) C_v in den Messpfad geschaltet. Übliche Werte sind $R_v = 9 \cdot R_m$ oder $R_v = 99 \cdot R_m$, also Spannungsteiler 1:10 bzw. 1:100. Mit C_v wird der Tastkopf abgestimmt, so dass

$$R_v \cdot C_v = R_m \cdot (C_m + C_{Ltg.})$$

gilt. Damit erhält man einen frequenzunabhängigen Spannungsteiler. Die Signalform bleibt also erhalten, ist jedoch um das Spannungsteilverhältnis in der Amplitude kleiner.

Der Vorwiderstand ist nötig, weil andernfalls C_v parallel zum Innenwiderstand R_i des Messobjektes geschaltet werden müsste und dann auf $R_i C_v = R_m \cdot (C_m + C_{Ltg.})$ abgestimmt würde. Da sich aber im Allgemeinen R_i von Messpunkt zu Messpunkt ändert, müsste der Tastkopf für jeden Messpunkt neu abgestimmt werden, was offenbar nicht praktikabel ist.

Moderne Oszilloskope detektieren das Spannungsteilverhältnis automatisch und korrigieren die Amplitudenanzeige um diesen Faktor, so dass der Nutzer „nichts von der Spannungsteilung bemerkt“. Das Messobjekt wird dann insgesamt mit dem ohmschen Widerstand $R_v + R_m$ belastet. Für $R_i \lesssim 10^{-2}(R_v + R_m)$ wird die Amplitude auf dem Bildschirm Oszilloskopes nur unmerklich verfälscht dargestellt.

Die Abstimmung des Tastkopfes erfolgt in der Praxis mit einem Testsignal, dessen Signalform gut mit dem Auge kontrolliert werden kann und des spektrale Zusammensetzung hinreichend reichhaltig ist. Dies ist bei Rechtecksignalen mit der Grundfrequenz 1 kHz der Fall. Derartige Testsignale werden von modernen Oszilloskopen selbst geliefert, so dass zur Abstimmung kein Funktionsgenerator extra benötigt wird.

Wegen der Eingangs- und Leitungskapazität muss also besonders bei hohen Frequenzen mit einem Tastkopf oszillographiert werden, nur so werden möglichst unverfälschte Signalformen dargestellt. Die Missachtung dieses Umstandes ist ein häufig gemachter Fehler in der Laborpraxis. Stört die Amplitudenabschwächung, weil die Messsignale sehr klein sind, so muss auf einen aktiven Tastkopf zurückgegriffen werden.

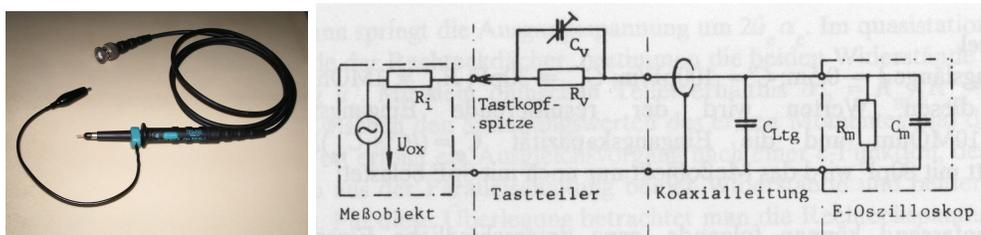


Abb. 4.4: Tastkopf eines Oszilloskopes mit Ersatzschaltbild einer Messanordnung

4.5 Reihenschaltung von zwei Hochpässen (Filter 2. Ordnung)

Werden mehrere Hoch- oder Tiefpässe in Reihe geschaltet, so erhält man Filter höherer Ordnung, die im Bodediagramm steilere Abfälle im Sperrbereich haben. Ein Beispiel zeigt Abb. 4.5.

Die Übertragungsfunktion erhält man aus folgender Rechnung, unter Verwendung von $\Omega_1 \equiv \omega R_1 C_1$, $\Omega_2 \equiv \omega R_2 C_2$, $R_{C_1} = 1/(j\omega C_1)$, $R_{C_2} = 1/(j\omega C_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_1} &= \frac{R_2}{R_{C_2} + R_2} \\ &= \frac{R_2 R_{C_2}^{-1}}{1 + R_2 R_{C_2}^{-1}} \\ &= \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_e} &= \frac{R_1 \parallel (R_{C_2} + R_2)}{R_1 \parallel (R_{C_2} + R_2) + R_{C_1}} && \left| \text{erweitern mit: } R_{C_1}^{-1} \cdot [R_1 \parallel (R_{C_2} + R_2)]^{-1} \right. \\ &= \frac{R_{C_1}^{-1}}{R_{C_1}^{-1} + [R_1 \parallel (R_{C_2} + R_2)]^{-1}} && \left| \text{beachten: } [R_1 \parallel (R_{C_2} + R_2)]^{-1} = R_1^{-1} + (R_{C_2} + R_2)^{-1} \right. \\ &= \frac{R_{C_1}^{-1}}{R_{C_1}^{-1} + R_1^{-1} + (R_{C_2} + R_2)^{-1}} && \left| \text{erweitern mit: } R_1 \right. \\ &= \frac{R_1 R_{C_1}^{-1}}{1 + R_1 R_{C_1}^{-1} + R_1 / (R_{C_2} + R_2)} && \left| \text{beachten: } R_1 R_{C_1}^{-1} = j\Omega_1 \right. \\ &= \frac{j\Omega_1}{1 + j\Omega_1 + R_1 / (R_{C_2} + R_2)} \end{aligned}$$

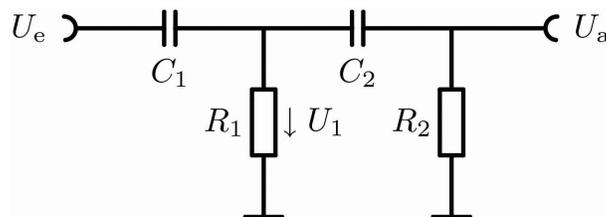


Abb. 4.5: Reihenschaltung von zwei RC-Hochpässen

Somit gilt für die Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{U_1}{U_e} \cdot \frac{U_a}{U_1} = \frac{j\Omega_2}{1+j\Omega_2} \cdot \frac{j\Omega_1}{1+j\Omega_1+k(\omega)}, \quad \text{mit} \quad k(\omega) \equiv \frac{R_1}{R_{C_2} + R_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\Omega_2}{1 + \Omega_2}.$$

Für $k = 0$ sind die Teilsysteme entkoppelt. Praktisch lässt sich dies für $R_1 \ll R_2$ näherungsweise erreichen. Die gesamte Übertragungsfunktion der Schaltung ergibt sich dann einfach aus dem Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen H_1 und H_2 der beiden Hochpässe. Für den Betrag der gesamten Übertragungsfunktion gilt dann

$$|H|(\omega) \approx \frac{\Omega_1}{\sqrt{1 + \Omega_1^2}} \cdot \frac{\Omega_2}{\sqrt{1 + \Omega_2^2}} \approx \begin{cases} \Omega_1 \Omega_2 & : \quad \Omega_1, \Omega_2 \ll 1 \\ \Omega_1 & : \quad \Omega_1 \ll 1, \Omega_2 \gg 1 \\ 1 & : \quad \Omega_1, \Omega_2 \gg 1 \end{cases}$$

Pro Frequenzdekade steigt $|H|(\omega)$ mit ca. +40 dB, falls $R_1 C_1, R_2 C_2 \ll \omega$, und mit ca. +20 dB, falls $R_1 C_1 \ll \omega$ und $R_2 C_2 \gg \omega$.

4.6 Doppel-T-Filter (Bandsperr)

Das sogenannte Doppel-T-Filter in Abb. 4.6 filtert ein bestimmtes Frequenzband aus dem Eingangssignal $U_e(t)$ heraus. Die Übertragungsfunktion erhält man aus der folgenden Rechnung:

Aus dem Maschensatz für die Masche aus U_a, R und $2C$ folgt unter Beachtung von $R_C = (j\omega C)^{-1}$,

$$U_a = R \cdot I_3 + \frac{R_C}{2} \cdot (I_1 + I_3) = \frac{R_C}{2} \cdot I_1 + \left(R + \frac{R_C}{2} \right) \cdot I_3. \quad (4.4)$$

Es bleibt also, die Ströme I_1 und I_3 zu berechnen. Dazu werden zunächst die übrigen Maschen betrachtet. Man erhält,

$$U_e = R \cdot I_1 + \frac{R_C}{2} \cdot (I_1 + I_3)$$

$$U_e = R_C \cdot I_2 + \frac{R}{2} \cdot (I_2 - I_3)$$

$$0 = \frac{R_C}{2} \cdot (I_1 + I_3) - \frac{R}{2} \cdot (I_2 - I_3) + (R_C + R) \cdot I_3$$

Dies liefert das folgende lineare Gleichungssystem für die Ströme,

$$\begin{pmatrix} R + R_C/2 & 0 & R_C/2 \\ 0 & R_C + R/2 & -R/2 \\ R_C/2 & -R/2 & (3/2)(R_C + R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_e \\ U_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung von $\Omega \equiv \omega RC$ kann man nach Multiplikation aller Gleichungen mit $2/R_C$ wie folgt schreiben (beachte: $R \cdot 2/R_C = 2j\Omega$),

$$\begin{pmatrix} 1 + 2j\Omega & 0 & 1 \\ 0 & 2 + j\Omega & -j\Omega \\ 1 & -j\Omega & 3(1 + j\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_e \cdot 2/R_C \\ U_e \cdot 2/R_C \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem wird nun nach der Cramersche Regel gelöst. Dazu wird zunächst die Determinante D der Koeffizientenmatrix bestimmt (Entwicklung nach der ersten Spalte),

$$\begin{aligned} D &= (1 + 2j\Omega) \cdot [(2 + j\Omega) \cdot 3(1 + j\Omega) + \Omega^2] - (2 + j\Omega) \\ &= (1 + 2j\Omega) \cdot (6 + 9j\Omega - 2\Omega^2) - (2 + j\Omega) \\ &= 4 \cdot (1 + 5j\Omega - 5\Omega^2 - j\Omega^3) \\ &= 4 \cdot (1 + j\Omega) \cdot (1 + 4j\Omega - \Omega^2) \end{aligned}$$

Die Determinanten D_m der Koeffizientenmatrix bei Substitution der m -ten Spalte, $m = 1; 2; 3$, durch

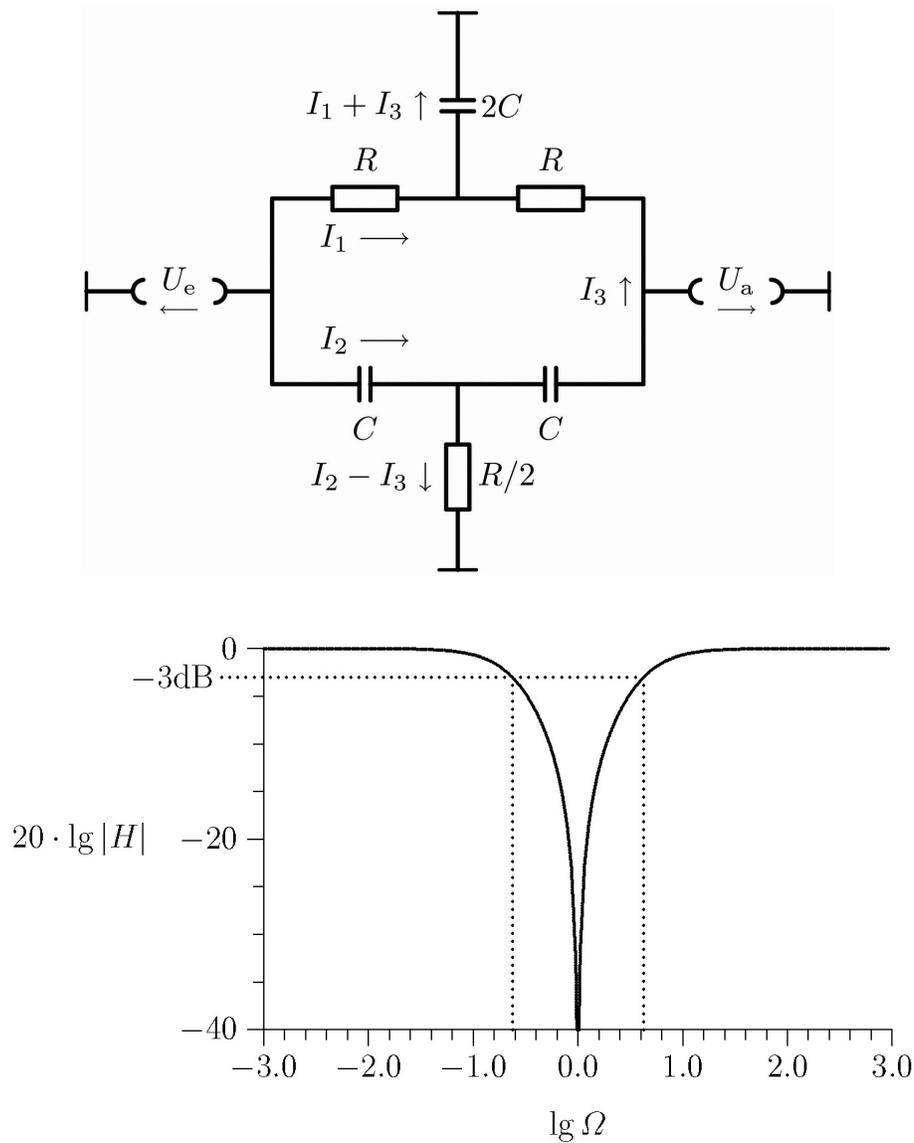


Abb. 4.6: Schaltung und Amplitudengang $|H| = |U_a/U_e|$ des Doppel-T-Filter (Bandsperr)

den rechten Spaltenvektor lauten (Entwicklung nach der m -ten Spalte),

$$\begin{aligned} D_1 &= (U_e \cdot 2/R_C) \cdot [(2 + j\Omega) \cdot 3(1 + j\Omega) + \Omega^2 - j\Omega] \\ &= (U_e/R_C) \cdot 4 \cdot (3 + 4j\Omega - \Omega^2) \\ &= (U_e/R_C) \cdot 4 \cdot (1 + j\Omega) \cdot (3 + j\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= (U_e \cdot 2/R_C) \cdot [(1 + 2j\Omega) \cdot 3(1 + j\Omega) - 1 - j\Omega] \\ &= (U_e/R_C) \cdot 4 \cdot (1 + 4j\Omega - 3\Omega^2) \\ &= (U_e/R_C) \cdot 4 \cdot (1 + j\Omega) \cdot (1 + 3j\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= (U_e \cdot 2/R_C) \cdot [-(2 + j\Omega) + (1 + 2j\Omega)j\Omega] \\ &= -(U_e/R_C) \cdot 4 \cdot (1 + \Omega^2) \\ &= -(U_e/R_C) \cdot 4 \cdot (1 + j\Omega) \cdot (1 - j\Omega) \end{aligned}$$

Für die Ströme folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{3 + j\Omega}{1 + 4j\Omega - \Omega^2} \cdot \frac{U_e}{R_C} \\ I_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{1 + 3j\Omega}{1 + 4j\Omega - \Omega^2} \cdot \frac{U_e}{R_C} \\ I_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{-(1 - j\Omega)}{(1 + 4j\Omega - \Omega^2)} \cdot \frac{U_e}{R_C} \end{aligned}$$

Der Strom I_2 wurde nur der Vollständigkeit wegen angegeben, im Folgenden wird er jedoch nicht benötigt. Damit kann Gl. (4.4) unter Beachtung von $R/R_C = j\Omega$ wie folgt weitergeschrieben werden,

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_e} &= \frac{R_C}{2} \cdot I_1/U_e + \left(R + \frac{R_C}{2} \right) \cdot I_3/U_e \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + j\Omega}{1 + 4j\Omega - \Omega^2} - \left(j\Omega + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1 - j\Omega}{1 + 4j\Omega - \Omega^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(3 + j\Omega) - (1 + 2j\Omega) \cdot (1 - j\Omega)}{1 + 4j\Omega - \Omega^2} \end{aligned}$$

Dies führt schließlich auf die gesuchte Übertragungsfunktion $H \equiv U_a/U_e$ des Doppel-T-Filters,

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{1 - \Omega^2}{1 + 4j\Omega - \Omega^2}} \quad (4.5)$$

In Eulerscher Schreibweise lautet die Übertragungsfunktion

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4\Omega}{1 - \Omega^2}\right)^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{4\Omega}{1 - \Omega^2}}} \quad (4.6)$$

In speziellen Situationen erhält man

$$H(\omega) \begin{cases} \approx 1 & : \quad \Omega \ll 1 \\ = 0 & : \quad \Omega = 1 \\ \approx 1 & : \quad \Omega \gg 1 . \end{cases}$$

An der Resonanzstelle $\Omega = 1$ wird die Kreisfrequenz $\omega = (RC)^{-1}$ also vollständig unterdrückt, wie in Abb. 4.6 dargestellt. Doppel-T-Filter können somit zur Beseitigung von Störfrequenzen eingesetzt werden, etwa von 50 Hz-Brummen. An der Resonanzstelle springt die Phase von $-\pi/2$ bei $\Omega \lesssim 1$ auf $+\pi/2$ bei $\Omega \gtrsim 1$. Für $\Omega \ll 1$ und $\Omega \gg 1$ ist die Phasenverschiebung nahezu Null.

Die *Bandbreite* B des Filters wird definiert als der Frequenzbereich, in dem die Abschwächung der Amplitude unter -3 dB liegt (genauer: unter $20 \lg(1/\sqrt{2}) = -10 \cdot \lg 2 = -3,0102 \dots$ dB). Das ist also der Frequenzbereich, in welchem $|H|(\Omega) \leq 1/\sqrt{2}$ gilt. Aus Gleichung 4.6 sieht man, dass dafür $\left(\frac{4\Omega}{1-\Omega^2}\right)^2 \geq 1$ gelten muss. Dies ist für $\Omega = \Omega_u \dots \Omega_o$ der Fall, mit

$$\lg \Omega_u = \lg(\sqrt{5} - 2) \approx -0,626 \dots \quad , \quad \lg \Omega_o = \lg(\sqrt{5} + 2) \approx +0,626 \dots .$$

Somit erhält man unter Beachtung von $2\pi \cdot f_u = \omega_u = \Omega_u/(RC)$ und analog $2\pi \cdot f_o = \omega_o = \Omega_o/(RC)$ für die Bandbreite

$$B \equiv f_o - f_u = \frac{\Omega_o - \Omega_u}{2\pi \cdot RC} = \frac{4}{2\pi \cdot RC}$$

Mit der sogenannten *Güte* der Bandsperre wird die Resonanzfrequenz $f_{\text{Resonanz}} = (2\pi \cdot RC)^{-1}$ ins Verhältnis zur Bandbreite gesetzt,

$$Q \equiv \frac{f_{\text{Resonanz}}}{B} = 1/4 .$$

Beispielsweise erhält man für $f_{\text{Resonanz}} = 50$ Hz, dass alle Frequenzen von

$$(\Omega_u \cdot f_{\text{Resonanz}} = 11,8 \dots \text{ Hz}) \quad \text{bis} \quad (\Omega_o \cdot f_{\text{Resonanz}} = 211,8 \dots \text{ Hz})$$

stärker als -3 dB gedämpft werden.

4.7 Phasenschieber (Allpass)

In der Abb. 4.7 ist eine Schaltung angegeben, welche harmonische Eingangsspannungen $U_e(t) = \hat{U}_e \cdot e^{j\omega t}$ in der Phase um $\varphi(\omega)$ verschiebt, die Amplitude bleibt erhalten. Die Übertragungsfunktion $H \equiv U_a/U_e$ erhält man aus folgender Rechnung,

$$\begin{aligned} U_a &= U_e - R \cdot I \\ I &= \frac{2}{R + R_C} \cdot U_e \\ U_a &= U_e \left(1 - R \cdot \frac{2}{R + R_C} \right) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $R_C = (j\omega C)^{-1}$, $\Omega \equiv \omega RC$ gilt $R/R_C = j\Omega$, und es folgt für die Übertragungsfunktion,

$$H(\Omega) = 1 - \frac{2R}{R + R_C} = \frac{R_C - R}{R_C + R} = \frac{1 - j\Omega}{1 + j\Omega}$$

Unter Beachtung von $1 \pm j\Omega = \sqrt{1 + \Omega^2} e^{\pm \arctan \Omega}$ folgt schließlich

$$H(\Omega) = e^{j\varphi(\omega)} \quad , \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = -2 \arctan \Omega \quad , \quad \Omega = \omega RC \quad (4.7)$$

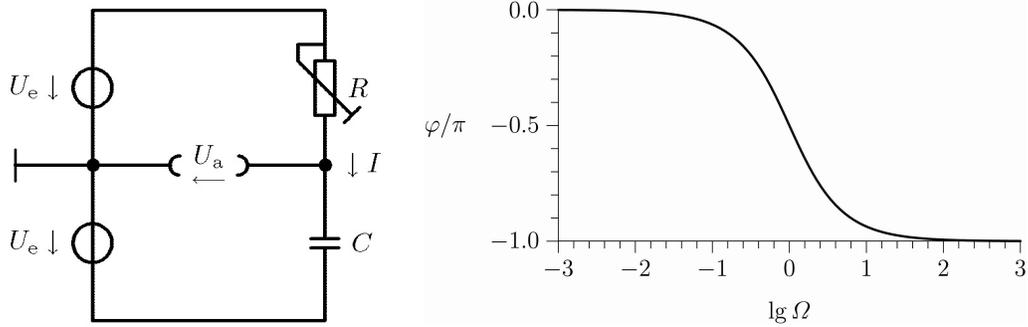


Abb. 4.7: Phasenschieber mit Phasengang der Ausgangsspannung U_a gegenüber der Eingangsspannung U_e . Bei fester Frequenz $\omega = \Omega/(RC)$ und Kapazität C nimmt der Betrag der Verschiebung zu, wenn der Widerstand R wächst

4.8 Zweipol–Ersatzschaltung

In einer elektronischen Schaltung kann an einem beliebigen Punkt die elektrische Spannung gegenüber einem Bezugspunkt, der *Masse*, gemessen werden. Somit kann der Zweipol aus Mess- und Massepunkt als Spannungsquelle aufgefasst werden. Besteht die Schaltung nur aus (idealen) Spannungs- und Stromquellen, sowie passiven Bauelementen (ohmsche Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten), so kann diese Spannungsquelle immer durch eine Ersatzschaltung aus idealer Spannungsquelle mit der Spannung U_{Ersatz} in Reihe mit einem Innenwiderstand $R_{\text{Ersatz}} = R_i + j \cdot X_i$ dargestellt werden, einer Summe aus Realteil R_i und Imaginärteil X_i .

Die Ersatzspannung U_{Ersatz} erhält man aus der *Leerlaufspannung*, d.h., man berechnet die Spannung am Messpunkt ohne dass ein Strom “gezogen” wird (lastfrei). Den Ersatz–Innenwiderstand R_{Ersatz} erhält man aus dem Kurzschlussstrom I_{Kurz} , indem man den Messpunkt mit Masse kurz schließt. Dann fällt die gesamte Spannung U_{Ersatz} an R_{Ersatz} ab, es gilt also $R_{\text{Ersatz}} = U_{\text{Ersatz}}/I_{\text{Kurz}}$.

Ein Beispiel zeigt Abb. 4.8. Hier gelten

$$U_{\text{Ersatz}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$I_{\text{Kurz}} = \frac{U}{R_1}$$

$$R_{\text{Ersatz}} = \frac{U_{\text{Ersatz}}}{I_{\text{Kurz}}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2$$

Für $R_1 = R_2$ erhält man also $U_{\text{Ersatz}} = U/2$ und $R_{\text{Ersatz}} = R/2$.

4.9 Komplexe Leistungsanpassung

Eine Spannungsquelle $U(t) = \hat{U} \cdot \cos \omega t$ habe den komplexen Innenwiderstand $R_i + jX_i$ und werde mit dem komplexen Widerstand $R_L + jX_L$ belastet, Abb. 4.9. Es stellt sich die Frage, wie bei gegebener Spannungsquelle (U, R_i, X_i) der Lastwiderstand gewählt werden muss, damit die Wirkleistung P am ohmschen Anteil R_L des Lastwiderstands im zeitlichen Mittel maximal wird.

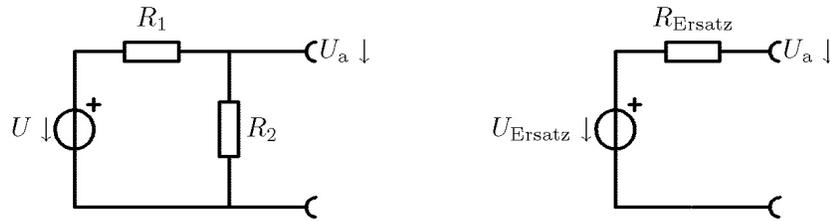
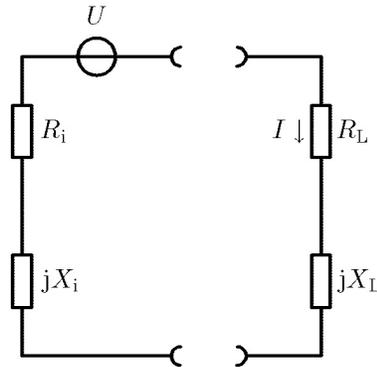


Abb. 4.8: Links: Ohmscher Spannungsteiler, Rechts: Ersatzschaltung

Abb. 4.9: Eine Quelle für harmonische Spannungen $U = |U| \cdot \cos \omega t$ mit komplexem Innenwiderstand $R_i + jX_i$ wird mit einem komplexen Widerstand $R_L + jX_L$ belastet. Der Leistungsumsatz im Realteil R_L des Lastwiderstandes wird maximal, wenn $R_L = R_i$ und $X_L = -X_i$ gelten

Am ohmschen Widerstand R_L gibt es keine Phasenverschiebung zwischen Strom $I_{R_L}(t)$ und Spannung $U_{R_L}(t)$. Folglich gilt für den über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ gemittelten Leistungsumsatz¹⁾

$$\begin{aligned}
 P_{R_L} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_{R_L}(t) \cdot I_{R_L}(t) dt \\
 &= R_L \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_{R_L}^2(t) dt \\
 &= R_L \cdot |I_{R_L}|^2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos^2 \omega t dt \\
 &= \frac{1}{2} \cdot R_L \cdot |I_{R_L}|^2
 \end{aligned}$$

Der Betrag (Amplitude) des Stroms I_{R_L} in R_L , $|I_{R_L}|$, ist gleich dem Betrag des Gesamtstromes I , und

¹⁾Beachte:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

somit

$$\begin{aligned} |I_{R_L}|^2 = |I|^2 &= \left| \frac{U}{R_i + jX_i + R_L + jX_L} \right|^2 \\ &= \frac{|U|^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man,

$$P_{R_L} = \frac{1}{2} \cdot R_L \cdot \frac{|U|^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$$

Zur Maximierung dieser Leistung können bei gegebener Spannungsquelle der Real- und der Imaginärteil der Last, R_L bzw. X_L , voneinander unabhängig gewählt werden. Man stellt zunächst hinsichtlich des Imaginärteils fest, dass P_{R_L} für $X_L = -X_i$ am größten wird. Bleibt also noch die Wahl für R_L . Diese folgt aus der Maximierung von

$$P_{R_L} = \frac{1}{2} \cdot |U|^2 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2}, \quad \text{für } X_L = -X_i.$$

Die Realteile der Widerstände können nicht negativ sein. Deshalb folgt die Maximumsbedingung aus,

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = \frac{1}{2} \cdot |U|^2 \cdot \frac{R_i^2 - R_L^2}{(R_i + R_L)^4} = 0, \quad \text{für } R_L = R_i.$$

Zusammengefasst muss zur komplexen Leistungsanpassung also Folgendes gelten:

$$\text{Komplexe Leistungsanpassung: } R_L = R_i, \quad X_L = -X_i$$

Kapitel 5

Lineare Systeme und Fourier–Transformation

5.1 Lineares zeitinvariantes System

Im Kapitel 4 wurden verschiedene Schaltungen behandelt, die eine Eingangs– in eine Ausgangsspannung U_a überführen, $U_e \rightarrow U_a$. Diese Signaltransformation wurde jedoch nur für harmonische Eingangsspannungen $U_e(t) = |U_e| \cdot \cos \omega t$ betrachtet. Wesentlicher Grund hierfür ist, dass die Schaltungen aus ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten bequem mit den Kirchhoffschen Regeln und der komplexen Widerstandsrechnung behandelt werden können. Sind die Eingangsspannungen hingegen nicht harmonisch, so kann mit dieser Methodik die Ausgangsspannung nicht ohne Weiteres berechnet werden. Im Allgemeinen müsste man für den Strom I auf eine Kapazität C den Ansatz $I = C \cdot (dU/dt)$ machen, wobei U die Spannung über der Kapazität ist. Für die Spannung U über einer Induktivität L lautet der allgemeine Ansatz $U = -L \cdot (dI/dt)$, worin I der Strom durch die Induktivität ist. Dies würde bei Anwendung der Kirchhoffschen Regeln letztlich auf eine *lineare* gewöhnliche Differentialgleichung für die gesuchte Ausgangsspannung $U_a(t)$ führen. Die gegebene Eingangsspannung $U_e(t)$ würde eine explizite Zeitabhängigkeit in der Differentialgleichung darstellen und das entsprechende dynamische System nichtautonom machen. Dieser Weg der Berechnung von $U_a(t)$ verzichtet auf die elegante komplexe Widerstandsrechnung, dafür ist er allgemeiner, weil er im Unterschied zur komplexen Widerstandsrechnung auch für nichtharmonische Eingangsspannungen $U_e(t)$ anwendbar ist.

In diesem Kapitel wird eine Methodik vorgestellt, die es gestattet, für (fast) beliebig zeitlich veränderliche Eingangsspannungen die Ausgangsspannung zu berechnen, also auch für nichtharmonische. Dabei werden aber auch die Vorteile der komplexen Widerstandsrechnung genutzt.

Zur Entwicklung dieser Methodik ist es ratsam, eine allgemeinere Sicht zu entwickeln, indem die Eingangsspannung als zeitlich veränderliches Eingangssignal $x(t)$ aufgefasst wird. Die elektronische Schaltung wird als *System* angesehen, welches $x(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$ überführt. Das System bewirkt also eine Signaltransformation, der entsprechende Operator sei mit \mathbf{S} bezeichnet,

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \mathbf{S}[x(t)] .$$

Zentrales Anliegen ist es zum Beispiel, zu einem realen System, den Operator \mathbf{S} zu finden. Dazu könnte man verschiedene Testsignale $x(t)$ verwenden, und $y(t)$ messen. Im Allgemeinen ist es jedoch recht

schwierig oder gar prinzipiell unmöglich das System \mathbf{S} eindeutig zu bestimmen. Insbesondere gibt es keine Theorie, mit welcher \mathbf{S} bei gegebenen Ein- und Ausgangssignalen eindeutig bestimmt werden könnte. Allerdings sind mit den Übertragungsfunktionen von Schaltungen mit passiven Bauelementen (Kap. 4) solche Berechnungen für harmonische Eingangssignale bereits erfolgt.

Die Situation verbessert sich jedoch, wenn man an das System Bedingungen stellt und somit die Vielzahl der Möglichkeiten für den Operator \mathbf{S} einschränkt. Als sehr nützlich erweist sich dabei die Annahme, das System sei *linear* und *zeitinvariant*.

Linearität: Der Operator \mathbf{S} eines *linearen* Systems genügt für zwei beliebige Eingangssignale $x_1(t)$ sowie $x_2(t)$ sowie willkürlich gewählte reelle Zahlen a_1, a_2 der *Überlagerungsbedingung*

$$\mathbf{S}[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] = a_1 \cdot \mathbf{S}[x_1(t)] + a_2 \cdot \mathbf{S}[x_2(t)] \quad . \quad (5.1)$$

Diese Beziehung besagt, dass die Antwort des linearen Systems auf eine Summe von Signalen gleich der Summe von Systemantworten ist, die man erhalten hätte, wenn die Signale einzeln übertragen worden wären. Darüber hinaus ist es gleich, ob das Eingangssignal zunächst mit einem beliebigen Faktor gestreckt bzw. gestaucht und dann übertragen oder in umgekehrter Reihenfolge verfahren wird.

Zeitinvarianz: Bezeichne $\mathbf{V}^\tau: x(t) \rightarrow x(t + \tau) \equiv \mathbf{V}^\tau[x(t)]$ den (linearen) Verschiebungsoperator. Ein System heißt *zeitinvariant* (allgemeiner: *verschiebungsinvariant*), wenn zu einer beliebigen Verschiebung τ die Operatoren \mathbf{S} und \mathbf{V}^τ kommutativ sind,

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{V}^\tau[x(t)] = \mathbf{V}^\tau \circ \mathbf{S}[x(t)] \quad . \quad (5.2)$$

Die Reihenfolge der Operationen \mathbf{V}^τ und \mathbf{S} sind also bei zeitinvarianten Systemen vertauschbar bzw. \mathbf{S} hängt hier nicht von der Zeit ab (wohl aber das transformierte Signal y).

Faltungsintegral: Eine allgemeine Form des Operators \mathbf{S} eines linearen zeitinvarianten Systems ist das *Faltungsintegral*

$$\mathbf{S}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t^*) \cdot h(t - t^*) dt^* \equiv x(t) * h(t) \quad (5.3)$$

Die Funktion h charakterisiert das System und wird *Gewichtsfunktion* genannt. Man prüft leicht die Linearität und Zeitinvarianz,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 \cdot x_1(t^*) + a_2 \cdot x_2(t^*)] \cdot h(t - t^*) dt^* \\ &= a_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t^*) \cdot h(t - t^*) dt^* + a_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t^*) \cdot h(t - t^*) dt^* \\ &= a_1 \cdot \mathbf{S}[x_1(t)] + a_2 \cdot \mathbf{S}[x_2(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \circ \mathbf{V}^\tau[x(t)] &= \mathbf{S}[x(t + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t^*) \cdot h(t + \tau - t^*) dt^* \\ &= \mathbf{V}^\tau \circ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t^*) \cdot h(t - t^*) dt^* \\ &= \mathbf{V}^\tau \circ \mathbf{S}[x(t)] \end{aligned}$$

Lineare zeitinvariante Systeme sind häufig recht gute Modelle realer Systeme. So sind z.B. alle elektrischen Übertragungsnetzwerke, die nur aus den passiven Bauelementen (ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten) bestehen, linear und zeitinvariant. Ebenso sind aktive Filter (s. Kap. 7), sofern keine Übersteuerungen infolge zu großer Signalpegel auftreten, in guter Näherung als linear und zeitinvariant anzusehen. Andererseits stellt z.B. eine Schaltung zur Spannungsstabilisierung (z. B. in Abb. 6.5, S. 97) oder ein übersteuerter Verstärker ein nichtlineares System dar. Streng genommen sind alle realen Systeme nichtlinear und zeitvariant. Betreibt man jedoch eine elektronische Schaltung mit Eingangssignalen, die in einem bestimmten eingegrenzten Bereich liegen, so kann man häufig in guter Näherung das System als linear modellieren. Werden darüber hinaus etwa alterungsbedingte Änderungen des Übertragungsverhaltens des realen Systems vernachlässigt, so kann man das System als zeitinvariant betrachten.

Beispiel 1 (Rechnung mit Übertragungsfunktion): Für Schaltungen (Systeme), die im Kapitel 4 behandelt wurden, berechnet sich die Ausgangsspannung für harmonische Eingangsspannungen $U_e(t) = |U_e| \cdot e^{j\omega t}$ durch Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega) = |H|(\omega) \cdot e^{j\varphi_H(\omega)}$,

$$U_a(t) = H(j\omega) \cdot U_e(t) = |H|(\omega) \cdot |U_e| \cdot e^{j(\omega t + \varphi_H(\omega))} .$$

Werden nun am Eingang zwei harmonische Spannungen

$$U_{e,1}(t) = |U_{e,1}| e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} , \quad U_{e,2}(t) = |U_{e,2}| e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

überlagert, so erhält man,

$$U_a(t) = H(j\omega_1) \cdot U_{e,1}(t) + H(j\omega_2) \cdot U_{e,2}(t) \tag{5.4}$$

Dies ist unmittelbarer Ausdruck dafür, dass diese Übertragungsnetzwerke aus R , C und L linear sind — die Ausgangsspannung ergibt sich immer als Lösung einer linearen gewöhnlichen nichtautonomen Differentialgleichung. Die Eingangsspannung geht hier als eine explizite Zeitfunktion ein.

Beispiel 2 (Rechnung mit Differentialgleichung für R–C–Tiefpass): Der RC -Tiefpass in Abb. 4.1 a) wird durch die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$RC \cdot \frac{dU_a(t)}{dt} + U_a(t) = U_e(t)$$

beschrieben. Sind hier $U_{a,1}(t)$ und $U_{a,2}(t)$ Lösungen für die Eingangsspannungen $U_{e,1}(t)$ und $U_{e,2}(t)$, so ist $U_{a,1}(t) + U_{a,2}(t)$ Lösung für die Eingangsspannung $U_{e,1}(t) + U_{e,2}(t)$. Für harmonische Eingangsspannungen folgt unmittelbar Gl. (5.4).

Beispiel 3 (allgemeiner Fall): Die Betrachtung kann nun auf den allgemeineren Fall angewandt werden, in dem $U_e(t)$ eine Überlagerung von beliebigen harmonischen Schwingungen $U_{e,n}(t) = |U_{e,n}| e^{j(\omega_n t + \varphi_n)}$ ist

$$\begin{aligned} U_a(t) &= \sum_n |H(\omega_n)| e^{j\varphi_H(\omega_n)} \cdot |U_{e,n}| e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} \\ &= \sum_n |H(\omega_n)| |U_{e,n}| e^{j(\omega_n t + \varphi_n + \varphi_H(\omega_n))} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Fazit: Ist für eine RCL -Schaltung die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ bekannt und kann die Eingangsspannung als Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit den Amplituden $|U_{e,n}|$ und Phasen φ_n dargestellt werden, so kann die Ausgangsspannung nach Gl. (5.5) berechnet werden. Es stellt sich somit die Frage, ob (und wenn Ja, wie) eine beliebige Spannung U_e als Überlagerung von harmonischen Spannungen dargestellt werden kann. Die Antwort hierauf gibt das mathematische Kalkül der Fourier-Transformation.

5.2 Fourier-Transformation

Ziel der sogenannten *Fourier-Transformation* ist es, ein (Zeit-)Signal $x(t)$ als additive Überlagerung von harmonischen Signalen darzustellen. Die Fourier-Transformierte von $x(t)$, $\mathcal{F}[x(t)](j\omega)$, ist eine komplexe Funktion der (Kreis-)Frequenz ω . Sie gibt Amplitude und Phase der harmonischen Komponente der Frequenz ω an, die zur Überlagerung beiträgt. Man unterscheidet zunächst den periodischen und den nicht periodischen Fall. Darüber hinaus ist für die moderne Signalverarbeitung die zeitdiskrete Fourier-Transformation von großer Bedeutung. All diese Fälle werden im Folgenden behandelt.

5.2.1 Fourier-Reihe für periodische Funktionen

Für zeit-kontinuierliche periodische Signale $x(t)$ lautet die Fourier-Zerlegung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n\omega_0 t + b_n \cdot \sin n\omega_0 t . \quad (5.6)$$

Hierbei ist $T_0 \equiv 2\pi/\omega_0$ die (triviale) Periode von $x(t)$. Die sogenannten *Fourier-Koeffizienten* Fourier-Koeffizient erhält man aus,

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sin n\omega_0 t \, dt. \quad (5.7)$$

Der Koeffizient

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \, dt = 2 \cdot \bar{x}$$

repräsentiert den *Gleichanteil* (Mittelwert) \bar{x} des Signals.

Existenz: Die Fourier-Zerlegung ist nicht immer möglich. So ist zum Beispiel die periodische Funktion $x(t) = \sin \frac{1}{\sin \omega t}$ nicht zerlegbar. Hinreichende, im Allgemeinen jedoch nicht notwendige Bedingungen für die Existenz der Fourier-Zerlegung eines Signals $x(t)$ sind:

1. $x(t)$ ist absolut integrierbar, d.h. $\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)| \, dt < \infty$.
2. In einer Periode $[t, t+T_0]$ treten nur endlich viele Unstetigkeiten und relative Minima und Maxima auf.

Für reale periodische Signale können diese Bedingungen zumeist als erfüllt angesehen werden.

Komplexe Darstellung: Eine elegantere Darstellung gelingt durch Einführung der komplexen Fourier-Koeffizienten,

$$X(\pm jn\omega_0) = \frac{a_n \mp j b_n}{2} \quad \text{für } n \neq 0 \quad \text{und} \quad X(0) = \frac{a_0}{2}. \quad (5.8)$$

Somit kann das T_0 -periodische Signal in (5.6) bzw. (5.11) auch wie folgt geschrieben werden,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (5.9)$$

Diese Darstellung ist der in Gl. (5.6) äquivalent, denn es gilt für $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} & X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} + X(-jn\omega_0) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \frac{a_n - j \cdot b_n}{2} \cdot (\cos n\omega_0 t + j \cdot \sin n\omega_0 t) + \frac{a_n + j \cdot b_n}{2} \cdot (\cos n\omega_0 t - j \cdot \sin n\omega_0 t) \\ &= a_n \cdot \cos n\omega_0 t + b_n \cdot \sin n\omega_0 t. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ erhält man $X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} = X(0) = a_0/2$.

Die komplexen Fourier-Komponenten $X(jn\omega_0)$ können aus den Beziehungen (5.7) und (5.8) erhalten werden oder direkt aus

$$X(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \, dt \quad (5.10)$$

Dies folgt unter Beachtung von $e^{-jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t - j \cdot \sin n\omega_0 t$ aus

$$\begin{aligned} X(\pm jn\omega_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \mp j \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sin n\omega_0 t \, dt \\ &= (a_n \mp j \cdot b_n) / 2 . \end{aligned}$$

Die beiden Koeffizienten $X(\pm jn\omega_0)$ sind konjugiert komplex, folglich erhält man das Betragsquadrat aus

$$|X(jn\omega_0)|^2 = X(+jn\omega_0) \cdot X(-jn\omega_0) = \frac{a_n - jb_n}{2} \cdot \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} .$$

Darstellung mit Phasenverschiebung: Die Fourier-Reihe (5.6) kann unter Verwendung der Abkürzungen

$$A_0 \equiv \frac{a_0}{2} , \quad A_n \equiv \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 \cdot |X(jn\omega_0)| \quad \text{und} \quad \varphi_n \equiv -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

folgendermaßen dargestellt werden,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) . \quad (5.11)$$

Diese Darstellung ergibt sich, wenn man die komplexen Fourierkoeffizienten $X(\pm jn\omega_0)$ in der Summe von Gl. (5.9) wie folgt zusammenfasst,

$$\begin{aligned} &X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} + X(-jn\omega_0) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \frac{a_n - j \cdot b_n}{2} \cdot e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + j \cdot b_n}{2} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \cdot e^{+j \cdot [n\omega_0 t - \arctan(b_n/a_n)]} + \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \cdot e^{-j \cdot [n\omega_0 t - \arctan(b_n/a_n)]} \\ &= A_n \cdot \frac{e^{+j \cdot (n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{-j \cdot (n\omega_0 t + \varphi_n)}}{2} \\ &= A_n \cdot \cos[n\omega_0 t + \varphi_n] . \end{aligned}$$

Beispiele: Im Anhang A.1 (Seite 197 ff.) sind einige Beispiele für Reihenentwicklungen von Standardsignalen (u.a. Rechteck- und Dreiecksignal) aufgeführt.

Signalenergie: Fällt eine Spannung $U(t)$ über einem ohmschen Widerstand R ab, so wird die Momentanleistung $P(t) = U(t) \cdot I(t) = U^2(t)/R$ umgesetzt. In der Zeitspanne T beträgt dann der Energieumsatz

$$\int_0^T P(t) \, dt = \frac{1}{R} \cdot \int_0^T U^2(t) \, dt$$

Das Integral $\int_0^T U^2(t) \, dt$ nennt man in der Signaltheorie auch *Energie des Signals*, wenngleich der Vorfaktor R^{-1} weggelassen ist. Ist das Signal periodisch, mit der Periode $T_0 = 2\pi/\omega_0$, so kann die Spannung

in eine Fourierreihe entwickelt werden, und man erhält

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} U^2(t) dt &= \int_0^{T_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \right)^2 dt \\
 &= \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_0} X(jn_1\omega_0) \cdot e^{jn_1\omega_0 t} \cdot X(jn_2\omega_0) \cdot e^{jn_2\omega_0 t} dt \\
 &= \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} X(jn_1\omega_0) \cdot X(jn_2\omega_0) \cdot \int_0^{T_0} e^{jn_1\omega_0 t} \cdot e^{jn_2\omega_0 t} dt \\
 &= T_0 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} |X(jn\omega_0)|^2 \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Hier wurde angenommen, dass der Gleichanteil $X(-j \cdot 0 \cdot \omega_0)$ verschwindet. Darüber hinaus ist zu beachten, dass Folgendes gilt,

$$\int_0^{T_0} \frac{e^{jn_1\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}} \cdot \frac{e^{jn_2\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}} dt = \begin{cases} 1 & : n_1 = -n_2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{5.13}$$

Somit kann der Term

$$\frac{T_0}{R} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} |X(jn\omega_0)|^2$$

als Energie interpretiert werden, welche im Widerstand R in der Zeit T_0 umgesetzt, d.h., von Elektro- in Wärmeenergie gewandelt wird. Die Summanden $|X(jn\omega_0)|^2$, $n = 1, 2, \dots$, nennt man *Leistungsspektrum* (engl.: *power spectrum*).

Mathematische Interpretation: Die Fourierreihendarstellung in Gl. (5.9) wird mathematisch wie folgt interpretiert: Sei $L^2(I)$ der Hilbertraum der im Intervall $I \equiv [-T_0/2, T_0/2]$ definierten, komplexwertigen und quadratintegrierbaren Funktionen. In diesem Raum ist ein Skalarprodukt erklärt,

$$(f, g) \equiv \int_I f(t) \cdot g^*(t) dt$$

sowie eine Norm, $\|f\| \equiv \sqrt{(f, f)}$. Hierin bezeichnet g^* die konjugiert Komplexe von g . Das Funktionensystem

$$b_n(t) \equiv \frac{e^{jn\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}}, \quad n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$$

bildet hier ein Orthonormalsystem, was Gl. (5.13) ausdrückt. Dieses System ist *vollständig*, das heißt, man kann alle Funktionen in diesem Hilbertraum durch eine Superposition

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n \cdot b_n(t)$$

dieser Funktionen darstellen (wird hier nicht bewiesen). Die Darstellung ist fast überall bez. des Lebesgue Maßes auf dem Zeitintervall I eindeutig. Die Koeffizienten („Koordinaten“) F_n können *wegen der Orthonormalität* sofort berechnet werden,

$$F_n = (f, b_n) = \int_I f(t) \cdot b_n^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt .$$

Somit erhält man die Darstellung

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n \cdot \frac{e^{jn\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}} .$$

Der Vergleich mit Gl. (5.9,5.10) ergibt folgende Entsprechung

$$F_n \sim \sqrt{T_0} \cdot X(jn\omega_0) .$$

Aus mathematischer Sicht wäre es also angebracht, statt der Fourierkomponenten $X(jn\omega_0)$ die Komponenten

$$\tilde{X}(jn\omega_0) \equiv \sqrt{T_0} \cdot X(jn\omega_0)$$

zu betrachten und demzufolge anstelle von Gl. (5.9) die Darstellung

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(jn\omega_0) \cdot \frac{e^{jn\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}}$$

zu haben. Dies ist jedoch in der Elektrotechnik unüblich.

Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten ist analog zur Bestimmung der Koordinaten im 3-dimensionalen Anschauungsraum \mathbb{R}^3 . Mit dem Standardskalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv X_1 \cdot Y_1 + X_2 \cdot Y_2 + X_3 \cdot Y_3$$

und der Orthonormalbasis $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ und $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ gilt die Darstellung

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + (\mathbf{x}, \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + (\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = X_1 \cdot \mathbf{i} + X_2 \cdot \mathbf{j} + X_3 \cdot \mathbf{k} .$$

Diskrete Fouriertransformation (DFT): Für die Fouriertransformation auf Digitalrechnern benötigt man handhabbare Formeln und schnelle Algorithmen. Wir gehen dazu von der komplexen Darstellung in Gl. 5.10 aus. Wir verschieben zunächst die Integrationsgrenzen auf das Intervall $[0, T_0]$, was wegen der T_0 -Periodizität des Integranden möglich ist,

$$\begin{aligned} X(jn\omega_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Nun setzen wir $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Darüber hinaus betrachten wir im Integrationsbereich $[0, T_0]$ die Stützstellen $(m/N)T_0$, mit $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Somit erhalten wir unter Verwendung der Abtastwerte $x_m \equiv x((m/N)T_0)$,

$$X(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \approx \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot e^{-j2\pi \frac{nm}{N}}$$

Die Terme

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot e^{-j2\pi \frac{nm}{N}} , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \tag{5.14}$$

heißen *Diskrete Fouriertransformierte* (DFT) des Signals $x(t)$. Die Diskrete Rücktransformation ist gegeben durch

$$x_m = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot e^{j2\pi \frac{nm}{N}} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.15)$$

Klirrfaktor: Steuert man ein lineares System mit einer harmonischen Eingangsspannung $U_e = |U_e| \cdot \cos(\omega_e t + \varphi_e)$ an, so ist die Ausgangsspannung $U_a = |U_a| \cdot \cos(\omega_a t + \varphi_a)$ wiederum harmonisch, mit derselben Frequenz ($\omega_a = \omega_e$). Allein die Amplituden ($|U_e|$ und $|U_a|$) und die Phasen (φ_e und φ_a) können sich unterscheiden. Besteht das Netzwerk beispielsweise nur aus ohmschen Widerständen, dann sind auch die Phasen gleich.

Lineare Systeme sind jedoch nur Idealisierungen realer Übertragungsnetzwerke. Praktisch treten immer auch Signalverzerrungen auf, so dass die Ausgangssignale auch bei ideal harmonischen Eingangsspannungen nicht streng harmonisch sind. Dies ist zuweilen unerwünscht. Als Maß für die Nichtlinearität des Systems, also für die Signalverzerrungen, dient der *Klirrfaktor*. Dazu geht man davon aus, dass bei periodischer (harmonischer) Eingangsspannung die Ausgangsspannung U_a wiederum periodisch ist, mit der gleichen Periode $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Folglich kann U_a nach Gl. (5.10) in eine Fourierreihe entwickelt werden, mit den Entwicklungskoeffizienten $X(jn\omega_0)$. Der Klirrfaktor ist dann wie folgt definiert,

$$K \equiv \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} |X(jn\omega_0)|^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |X(jn\omega_0)|^2}} \quad (5.16)$$

Der Klirrfaktor gibt die Energie der Oberwellen bezüglich der Gesamtenergie des Signals an. Es gilt immer $0 \leq K \leq 1$. Für rein harmonische Signale verschwindet der Klirrfaktor, $K = 0$. Im Fall $K = 1$ verschwindet die Grundwelle. Bei schwach verzerrten Signalen gilt $K \ll 1$, man kann dann auch wie folgt approximieren,

$$K \approx \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} |X(jn\omega_0)|^2}}{|X(j\omega_0)|} \quad .$$

Klirrfaktoren werden auch häufig in Prozent angegeben, $K \rightarrow K \cdot 100\%$. Sie werden zum Beispiel auch bei der Bewertung von HiFi-Audio-Verstärkern oder Funktionsgeneratoren genutzt. Werte unter 0,01 % sind durchaus üblich.

5.2.2 Kommutatives Diagramm

Ein lineares System mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ werde mit einem periodischen Eingangssignal $x(t)$ angesteuert. Die Fourierkoeffizienten $X(jn\omega_0)$ des Signals seien bekannt. Dann erhält man das Ausgangssignal $y(t)$ aus

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jn\omega_0) \cdot X(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad . \quad (5.17)$$

Hieraus können sofort die Fourierkomponenten $Y(jn\omega_0)$ des Ausgangssignals abgelesen werden,

$$Y(jn\omega_0) = H(jn\omega_0) \cdot X(jn\omega_0) \quad . \quad (5.18)$$

Die durch (5.10) definierte Abbildung

$$\mathcal{F} : x(t) \rightarrow X(jn\omega_0)$$

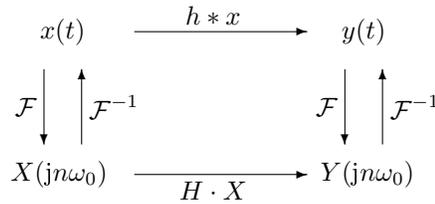


Abb. 5.1: Kommutatives Diagramm für ein lineares System: Im Zeitbereich liefert die Faltung $h * x$ von Eingangssignal x und Systemfunktion h das Ausgangssignal y . Im Frequenzbereich liefert die Multiplikation $H \cdot X$ der Fouriertransformierten vom Eingangssignal und von der Systemfunktion, X bzw. H die Fouriertransformierte Y des Ausgangssignals

heißt *Fourier-Transformation* und die Menge aller Fourier-Komponenten $X(jn\omega_0)$ *Fourier-Transformierte* oder kurz *Spektrum* des Signals $x(t)$. Die *inverse Fourier-Transformation*

$$\mathcal{F}^{-1} : X(jn\omega_0) \rightarrow x(t)$$

ist durch (5.9) definiert.

Bei Signalen wie sie in der Praxis üblicherweise vorkommen, sind $x(t)$ und $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[x(t)]$ für alle Zeitpunkte t identisch.¹⁾ Folglich ist das Diagramm in Abb. 5.1 kommutativ. Hiernach kann das Ausgangssignal y des durch die Übertragungsfunktion H beschriebenen linearen Systems erhalten werden, indem H mit der Fourier-Transformierten des Eingangssignals x multipliziert und das Produkt dann rücktransformiert wird:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[H \cdot \mathcal{F}[x(t)] \right] . \tag{5.19}$$

5.2.3 Spektraldichte

Definition: Nichtperiodische Signale $x(t)$ können nicht durch eine unendliche Summe (5.9) dargestellt werden. An die Stelle des Spektrums $X(jn\omega_0)$ tritt hier die *Spektraldichte*

$$\mathcal{F}[x(t)](\omega) \equiv X(j \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \omega t} dt \tag{5.20}$$

Man erhält sie aus dem Grenzübergang

$$X(j \omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 \cdot X(jn2\pi/T_0) . \tag{5.21}$$

Nichtperiodische Signale werden also als periodische Signale mit unendlich großer Periode T_0 aufgefasst. Gleichung (5.20) definiert die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : x(t) \rightarrow X(j \omega)$ für nichtperiodische Signale. Die zugehörige inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1} : X(j \omega) \rightarrow x(t)$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}^{-1}[X(j \omega)](t) \equiv x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \omega) \cdot e^{j \omega t} d\omega \tag{5.22}$$

¹⁾Aus mathematischer Sicht kann jedoch für einige Zeitpunkte das originale Signal vom hin- und rücktransformierten abweichen. Allerdings stimmen beide zumindest fast überall bez. des Lebesgue-Maßes auf der Zeitachse überein. Das heißt, die Menge der Zeitpunkte, zu denen keine Übereinstimmung auftritt, hat auf der Zeitachse die Länge Null.

Sie tritt an die Stelle der Reihendarstellung (5.9) periodischer Signale.

Existenz: Für die Existenz der Spektraldichte (5.21) eines Signals $x(t)$ sind die folgenden Bedingungen hinreichend:

1. Der Definitionsbereich von x kann in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, in denen $x(t)$ stetig und monoton ist
2. An jeder Unstetigkeitsstelle sind die Grenzwerte $x(t-0)$ und $x(t+0)$ definiert.
3. $x(t)$ ist absolut integrierbar, d.h., $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$ existiert (und ist endlich).

Die ersten beiden Bedingungen sind nach DIRICHLET benannt. Die dritte Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass x quadrat-integrierbar ist, dass also $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$ existiert. An den Unstetigkeitsstellen t liefert die Rücktransformierte $\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)](t) = [x(t-0) + x(t+0)]/2$.

Delta-Distribution: In der Praxis wird die Existenz der Fourier-Transformierten in der Regel nicht in Frage gestellt, weil hier Signale sowohl zeitlich wie auch in der Amplitude als begrenzt anzusehen sind. Aber schon eine Cosinusfunktion $x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$, mit $A, \omega \neq 0$, erfüllt nicht die Bedingung nach absoluter Integrierbarkeit. Wird die Transformation jedoch im Raum verallgemeinerter Funktionen (Distributionen²⁾) betrachtet, dann gilt $X(j\omega) = A\pi \cdot \delta(|\omega| - \omega_0)$, denn

$$\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A\pi \cdot \delta(|\omega| - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = A \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = A \cdot \cos \omega_0 t = x(t) .$$

Maßeinheit: Die Spektraldichte (5.20) wird ebenso wie die Fourier-Komponenten (5.10) mit „ X “ bezeichnet. Tatsächlich handelt es sich hierbei jedoch um unterschiedliche Größen. Wird z.B. $x(t)$ in „Volt“ gemessen, so haben die Fourier-Komponenten dieselbe Einheit, wohingegen die Spektraldichte in „Volt/Hertz“ anzugeben ist. Zwischen beiden wird hier durch die Argumente „ $j\omega$ “ (periodischer Fall) und „ $j\omega$ “ (nichtperiodischer Fall) unterschieden, oder der Kontext macht die Unterscheidung möglich. Eine einzelne harmonische Komponente eines nichtperiodischen Signals mit der Kreisfrequenz ω hat also die Amplitude $(2\pi)^{-1}|X(j\omega)|d\omega = 0$, falls $|X(j\omega)| < \infty$.

Kommutatives Diagramm: Für die Untersuchung des Übertragungsverhaltens linearer Systeme spielt die Spektraldichte jedoch genau die gleiche Rolle wie das Spektrum. Insbesondere ist auch im nichtperiodischen Fall das Diagramm in der Abb. 5.1 kommutativ, wenn anstelle der Spektren $X(j\omega_0)$ und $Y(j\omega_0)$ die Spektraldichten $X(j\omega)$ und $Y(j\omega)$ treten.

²⁾Eine für uns wichtige Distribution ist die Deltadistribution δ . Sie hat die Eigenschaft $\int f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0)$.

Setzt man nun in (5.19) für $y(t)$ das Faltungsintegral aus Gl. (5.3) ein, so findet man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) * h(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega(t+\tau)} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \mathcal{F}[x(t)] \cdot \mathcal{F}[h(t)] .
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Damit haben wir eine wichtige Beziehung hergeleitet: Die Fourier-Transformierte $Y(j\omega)$ des Ausgangssignals $y(t)$ eines linearen Systems ist gleich dem Produkt der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ mit der Fourier-Transformierten $X(j\omega)$ des Eingangssignals $x(t)$, $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$. Dabei ist die Übertragungsfunktion die Fourier-Transformierte der Gewichtsfunktion $h(t)$,

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] .$$

Einer Faltung im Zeitbereich entspricht also eine Multiplikation im Frequenzbereich mit anschließender Rücktransformation,

$$x(t) * h(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega) \cdot H(j\omega)] \tag{5.24}$$

Systemidentifikation: In der Praxis stellt sich häufig das Problem, ein unbekanntes System zu identifizieren, unter der Annahme, dass dieses System linear ist. Zur Identifikation muss dann die unbekannte Übertragungsfunktion bestimmt werden. Nach (5.24) kann man ein bekanntes Testsignal $x(t)$ auf das System geben und am Ausgang $y(t)$ messen. Damit sind dann auch die Transformaten $Y(j\omega)$ und $X(j\omega)$ bestimmbar und die Übertragungsfunktion erhält man aus

$$H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) \quad \text{für alle } \omega \text{ mit } X(j\omega) \neq 0 .$$

Dies nennt man *Entfaltung*.

Im Kapitel 4 wurde das Übertragungsverhalten von linearen Netzwerken mit passiven elektronischen Bauelementen für harmonische Eingangsspannungen $U_e = \hat{U}_e \cos \omega t$ untersucht. Die Ausgangsspannung ergibt sich dort aus $U_a = H(j\omega) \cdot U_e$, wobei die Übertragungsfunktion $H(j\omega) = U_a/U_e$ aus den Kirchhoffschen Regeln unter Verwendung der komplexen Widerstände $(j\omega C)^{-1}$ für Kapazitäten C und $j\omega L$ für Induktivitäten L berechnet werden kann. Experimentell könnte man die Kreisfrequenz der Eingangsspannung $U_e(\omega)$ variieren, die zugehörige Ausgangsspannung $U_a(\omega)$ messen und somit $H(j\omega) = U_a(\omega)/U_e(\omega)$ ermitteln.

Alternativ könnte man ein Testsignal verwenden, das ein kontinuierliches Spektrum $\mathcal{F}[U_e(t)](\omega) > 0$ für jedes ω besitzt. Dann würde man die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ erhalten, indem man das Ausgangssi-

gnal $U_a(t)$ fouriertransformiert und den Quotienten mit $\mathcal{F}[U_e(t)](\omega)$ bildet,

$$H(j\omega) = \frac{\mathcal{F}[U_a(t)](\omega)}{\mathcal{F}[U_e(t)](\omega)} .$$

Als Eingangssignal könnte z. B. ein Signal mit der Spektraldichte $\mathcal{F}[U_e(t)](\omega) = \text{const.} = c^{-1} \neq 0$ für alle Frequenzen ω dienen. Dies ist ein Rauschsignal wie z. B. das Widerstandsrauschen.³⁾ Dann erhält man,

$$H(j\omega) = c \cdot \mathcal{F}[U_a(t)](\omega) .$$

Multiplikation im Zeitbereich: Man findet auch, dass einer Multiplikation im Zeitbereich eine Faltung im Frequenzbereich entspricht. Denn analog zu (5.23) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega) * H(j\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) \cdot H(j(\omega - \Omega)) d\Omega \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} H(j(\omega - \Omega)) e^{j\omega t} d\omega d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{j(\omega + \Omega)t} d\omega d\Omega \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= 2\pi \cdot x(t) \cdot h(t) . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Folglich gilt

$$x(t) \cdot h(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega) * H(j\omega)] \tag{5.26}$$

5.3 Laplace-Transformation

In der Praxis interessiert man sich für die Antwort (Ausgangsspannung) eines linearen Systems bei Ansteuerung (Eingangsspannung) mit bestimmten Signalen, für welche die Fouriertransformation nicht existiert. Dies betrifft beispielsweise den Spannungssprung (etwa als Ein- oder Ausschaltsignal),

$$U_e(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 , \quad U_e(t) = A = \text{const.} > 0 \quad \text{für } t \geq 0 .$$

Der Spannungssprung ist nicht absolut integrierbar ($\int_{-\infty}^{+\infty} U_e(t) dt$ existiert nicht) und die Spektraldichte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_e(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt$$

³⁾Tatsächlich kann hier ein beliebiges Signal genommen werden, welches keine linearen statistischen Abhängigkeiten hat. Später werden wir solche Signale unkorreliert nennen.

existiert ebenfalls nicht.⁴⁾

Um solche Fälle dennoch im *Frequenzraum* analysieren zu können, führt man einen Konvergenzfaktor $e^{-\sigma t}$ ein. Darin ist der rein reelle Parameter $\sigma > 0$ geeignet gewählt, so dass die Spektraldichte von

$$U_e^*(t) \equiv U_e(t) \cdot e^{-\sigma t}$$

existiert.

Generell werden nun nur solche Signale $x(t)$ betrachtet, die bis zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ verschwinden, $x(t) = 0$ für $t < 0$. Die Spektraldichte (Fouriertransformierte) von $x^*(t) \equiv x(t) \cdot e^{-\sigma t}$ lautet dann

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot e^{-j \omega t} dt = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma+j \omega)t} dt$$

Mit der Abkürzung $p \equiv \sigma + j \omega$ schreibt man hierfür auch

$$X(p) \equiv \mathcal{L}[x(t)](p) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt$$

(5.27)

Dies ist die sogenannte *Laplace-Transformation* \mathcal{L} des Signals x .⁵⁾ Es gilt demzufolge

$$\mathcal{F}[x(t) \cdot e^{-\sigma t}] = \mathcal{L}[x(t)](p)$$

für Signale $x(t < 0) = 0$. Die Funktion $\mathcal{L}[x(t)](p)$ wird auch *verallgemeinerte Spektraldichte* genannt. Sie stellt eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation dar, die Frequenzen p sind hier komplexwertig. Anschaulich bedeutet diese Vorgehensweise, dass man den Parameter $\sigma > 0$ beliebig klein wählen kann, so dass in endlichen Zeiten der Einfluss des Konvergenzterms $e^{-\sigma t}$ keine praktische Bedeutung hat und man dennoch die Divergenzprobleme bei der Integration beseitigt hat.

Hier werden einige wesentliche Züge des Verfahrens dargestellt. Weiterreichende Betrachtungen zur Laplace-Transform im Kontext der Elektrotechnik finden sich z. B. in [10], Bd. 1, S. 398 ff.

5.3.1 Laplace-Transformierte und Kommutatives Diagramm

Für lineare Systeme gilt wiederum ein kommutatives Diagramm wie in Abb.5.1 (S. 78). Kennt man also die Laplacetransformierten $X(p) = \mathcal{L}[x(t)](p)$ und $H(p) = \mathcal{L}[h(t)](p)$ für das Eingangssignal $x(t)$ bzw. die Systemfunktion $h(t)$, dann erhält man die Laplacetransformierte des Ausgangssignals durch Multiplikation, $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)](p) = H(p) \cdot X(p)$, und schließlich das Ausgangssignal im Zeitbereich durch Laplace-Rücktransformation von $H(p) \cdot X(p)$,⁶⁾

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p) \cdot X(p)] .$$

⁴⁾Die Beschreibung der Übertragung durch nichtlineare Systeme ist auch mit der Methode der Laplace-Transformation nicht möglich. Hier gibt es keine geschlossene Lösungstheorie. Nichtlineare Systeme können auch bei Ansteuerung mit periodischen oder gar harmonischen Signalen sehr kompliziert nicht-periodisch antworten. Dies wird im Rahmen der nicht-linearen Dynamik behandelt (Bifurkations- und Ergodentheorie — „Chaostheorie“).

⁵⁾Derartige Integrale mit komplexwertiger Integrationsvariable werden im Rahmen der Funktionentheorie behandelt.

⁶⁾Die Fourier- und die Laplacetransformation sind spezielle *Integraltransformationen* $x(t) \rightarrow X(p) = \int x(t) \cdot K(p, t) dt$, die mittels der speziellen Kernfunktionen $K(\omega, t) = e^{-j \omega t}$ für alle t bzw. $K(p, t < 0) = 0$, $K(p, t \geq 0) = e^{-pt}$ definiert sind. Derartige Transformationen überführen eine Funktion in der reellen Veränderlichen t in den Bildbereich, auch *Frequenzbereich* oder *Frequenzraum* genannt, mit der unabhängigen Variablen (Frequenz) ω bzw. dem komplexwertigen p .

Die Anfangsbedingung $y(t=0)$ muss hierbei null sein. Für die hier verfolgten Anwendungen auf elektrische Netzwerke bedeutet dies, dass für $t < 0$ alle Spannungen und Ströme Null sind. Im Falle $y(t=0) \neq 0$ muss die Differentialgleichung des Netzwerke aufgestellt werden, was weiter unten an Beispielen erläutert wird (S. 87).

5.3.2 Laplace-Transformierte von Übertragungsfunktionen

Die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ eines RCL-Netzwerkes (Kap. 4) ist die Fouriertransformierte der entsprechenden Systemfunktion $h(t)$ (Abschn. 5.1). Die Laplacetransformierte von h erhält man, indem in der Übertragungsfunktion die Terme $j\omega$ durch $p = \sigma + j\omega$ ersetzt werden. Für den RC-Tiefpass (Abb.4.1) erhält man also,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h_{\text{RC-TP}}(t)](j\omega) \equiv H_{\text{RC-TP}}(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC} \\ &\downarrow \\ \mathcal{L}[h_{\text{RC-TP}}(t)](p) \equiv H_{\text{RC-TP}}(p) &= \frac{1}{1 + p \cdot RC} \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.3.3 Laplace-Transformierte von speziellen Signalen

Sprung zur Zeit $t = 0$: Die Sprungfunktion ist definiert durch

$$x_{\text{Sprung}}(t) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } x(t) = A_0 \text{ für } t \geq 0 \quad (5.29)$$

Die zugehörige Laplacetransformierte ist

$$\mathcal{L}[x_{\text{Sprung}}(t)](p) = \int_0^{+\infty} A_0 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{A_0}{p} \cdot [e^{-pt}]_{t=0}^{+\infty} = A_0 \cdot \frac{1}{p} \quad (5.30)$$

Sprung zur Zeit $T \geq 0$: Diese um T nach rechts verschobene Sprungfunktion ist definiert durch

$$x_{\text{Sprung},T}(t) = 0 \text{ für } t < T \text{ und } x(t) = A_0 \text{ für } t \geq T > 0. \quad (5.31)$$

Die zugehörige Laplacetransformierte ist

$$\mathcal{L}[x_{\text{Sprung},T}(t)](p) = \int_T^{+\infty} A_0 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{A_0}{p} \cdot [e^{-pt}]_{t=T}^{+\infty} = A_0 \cdot \frac{e^{-pT}}{p} \quad (5.32)$$

Rampe: Die Rampenfunktion ist definiert durch

$$x(t) = A_1 \cdot t \text{ für } t \geq 0.$$

Sie hat die Laplacetransformierte

$$\mathcal{L}[x_{\text{Rampe}}(t)](p) = \int_0^{+\infty} A_1 \cdot t \cdot e^{-pt} dt = -\frac{A_1}{p^2} \cdot [e^{-pt} \cdot (pt + 1)]_{t=0}^{+\infty} = \frac{A_1}{p^2}$$

Bei der Laplacetransformation wird vorausgesetzt, dass die Originalfunktion $x(t)$ im Definitionsbereich $t \geq 0$ für $t \rightarrow \infty$ nicht stärker als $e^{\alpha t}$ mit einem reelwertigen $\alpha > 0$ gegen unendlich strebt.

Mittels der inversen Integraltransformation wird in den Originalbereich (hier auch *Zeitbereich* genannt) zurücktransformiert. Bei diesem Vorgehen wird zum Beispiel die Lösung einer Differentialgleichung im Zeitbereich durch algebraische Operationen im Bildbereich möglich. Die Schwierigkeit besteht bei dieser Methodik jedoch oftmals in der expliziten Ausführung der Hin- bzw. Rücktransformation.

Potenz: Die Potenzfunktion ist definiert durch

$$x_n(t) = A_n \cdot t^n \text{ für } t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Sie hat die Laplacetransformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_n(t)](p)/A_n &= \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-pt} dt \\ &= -\frac{1}{p} \cdot [t^n \cdot e^{-pt}]_{t=0}^{+\infty} + \frac{n}{p} \cdot \int_0^{+\infty} t^{n-1} \cdot e^{-pt} dt \\ &= \frac{n}{p} \cdot \mathcal{L}[x_{n-1}(t)](p) \\ &= \frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p} \cdot \mathcal{L}[x_{n-2}(t)](p) \\ &= \frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}[x_0(t)](p) \\ &= \frac{n!}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\mathcal{L}[x_n(t)](p) = A_n \cdot \frac{n!}{p^{n+1}} .$$

Die Sprungfunktion $x_{\text{Sprung}} = A_0 \cdot t^0 = A_0$ und die Rampenfunktion durch $x_{\text{Rampe}} = A_1 \cdot t^1$ ergeben sich als Spezialfälle der Potenzfunktion.

Rationale Funktion: Die rationale Funktion

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \cdot t^n \text{ für } t > 0, N = 0, 1, 2, \dots$$

hat die Laplacetransformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t)](p) &= \sum_{n=0}^N A_n \cdot \mathcal{L}[x_n(t)](p) \\ &= \sum_{n=0}^N A_n \cdot \frac{n!}{p^{n+1}} . \end{aligned}$$

Rechteckpuls: Ein Puls der Dauer T und Höhe A/T ist definiert durch

$$x_{\text{Puls},T}(t) = A/T \text{ für } 0 < t < T \text{ und } x_{\text{Puls}}(t) = 0 \text{ sonst.} \quad (5.33)$$

Die Laplacetransformierte ist,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[x_{\text{Puls},T}(t)](p) &= \int_0^{+\infty} x_{\text{Puls}}(t) \cdot e^{-pt} dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^T e^{-pt} dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_{t=0}^{t=T} \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{p} .
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Delta-Puls: Die Fläche unter dem Rechteckpuls (5.33) ist für beliebige Pulsdauern T konstant, gleich A . Für $T \rightarrow 0$ wird der Puls also immer größer und man erhält schließlich im Grenzfall den sog. *Delta-Puls*,

$$\delta(t) \equiv \lim_{T \rightarrow 0} x_{\text{Puls},T}(t)/A .$$

Die entsprechende Laplacetransformierte erhält man bei Anwendung der Grenzwertregel von l'Hospital,

$$\mathcal{L}[\delta(t)](p) = \frac{1}{p} \cdot \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-pT}}{T} = \frac{1}{p} \cdot \lim_{T \rightarrow 0} p \cdot e^{-pT} = 1 .$$

5.3.4 Rechenregeln zur Laplacetransformation

Additions- oder Linearitätssatz:

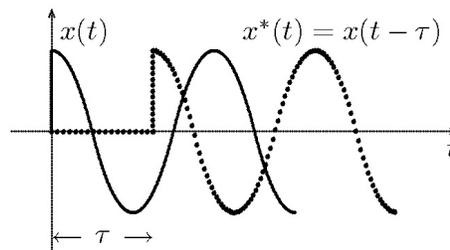
$$\mathcal{L}[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] = a_1 \cdot \mathcal{L}[x_1(t)] + a_2 \cdot \mathcal{L}[x_2(t)] , \quad \text{für alle } a_1, a_2 \in \mathbb{C} . \tag{5.35}$$

Ähnlichkeitssatz:

$$\mathcal{L}[x(a \cdot t)](p) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}[x(t)] \left(\frac{p}{a} \right) , \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}, a > 0 . \tag{5.36}$$

Rechts-Verschiebungssatz:

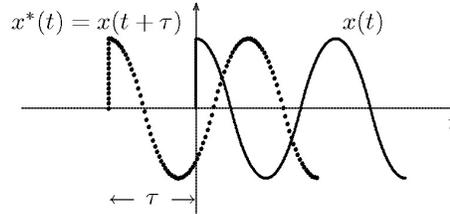
$$\mathcal{L}[x(t - \tau)](p) = e^{-p\tau} \cdot \mathcal{L}[x(t)](p) , \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}, \tau \geq 0 . \tag{5.37}$$



Die Laplacetransformierte einer Funktion $x^*(t) = x(t - \tau)$, d.h. einer um $\tau > 0$ nach rechts verschobenen Funktion $x(t)$, ist gleich der Laplacetransformierten der Funktion $x(t)$, multipliziert mit dem Faktor $e^{-\tau p}$. Hierbei ist $x^*(t) = 0$ für $t < \tau$ zu setzen.

Links-Verschiebungssatz:

$$\mathcal{L}[x(t + \tau)](p) = e^{p\tau} \cdot \left[\mathcal{L}[x(t)](p) - \int_0^\tau x(t)e^{-pt} dt \right], \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}, \tau \geq 0. \quad (5.38)$$



Die Laplacetransformierte einer Funktion $x^*(t) = x(t + \tau)$, d.h. einer um $\tau > 0$ nach links verschobenen Funktion $x(t)$, ist gleich der Laplacetransformierten der Funktion $x(t)$, vermindert um das Integral $\int_0^\tau x(t)e^{-pt} dt$ und multipliziert mit dem Faktor $e^{+p\tau}$. Hierbei kann das Integral als Laplacetransformierte der Funktion $x^{**}(t) = x(t)$ für $0 < t < \tau$ und $x^{**}(t) = 0$ für $t > \tau$ aufgefasst werden,

$$\int_0^\tau x(t)e^{-pt} dt = \mathcal{L}[x^{**}(t)](p) .$$

Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}[e^{-bt} \cdot x(t)](p) = \mathcal{L}[x(t)](p + b) , \quad \text{für alle } b \in \mathbb{C}. \quad (5.39)$$

Differentiation im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] (p) &= \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-pt} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} x(t) \cdot \frac{de^{-pt}}{dt} dt + [x(t) \cdot e^{-pt}]_0^{+\infty} \\ &= p \cdot \mathcal{L}[x(t)](p) - x(t \downarrow 0) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Darin ist $x(t \downarrow 0)$ der rechtsseitige Grenzwert von $x(t)$ für $t \rightarrow 0$.

Für die Laplace-Transformierte bei n -facher Differentiation von x erhält man analog,

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] (p) = p^n \cdot \mathcal{L}[x(t)](p) - \sum_{m=1}^n p^{n-m} \cdot \left. \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} \right|_{t \downarrow 0} \quad (5.41)$$

Differentiation im Bildbereich:

$$\mathcal{L} [-t \cdot x(t)] (p) = \frac{d\mathcal{L}[x(t)](p)}{dp} \quad (5.42)$$

$$\mathcal{L} [(-1)^n \cdot t^n \cdot x(t)] (p) = \frac{d^n \mathcal{L}[x(t)](p)}{dp^n} \quad (5.43)$$

5.3.5 Laplace-Rücktransformation mit Residuensatz

Die Laplace-Rücktransformation lautet allgemein,

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(p)](t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(p) \cdot e^{pt} dp = \begin{cases} y(t) & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

Für die Laplacetransformierte einfacher Zeitfunktionen gibt es umfangreiche Tabellenwerke (z. B. [2]). Auf diese führt man in der Praxis die gesuchten Laplace-Rücktransformationen zurück. Findet sich die gesuchte Rücktransformation nicht in den Tabellen, so versucht man unter Verwendung der Rechenregeln das konkrete Problem auf jene Fälle zurückzuführen, die sich in den Tabellen finden. In der Elektrotechnik interessiert jedoch in der Regel der Spezialfall, dass $Y(p)$ eine gebrochenrationale Funktion ist. Hier kann eine allgemeine Formel für die Rücktransformation angegeben werden, was im Folgenden ausgeführt wird.

Die gebrochenrationale Funktion in p sei

$$Y(p) = \frac{Z(p)}{\prod_{k=1}^K (p - p_k)^{n_k}} \quad (5.45)$$

Darin bezeichnet n_k die Vielfachheit der Nullstelle p_k des Nennerpolynoms, und K ist die Anzahl der verschiedenen Nullstellen des Nennerpolynoms. Die Zählerfunktion $Z(p)$ habe an keiner der Nullstellen p_k des Nennerpolynoms eine Nullstelle, also $Z(p_k) \neq 0$ für alle $k = 1, \dots, K$. Die Laplace-Rücktransformierte ist

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{Z(p)}{\prod_{k=1}^K (p - p_k)^{n_k}} \cdot e^{pt} dp .$$

Die Integration erfolgt nach dem *Residuensatz* der Funktionentheorie,⁷⁾

$$y(t) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{(n_k - 1)!} \cdot \left[\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \frac{Z(p) \cdot e^{pt}}{\prod_{l=1, \dots, K, k \neq l} (p - p_l)^{n_l}} \right]_{p=p_k} \quad (5.46)$$

5.3.6 Beispiel: Spungantwort eines Tiefpass 1. Ordnung

1. Rechenweg (Anfangsbedingung $U_a(t \downarrow 0) = 0$): Ein RC-Tiefpass 1. Ordnung (5.28) werde mit dem Spannungssprung (5.30) angesteuert. Die Laplacetransformierte der Ausgangsspannung lautet (hier

⁷⁾ Grundlage hierfür ist der *Integralsatz von Cauchy*, auch *Hauptsatz der Funktionentheorie* genannt. Die Funktionen (5.45) sind im Sinne der Funktionentheorie *meromorph*, das sind *holomorphe* Funktionen mit endlich vielen Polen als singuläre Stellen. Der Residuensatz basiert auf den Cauchyschen Integralformeln.

wird $A_0 = A$ gesetzt),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[U_a(t)](p) &= H_{RC-TP}(p) \cdot \mathcal{L}[x_{\text{Sprung}}(t)](p) \\
 &= \frac{1}{1 + p \cdot RC} \cdot \frac{A}{p} \\
 &= \frac{-p_2}{p - p_2} \cdot \frac{A}{p - p_1} \\
 &= \frac{A}{RC} \cdot \frac{1}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $p_1 = 0$ und $p_2 = -(RC)^{-1}$, $n_1 = n_2 = 1$. Nach dem Residuensatz (5.46) erhält man

$$\frac{RC}{A} \cdot U_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{[p - p_1] \cdot [p - p_2]} \right] \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} + \frac{e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} \right) \\
 &= RC \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) .
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Somit folgt schließlich die Ausgangsspannung

$$U_a(t) = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) . \tag{5.50}$$

Diese Lösung gilt, wenn die Anfangsspannung Null ist, $U_a(t \downarrow 0) = 0$. Ist der Kondensator zur Anfangszeit $t = 0$ bereits vorgeladen, so werden die Verhältnisse durch den folgenden Rechenweg verdeutlicht.

2. Rechenweg (beliebige Anfangsbedingung $U_a(t \downarrow 0)$): Das obige Ergebnis wurde bereits im Abschnitt 2.31 (S. 33 ff.) auf anderem Wege gefunden. Dort wurde die folgende Differentialgleichung (DGL) aufgestellt (s. Gl. (2.38), hier werden $U_0 = A$ und $U = U_a$ gesetzt),

$$RC \cdot \frac{dU_a(t)}{dt} + U_a = A .$$

Nach der hier verfolgten Lösungsstrategie werden beide Seiten der DGL laplace-transformiert. Unter Beachtung der Linearität (5.35) von \mathcal{L} erhält man

$$RC \cdot \mathcal{L} \left[\frac{dU_a(t)}{dt} \right] + \mathcal{L}[U_a] = \mathcal{L}[A] . \tag{5.51}$$

Die Regel zur Differentiation im Zeitbereich Gl. (5.40) liefert

$$\mathcal{L} \left[\frac{dU_a(t)}{dt} \right] = p \cdot \mathcal{L}[U_a(t)](p) - U_a(t \downarrow 0) .$$

Darin ist $U_a(t \downarrow 0) \equiv \lim_{t \downarrow 0} U_a(t)$ die Anfangs-Ausgangsspannung. Die Laplacetransformierte des Spannungssprungs $0 \rightarrow A$ zur Zeit $t = 0$ (rechte Seite der DGL) ist nach (5.30) gegeben durch $\mathcal{L}[A] = A/p$.

Somit lässt sich die DGL (5.51) wie folgt umschreiben,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[U_a(t)] \cdot (RC \cdot p + 1) &= RC \cdot U_a(t \downarrow 0) + A/p \\ \mathcal{L}[U_a(t)](p) &= \frac{RC \cdot U_a(t \downarrow 0) + A/p}{RC \cdot p + 1} \\ &= \frac{U_a(t \downarrow 0)}{p - p_2} + \frac{A}{RC} \cdot \frac{1}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)}.\end{aligned}$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $p_1 = 0$ und $p_2 = -(RC)^{-1}$. Für den Anfangswert $U_a(t \downarrow 0) = 0$ geht dies in Gl. 5.47 über. Für beliebige Anfangsspannungen erhält man,

$$\begin{aligned}U_a(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{U_a(t \downarrow 0)}{p - p_2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{RC} \cdot \frac{1}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)} \right] \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{U_a(t \downarrow 0)}{p - p_2} \right] &= U_a(t \downarrow 0) \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p - p_2} \right] = U_a(t \downarrow 0) \cdot e^{p_2 t} = U_a(t \downarrow 0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\ U_a(t) &= U_a(t \downarrow 0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \\ &= A \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{U_a(t \downarrow 0)}{A} \right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right].\end{aligned}\tag{5.52}$$

Für $U_a(t \downarrow 0) = 0$ geht dies über in (5.50). Das Rechnen zeigt, dass die Anfangsbedingungen durch die Differentiationsregel berücksichtigt werden.

5.3.7 Beispiel: Pulsantwort eines Tiefpass 1. Ordnung

Der Kondensator sei zur Anfangszeit ungeladen, $U_a(t \downarrow 0) = 0$. Der RC-Tiefpass werde mit einem Rechteckpuls U_e der Dauer T und Höhe A angesteuert. Diesen Puls kann man als Überlagerung zweier Sprungfunktionen darstellen,

$$U_e = A \cdot s(t - 0) - A \cdot s(t - T),\tag{5.53}$$

mit dem Einheitssprung

$$s(t - T) = \begin{cases} 0 & : t - T < 0 \\ 1 & : t - T \geq 0. \end{cases}\tag{5.54}$$

Für $t < T$ hat nur die Vorderflanke $A \cdot s(t - 0)$ des Rechteckpulses Einfluss auf die Ausgangsspannung. Der entsprechende Zeitverlauf ist durch (5.50) gegeben.

Für $t > T$ entspricht der Zeitverlauf dem von Gl. (5.52). Allerdings ist der dortige Zeitnullpunkt hier auf T verschoben, und die dortige Eingangsspannung A hier auf Null zu setzen. Somit folgt für den Ausgangsspannungsverlauf am Kondensator bei Ansteuerung mit dem Rechteckpuls (5.53),

$$U_a(t) = \begin{cases} A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & : 0 \leq t < T \\ U_a(t \downarrow T) \cdot e^{-\frac{t-T}{RC}} = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{RC}} \right) \cdot e^{-\frac{t-T}{RC}} & : t \geq T. \end{cases}$$

Der zur Anfangszeitzeit $t = 0$ ungeladenen Kondensator lädt sich während der Pulsdauer T exponentiell mit der Zeitkonstante $\tau = RC$ auf den Spannungswert $U_a(T) = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)$ auf. Danach, also für $t \geq T$, entlädt sich der Kondensator exponentiell, beginnend bei $U_a(T)$, und erreicht asymptotisch wieder den Wert $U_a(+\infty) = 0 = U_a(0)$. Die Ausgangsspannung ändert sich stetig, weshalb $U_a(t \downarrow T) = U_a(T)$ gilt.

Kapitel 6

Halbleiter–Bauelemente

6.1 Diode

Eine Diode ist, vereinfacht ausgedrückt, ein elektrisches Bauelement mit zwei Polen, durch welches in Abhängigkeit von der Polarität einer angelegten elektrischen Spannung ein elektrischer Strom fließt oder nicht fließt — Polung in *Durchlassrichtung* bzw. *Sperrichtung*. Dioden haben vielfältige Anwendungsbereiche, etwa zur Gleichrichtung in Stromversorgungsschaltungen oder als Kleinsignaldioden.

In der Praxis versteht man unter einer Diode (ohne Zusatz) in der Regel eine Diode auf Basis eines pn–Übergangs auf der Basis von Silizium. Das Schaltsymbol einer idealen Diode zeigt Abb. 6.1. Die beiden Pole werden *Anode* und *Kathode* genannt und durch ein Dreieck bzw. Strich symbolisiert. In Durchlassrichtung ist die Spannung an der Anode positiv gegenüber der Kathode (n-dotierte Schicht).

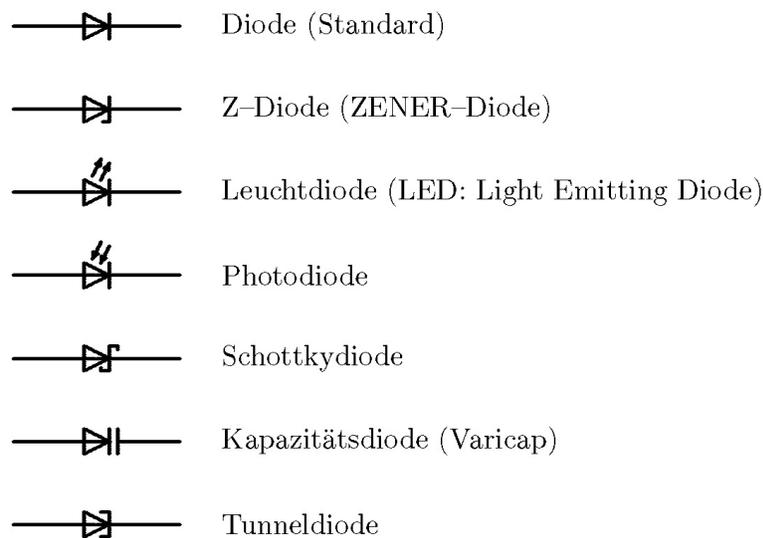


Abb. 6.1: Schaltsymbol von verschiedenen Dioden

6.1.1 pn-Übergang

Bei der Anode handelt es sich um eine sogenannte *p-dotierte Schicht*, die bei Standarddioden aus einem Siliziumkristall besteht, der mit einem III-wertigen Stoff wie zum Beispiel Bor (oder auch Indium, Aluminium) dotiert ist. Boratome haben nur 3 Valenzelektronen, Silizium jedoch 4. Somit hat bor-dotiertes Silizium eine gewisse Affinität, Elektronen aufzunehmen, was dem Kristallverband eine höhere Stabilität verleiht. Die Plätze, welche Elektronen besetzen, werden auch *Löcher genannt*. Bewegt sich eine Elektron von Loch zu Loch, so kann dies auch als Bewegung eines Loches in entgegengesetzte Richtung aufgefasst werden.

Die Kathode bildet eine sogenannte *n-dotierte Schicht*, bei welcher der Siliziumkristall mit einem V-wertigen Stoff wie zum Beispiel Phosphor (oder auch Arsen, Antimon) dotiert ist. Phosphoratome haben 5 Valenzelektronen, von denen aber nur 4 zum Einbau im Siliziumkristall benötigt werden. Das fünfte Valenzelektron ist nicht gebunden und steht als frei beweglicher Ladungsträger zur Verfügung.

Bei der Diode sind eine n- und eine p-dotierte Schicht in Kontakt. In der Kontaktzone diffundieren freie Elektronen aus der n- in die Löcher der p-Schicht, wodurch sich lokal ein elektrisches Feld aufbaut, was der Elektronendiffusion entgegenwirkt. Die n-Schicht der Kontaktzone hat demzufolge eine positive Raumladung (hier fehlen Elektronen), und in p-Schicht der Kontaktzone baut sich eine negative Raumladung auf (Elektronenüberschuss). Man nennt diese Kontaktzone deshalb *Raumladungszone*.

Wird nun eine hinreichend große äußere Spannung angelegt, so dass die Anode positiv gegenüber der Kathode ist, so wird das beschriebene Gleichgewicht gestört. Nun können Elektronen die p-Schicht vollständig durchdringen. Die Spannungsquelle liefert neue Elektronen über die Kathode nach. Die Ausdehnung der Raumladungszone senkrecht zur Grenzfläche der n- bzw. p-Schicht wird gegenüber dem Grundzustand (äußere Spannung Null) kleiner.

Bei umgekehrter Polarität verarmt die Raumladungszone an freien Ladungsträgern, die Raumladungszone wird breiter und die Diode leitet nun quasi keinen Strom (Sperrrichtung).¹⁾

Anstelle von Silizium findet auch Germanium Verwendung. Wird jedoch anstelle der p-dotierten Schicht ein Metall verwendet, spricht man von einer *Schottky-Diode*. Dieser *Halbleiter-Metall-Übergang* liefert Dioden, die besonders schnell zwischen „Sperrern“ und „Leiten“ umschalten können, weshalb sie vor allem in der Hochfrequenztechnik Anwendung finden, insbesondere in schnellen digitalen Baugruppen.

6.1.2 Reale Dioden

Schleusenspannung: Durch reale Dioden fließt in Durchlassrichtung erst dann ein größerer Strom, wenn eine gewisse Schwellspannung U_S überschritten wird. Diese Schwellspannung wird auch *Schleusenspannung* (engl.: threshold voltage) genannt. Sie wird definiert als die Spannung, bei welcher der Durchlassstrom I_D der Diode 10% des maximal zulässigen Dauergleichstroms beträgt. Für Siliziumdioden gilt $U_S \approx 0,7 \text{ V}$, für Germanium- und Schottky-Dioden $U_S \approx 0,3 \text{ V}$. Mit wachsender Temperatur sinkt die Schleusenspannung um ca. $-2,5 \text{ mV/K}$. Erwärmt sich beispielsweise eine Diode nach Einschalten des Gerätes von Zimmertemperatur $20 \text{ }^\circ\text{C}$ auf die Betriebstemperatur $60 \text{ }^\circ\text{C}$, so sinkt die Schleusenspannung um immerhin ca. -100 mV .

Sperrstrom und Durchbruch: Bei realen Dioden fließt auch in Sperrrichtung ein Strom, dieser ist aber im Vergleich zu den üblichen Durchlassstromstärken sehr klein ($\lesssim 0,5 \mu\text{A}$). Wird eine reale Diode

¹⁾Der pn-Übergang wird hier nicht weiter behandelt, dies ist Gegenstand der Festkörperelektronik.

jedoch bei sehr großen Sperrspannungen betrieben, kommt es zum *Durchbruch*, so dass nun auch in Sperrichtung größere Ströme fließen können.

Diodenkennlinie: Eine reale Diode wird im Durchlassbereich näherungsweise durch die folgende *Diodenkennlinie* beschrieben,

$$I_D(U_D) = I_S \cdot \left(e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}} - 1 \right) , \quad \text{für } U_D > 0 \quad (6.1)$$

Darin stehen $I_S = (10^{-12} \dots 10^{-6})$ A für den *Sättigungssperrstrom*, $n = 1 \dots 2$ für den *Emissionskoeffizient* und $U_T = k \cdot T / e$ für die *Temperaturspannung*, mit der Boltzmann-Konstante $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K und der Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As. Die Kennlinie ist in Abb. 6.2 Für verschiedene Parametersätze dargestellt.

Im Durchlassbereich gilt $U_D \gg n \cdot U_T = (60 \dots 120)$ mV, weshalb man hier auch mit der Diodenkennlinie

$$I_D(U_D) \approx I_S \cdot e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}}$$

rechnen kann.

Unterschreitet die Diodenspannung die (negative) *Durchbruchspannung* (engl.: *breakthrough voltage*), $U_D < -U_{BR}$, so setzt wiederum (ähnlich wie im Durchlassbereich) ein starker Stromfluss ein. Übliche Schwellwerte sind $U_{BR} = (50 \dots 1000)$ V. Bei sogenannten ZENER-Dioden werden auch deutlich kleinere Werte von etwa $U_{BR} = (3 \dots 300)$ V erreicht. Die Durchbruchkennlinie wird näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben,

$$I_{DBR}(U_D) = -I_{BR} \cdot e^{-\frac{U_D + U_{BR}}{n_{BR} \cdot U_T}} , \quad \text{für } U_D < 0 .$$

Darin sind $I_{BR} \approx 10^{-10}$ A der *Durchbruch-Kniestrom* und $n_{BR} \approx 1$ der *Durchbruch-Emissionskoeffizient*. Es gilt $I_{DBR}(U_D = -U_{BR}) = -I_{BR}$. Ein deutlicher Stromfluss setzt bei typischen Dioden für $U_D < -U_{BR} - 10 \cdot n_{BR} \cdot U_T \approx -U_{BR} - 0,25$ V ein.

Zwei typische Kennlinien von Dioden im gesamten Spannungsbereich (Durchbruch-, Sperr- und Durchlassbereich) ist in Abb. 6.4 dargestellt.

Differentieller Widerstand: Bei nichtlinearen U-I-Kennlinien führt man den differentiellen Widerstand ein,

$$r \equiv \frac{dU}{dI} .$$

Fließt durch die Diode in Durchlassrichtung ein Gleichstrom der Stärke I_D , so fällt über der Diode die folgende Spannung ab (Gl. (6.1) nach U_D aufgelöst),

$$U_D = n \cdot U_T \cdot \ln \left(1 + \frac{I_D}{I_S} \right) .$$

Der differentielle Widerstand der Diode ist dann,

$$r_D = \frac{dU_D}{dI_D} = \frac{n \cdot U_T}{I_S + I_D} , \quad r_D \approx \frac{n \cdot U_T}{I_D} \quad \text{für } I_S \ll I_D .$$

Für $n = 1,5$, $I_S = 10^{-9}$ A, $I_S \ll I_D$ und Zimmertemperatur erhält man

$$r_D(I_D) \approx \frac{35 \text{ mV}}{I_D} .$$

Somit gelten beispielsweise $r_D(I_D = 1 \text{ A}) \approx 35 \text{ m}\Omega$ und $r_D(I_D = 0,1 \text{ A}) \approx 350 \text{ m}\Omega$.

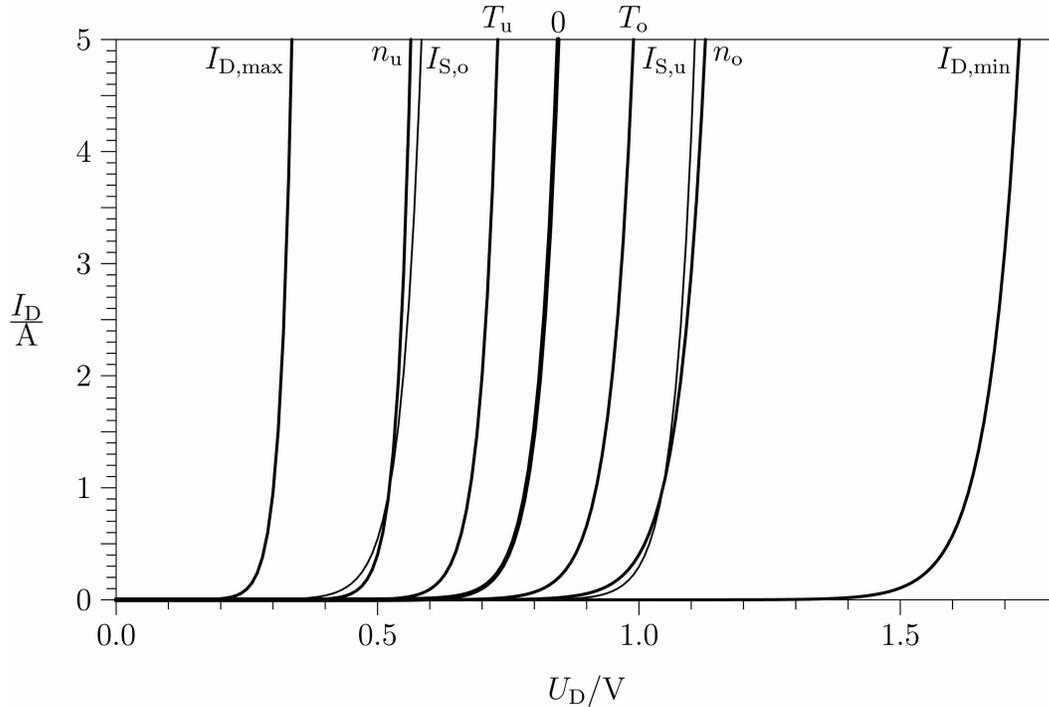


Abb. 6.2: Diodenkennlinien für verschiedenen Parametersätze von Temperatur T , Emissionskoeffizient n und Sättigungsstromstärke I_S

Kurve	T/K	n	I_S/A	U_T/mV
0	293	1,5	10^{-9}	25, 24...
n_u	293	1,0	10^{-9}	25, 24...
n_o	293	2,0	10^{-9}	25, 24...
T_u	253	1,5	10^{-9}	21, 79...
T_o	343	1,5	10^{-9}	29, 54...
$I_{S,u}$	293	1,5	10^{-12}	25, 24...
$I_{S,o}$	293	1,5	10^{-6}	25, 24...
$I_{D,max}$	253	1,0	10^{-6}	21, 79...
$I_{D,min}$	343	2,0	10^{-12}	29, 54...

Bahnwiderstand: Der Bahnwiderstand R_B beschreibt den elektrischen Gleichstromwiderstand der p- und n-Schicht der Diode,

$$R_B = \frac{U_D}{I_D} = \frac{n \cdot U_T}{I_D} \cdot \ln \left(1 + \frac{I_D}{I_S} \right)$$

Für $n = 1,5$, $I_S = 10^{-9}$ A, $I_S \ll I_D$ und Zimmertemperatur erhält man

$$R_B(I_D) \approx \frac{35 \text{ mV}}{I_D} \cdot \ln \left(\frac{10^9 \cdot I_D}{\text{A}} \right)$$

Somit gelten beispielsweise $R_B(I_D = 1 \text{ A}) \approx 35 \text{ m}\Omega \cdot 9 \ln 10 \approx 0,7 \Omega$ und $R_B(I_D = 0,1 \text{ A}) \approx 350 \text{ m}\Omega \cdot 8 \ln 10 \approx 6,5 \Omega$. Dies sind typische Werte für Kleinsignaldioden. Leistungsdioden bei sehr hohen Stromstärken erreichen $R_B \approx 0,01 \Omega$.

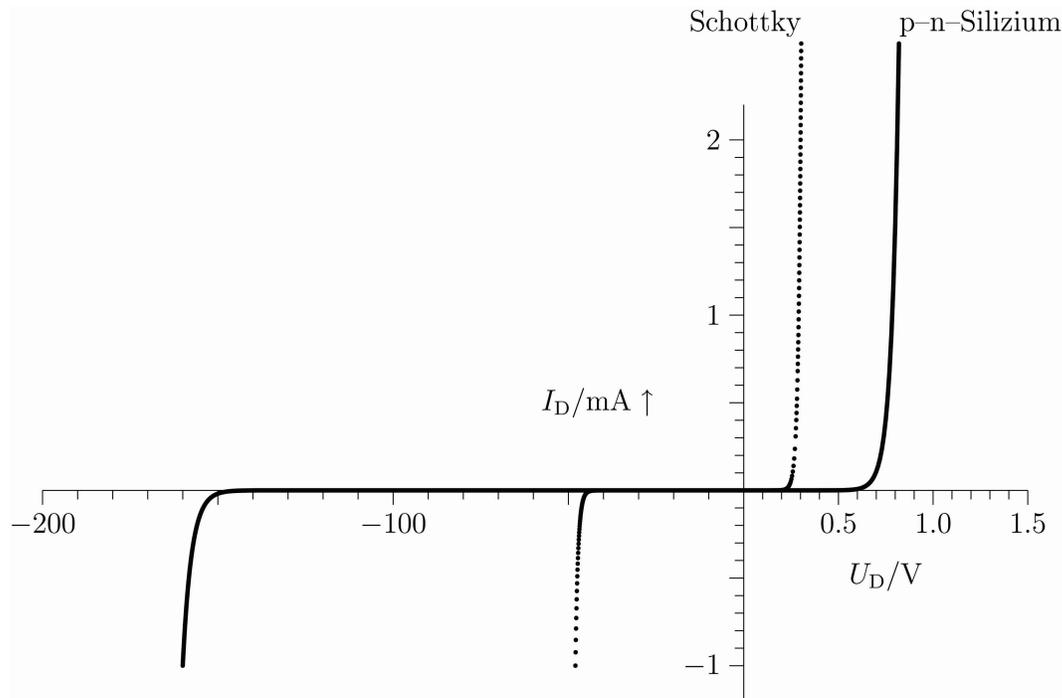


Abb. 6.3: Typische Kennlinien im gesamten Spannungsbereich für Silizium- und Schottky-Dioden

Parasitäre Kapazitäten: Eine Diode hat eine zumeist unerwünschte Kapazität C_D , die sich bei Anwendungen im Hoch-Frequenz-Bereich oftmals störend auswirkt und deshalb *parasitär* genannt wird.²⁾ Sie setzt sich zusammen aus der sogenannten *Sperrschicht-* und *Diffusionskapazität*. Die Gesamtkapazität $C_D = C_S + C_{DD}$ von Kleinsignaldioden liegt bei 3..30 pF.

Sperrschichtkapazität: Dioden haben eine von der Diodenspannung U_D abhängige Sperrschichtkapazität C_S , welche direkt proportional von der Kontaktfläche zwischen p- und n-Schicht bzw. Metall- und n-Schicht abhängt. Darüber hinaus wird C_S durch das n- und p-Dotierungsprofil bestimmt.

Diffusionskapazität: In der Raumladungzone eines pn-Übergangs ist beim Betrieb in Durchlassrichtung eine *Diffusionsladung* Q_D gespeichert, die dem *Dioden-Diffusionsstrom* I_{DD} proportional ist,

$$Q_D = \tau_T \cdot I_{DD} .$$

Die Proportionalitätskonstante τ_T heißt *Transientzeit*. Für Siliziumdioden gilt $\tau_T = (1 \dots 100)$ ns und für Schottky-Dioden $\tau_T = (10 \dots 100)$ ps. Der Strom I_{DD} hängt von der Diodenspannung U_D ab, und kann

²⁾Es gibt jedoch auch Anwendungen, bei denen diese Kapazität genutzt wird, etwa beim sogenannten *Harmonic Radar*. Hierbei ist an eine Schottky-Diode ein kurzer Draht gelötet, so dass sich ein Schwingkreis aus Drahtinduktivität in Reihe mit einer Diode und deren parasitärer Diodenkapazität gebildet wird, die man sich parallel zur Diode geschaltet denkt. Ein Sender mit der Sendefrequenz gleich der Resonanzfrequenz dieses Schwingkreises, induziert Schwingungen, die wegen der nichtlinearen Diodenkennlinie jedoch nicht harmonisch sind. Damit entstehen Oberwellen, die wiederum ein nichtharmnisches elektromagnetisches Feld aussenden. Detektiert man hiervon die erste Oberwelle, kann mit einer Richtantenne die Ortslage (Richtung) des Schwingkreises ermittelt werden. Derartige Systeme setzt man beispielsweise bei der Ortung von Lawinopfern ein, die dann allerdings in Ihrer Kleidung einen solchen Schwingkreis eingenäht haben müssen.

Tab. 6.1: Kennwerte typischer Leuchtdioden

Substrat	Flussspannung in V bei Flussstrom 10 mA	Wellenlänge in nm
Galium–Arsenid (GaAs)	1,0 ... 1,5	655 ... 900 (rot .. infrarot)
Galium–Arsen–Phosphid (GaAsP)	1,6 ... 2,2	583 ... 635 (hellrot .. gelb)
Galium–Phosphid (GaP) und	2,0 ... 2,4	≈ 565 (grün)
Indium–Gallium–Nitrid (InGaN)	3,2 ... 4,0	≈ 490 (blau)

für mittel große Durchlassströme bei pn–Dioden gleich I_D gesetzt werden. Die Diffusionskapazität ergibt sich aus der Ableitung von $Q_D = \tau_T \cdot I_D(U_D)$ nach U_D ,

$$C_{DD} = \frac{dQ_D}{dU_D} \approx \tau_T \cdot \frac{I_D}{n \cdot U_T} .$$

Für die Temperaturspannung $U_T = 25 \text{ mV}$ bei Zimmertemperatur, dem Diodenstrom von 25 mA sowie $n = 1 \dots 2$ ergibt sich für Siliziumdioden $C_{DD} = (1 \dots 200) \text{ nF}$ und für Schottky–Dioden $C_{DD} = (10 \dots 200) \text{ pF}$. Spezielle Schottky–Dioden erreichen auch Werte für die Gesamtkapazität von $< 1 \text{ pF}$.

Ersatzschaltbild: Ein Ersatzschaltbild einer Diode zeigt Abb. 6.4. Im Hochfrequenzbereich muss auch noch eine parasitäre Längstinduktivität berücksichtigt werden.

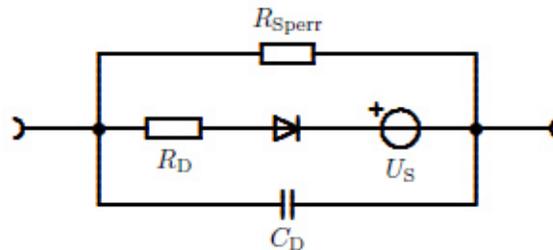


Abb. 6.4: Ersatzschaltbild einer Diode

Spezielle Halbleiter–Dioden:

Leuchtdiode (LED — Light Emitting Diode): Diese Dioden werden in Durchlassrichtung bei Flussspannungen von 1,5 V (rot) bis ca. 2,3 V (grün) und Stromstärken von (1..2) mA betrieben. Infolge des Stromflusses gelangen Elektronen vom Valenz– in das Leitungsband, die beim Rücksprung in das Valenzband Photonen emittieren. Bei den Silizium– und Germaniumdioden würde die Diode im Infrarotbereich (Wärmestrahlung) leuchten. Andere Halbleitermaterialien (Tab. 6.1) liefern jedoch Licht im sichtbaren Bereich von 380 ... 780 nm.

Weiß LEDs bestehen aus einer LED, die blaues bis ultraviolettes Licht abgibt. Dieses kurzwellige Licht trifft auf ein fotolumineszierendes Material, das seinerseits zum Leuchten angeregt wird. Dies ist ähnlich wie bei Leuchtstofflampen, wo der Leuchtstoff allerdings durch die kurzwellige Strahlung eines Quecksilberplasmas angeregt wird.

Photodiode: Diese Dioden werden in Sperrrichtung betrieben. Trifft auf das Halbleitermaterial Licht, so erhöht sich der Sperrstrom, was zur Messung der Lichtintensität genutzt werden kann.

Kapazitätsdiode: Diese Dioden werden in Sperrrichtung betrieben. Mit Erhöhung der Sperrspannung verbreitert sich die Raumladungszone wodurch die Kapazität abnimmt. Man hat somit die Möglichkeit, über die Sperrspannung die Kapazität zu ändern. Dies wird beispielsweise zur Abstimmung von Schwingkreisen (Parallelschaltung von Kapazität und Induktivität) genutzt.

Tunneldioden: Diese Dioden arbeiten bis zu höchsten Frequenzen (Mikrowellenbereich, GHz) und haben in einem bestimmten Spannungsbereich eine fallende Kennlinie (negativer differentieller Widerstand). Sie basieren auf dem quantenmechanischen Tunneleffekt von Elektronen. Der stark dotierte pn-Übergang ist mit ca. 10 nm sehr dünn. Das Leitungsband der Elektronen in der n-Schicht ist mit dem Valenzband der p-Schicht mehr oder weniger „verbunden“. Tunneldioden sind oftmals aus Germanium, aber auch Silizium und Galliumarsenid. Einsatzgebiete sind Oszillatoren, Verstärker, Frequenzwandler und Detektoren.

6.1.3 Grundsaltungen mit Dioden

Spannungsstabilisierung mit Zener-Dioden: Abbildung 6.5 zeigt eine Schaltung zur Spannungsstabilisierung mit einer Zener-Diode. Man geht vereinfacht von einer ideal steilen Kennlinie der Z-Diode im Durchbruchbereich aus, so dass bei der Zener-Spannung U_Z der differentielle Widerstand Null ist.

Die Diode ist nicht wirksam, solange für die Eingangsspannung $U_e < U_Z$ gilt. Die Ausgangsspannung ergibt sich dann aus dem Spannungsteilverhältnis von Vor- und Lastwiderstand, R_V bzw. R_L , $U_a = \frac{R_L}{R_V + R_L} \cdot U_e$.

Für $\frac{R_L}{R_V + R_L} \cdot U_e > U_Z$ fließt durch die Z-Diode ein Strom I_D , und die Spannung am Ausgang stellt sich konstant auf U_Z ein, $U_a = U_Z$ für alle $U_e > U_Z \cdot \frac{R_V + R_L}{R_L}$. Jede weitere Zunahme von U_e bewirkt allein eine Zunahme des Diodenstroms I_D . Der Strom im Lastwiderstand R_L bleibt konstant weil die Spannung U_a über der Last konstant U_Z ist.

Zusammengefasst gilt also

$$U_a \approx \begin{cases} \frac{R_L}{R_V + R_L} \cdot U_e & : U_e < U_Z \cdot \left(1 + \frac{R_V}{R_L}\right) \\ U_Z & : U_e > U_Z \cdot \left(1 + \frac{R_V}{R_L}\right) \end{cases}$$

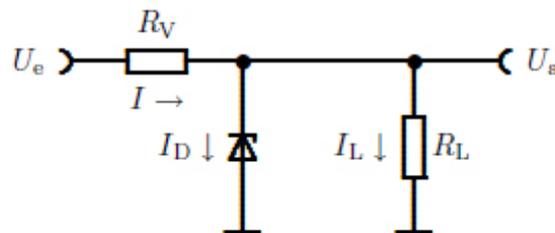


Abb. 6.5: Schaltung zur Stabilisierung der Ausgangsspannung U_a

Würde nun die Eingangsspannung U_e schwanken, so würde die Ausgangsspannung bei U_Z verharren, solange $U_e > U_Z \cdot \left(1 + \frac{R_V}{R_L}\right)$ gilt. Würde der Lastwiderstand schwanken, so würde ebenso $U_a = U_Z$ gelten,

solange diese Bedingung erfüllt ist, solange also

$$R_L > R_V \cdot \frac{U_Z}{U_e - U_Z} .$$

Für reale Z-Dioden ist der differentielle Widerstand nicht Null. Hier interessiert nun die tatsächliche Spannungsstabilisierung. Dazu folgende Betrachtung: Aus der Knotenregel (Abb. 6.5) erhält man

$$\frac{U_e - U_a}{R_V} = I_D + \frac{U_a}{R_L} , \quad \text{und somit} \quad U_e = \left(1 + \frac{R_V}{R_L}\right) U_a + R_V I_D$$

Durch Differentiation nach U_a folgt der *Glättungsfaktor*,

$$G \equiv \frac{dU_e}{dU_a} = 1 + \frac{R_V}{R_L} + \frac{R_V}{r_Z} ,$$

mit dem differentiellen Widerstand

$$r_Z \equiv \left(\frac{dI_D}{dU_a}\right)^{-1} = \left(\frac{dI_D}{dU_D}\right)^{-1} .$$

Je kleiner r_Z umso größer ist G , umso weniger ändert sich also die Ausgangsspannung U_a bei Variation der Eingangsspannung U_e oder/und Änderung der Last R_L . Für $r_Z \ll R_V, R_L$ erhält man

$$G \approx \frac{R_V}{r_Z} .$$

Brückengleichrichter (Graetz-Schaltung): Der *Brückengleichrichter* aus vier Dioden in Abb. 6.6 wandelt Wechselspannungen U_e in Gleichspannung U_a . Mittels Kondensatoren (Elko) kann die Ausgangsspannung geglättet werden. Für höhere Anforderungen an die Spannungsstabilität sollte diese Spannung noch geregelt (stabilisiert) werden.

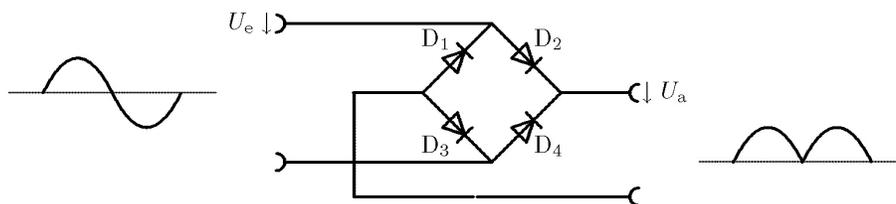


Abb. 6.6: Brückengleichrichter (Graetz-Schaltung)

Stromversorgungsgerät: Stromversorgungsgeräte (auch Spannungsversorgungen genannt) werden u.a. für alle *aktiven* elektrischen Schaltungen benötigt. Eine einfache Schaltung eines Stromversorgungsgerätes für z.B. $\pm 12\text{ V}$ Gleichspannung zeigt Abb. 6.7. Hier wird die Netzspannung ($230\text{ V}_{\text{eff}}$, 50 Hz) mittels eines Transformators auf $(14 \dots 17)\text{ V}_{\text{eff}}$ heruntertransformiert und in einer Graetz-Schaltung gleichgerichtet. Der Brückengleichrichter kann diskret mit 4 Gleichrichterdiode etwa vom Typ 1N4001 aufgebaut werden (Datenblatt S. 210). Alternativ kann der integrierte Brückengleichrichter etwa vom Typ B80 verwendet werden (Datenblatt S. 219).

Zwei Elektrolytkondensatoren (ca. $300\ \mu\text{F}$ und $1000\ \mu\text{F}$) dienen der Glättung. Die kleinere und damit Kosten, Platz und Gewicht sparende Kapazität kann verwendet werden, wenn die Ausgänge mit geringeren Strömen belastet werden. Schließlich werden die beiden Gleichspannungen von ca. $\pm 15\text{ V}$ mit

integrierten Festspannungsreglern (78L12 und 79L12 für die positive bzw. negative Ausgangsspannung) stabilisiert (Datenblatt S. 210). Die Ein- und Ausgangsspannungen der Regler werden jeweils mit Keramikcondensatoren 100 nF beschaltet, was die Neigung zu Regel-Schwingungen mindert. Dieses Gerät liefert stabile Ausgangsspannungen für Ausgangsströme bis zu 100 mA bei -12 V und bis zu 300 mA bei $+12\text{ V}$. Die Stabilität der Gleichspannungen beträgt ca. 60 dB (Faktor 1000).

Das beschriebene Stromversorgungsgerät kann nur 25...50% der gesamten Leistungsaufnahme als Nutzleistung an einen Lastwiderstand (Folgeschaltung) abgeben. Die Verluste entstehen im Netztransformator, Brückengleichrichter und Spannungsregler. Eine bedeutend geringere Verlustleistung weisen Schaltnetzteile auf, mit Wirkungsgraden von 70...90%. (Details hierzu in [16].)

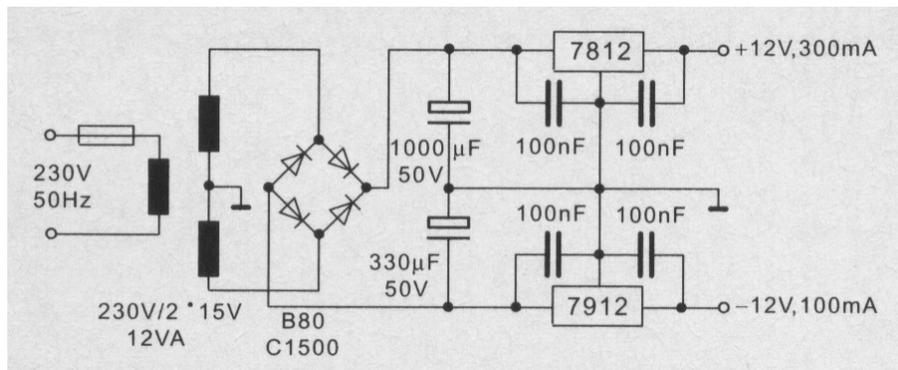


Abb. 6.7: Stabilisierte Gleich-Spannungsversorgung für $\pm 12\text{ V}$, 100 mA ([17], S. 488)

Spannungsvervielfacher: Mit der Schaltung in Abb. 6.8 a) kann man aus einer zeitlich veränderlichen Eingangsspannung $U_e(t)$ eine Gleichspannung erzeugen, die annähernd doppelt so groß ist wie der Scheitelwert (Amplitude $|U_e|$) der Eingangsspannung. Der Scheitelwert sei größer als die Schwellspannung einer Diode.

Man geht nun davon aus, dass zunächst die Eingangswechselspannung $U_e(t)$ negativ gegen Masse ist. Dann ist die Diode D_1 leitend und der Kondensator C_1 lädt sich auf die Spannung $\approx |U_e|$ auf. Genauer ist dies der Wert $|U_e|$ vermindert etwa um die Schleusenspannung U_S der Diode. Steigt nun die Spannung an der Eingangsbuchse, dann sperrt D_1 und das Potential am gemeinsamen Knotenpunkt von C_1 , D_1 und D_2 verschiebt sich in positiver Richtung bis auf den Wert $\approx 2 \cdot |U_e|$. Dann ist D_2 leitend und lädt den Kondensator C_2 auf eben diesen Spannungswert auf, welcher die Ausgangsspannung darstellt.

Durch weitere Kaskadierung werden noch höhere Spannungen erzeugt (Abb. 6.8 b).

Nachteilig bei dieser Art der Spannungsverdopplung ist allerdings, dass der Ausgang nur wenig belastet werden kann. Werden am Ausgang größere Ströme entnommen, nimmt die *Brummspannung* zu, das heißt, die Ausgangsspannung bricht deutlicher ein, der Wechselanteil der Spannung nimmt unerwünscht zu.

Diodenlogik: Die Schaltung in Abb. 6.9 ist eine Realisierung der logischen *Konjunktion* (UND-Verknüpfung). Ist eine Eingangsspannung Null, so leitet die entsprechenden Diode und zieht die Ausgangsspannung auf die Schleusenspannung $U_S \approx 0,7\text{ V}$, bei Verwendung von Siliziumdioden. Nur wenn beide Eingangsspannungen $U_e > +5 - U_S$ erfüllen, sperren beide Dioden und die Ausgangsspannung steigt auf etwa $+5\text{ V}$. Interpretiert man Spannungen unter $+1\text{ V}$ im Sinne der Booleschen Algebra als *logisch falsch*

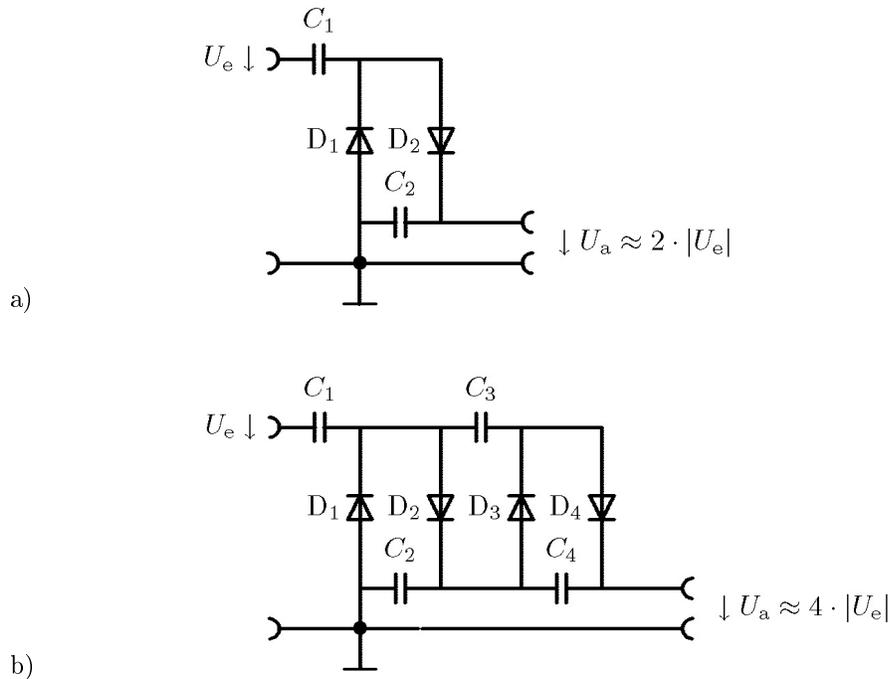


Abb. 6.8: a) Schaltung zur Spannungsverdopplung (Villard-Schaltung), b) Spannungsvervierfachung mit zweifach kaskadierter Villard-Schaltung

und Spannungen über +4 V als *logisch wahr*, dann ist auf diese Weise eine UND-Verknüpfung (engl.: AND) realisiert. Dabei sind Spannungen (+1 ... +4) V unzulässig. Wichtig hierbei ist, dass die Eingangsspannungsquellen durch die Dioden bei inverser Ansteuerung entkoppelt sind. Es fließt also kein Strom von der einen in die andere Eingangsspannungsquelle, wenn die Eingangsspannungen verschieden sind.

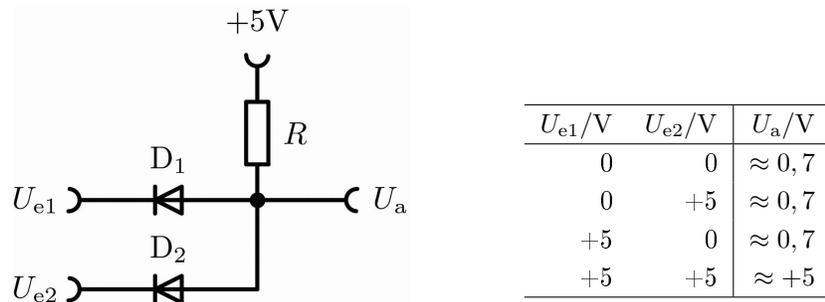


Abb. 6.9: Schaltungstechnische Realisierung der logischen Konjunktion (UND, AND) mit Dioden

Die Schaltung in Abb. 6.10 ist eine Realisierung der logischen *Disjunktion* (ODER-Verknüpfung). Sie unterscheidet sich von der Konjunktion in Abb. 6.9 dadurch, dass die Dioden umgekehrt gepolt eingebaut sind und der Widerstand gegen Masse geschaltet ist. Ist zumindest eine Eingangsspannung ca. +5 V, dann liegt auch die Ausgangsspannung auf dem oberen Potential von $+5 V - U_S \approx +5 V$. Nur wenn beide Eingangsspannungen unter U_S liegen, ist die Ausgangsspannung nahezu Null. Die Dioden entkoppeln wiederum die Eingangsspannungsquellen.

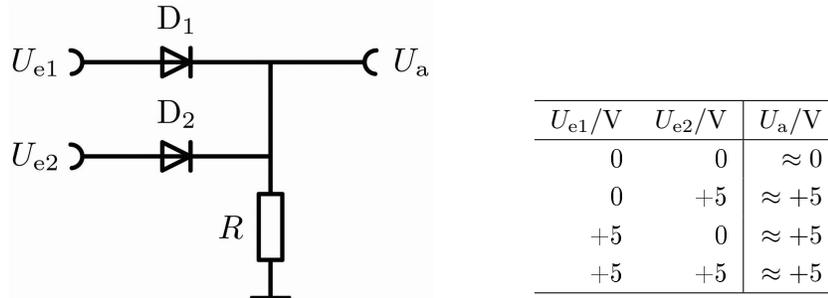


Abb. 6.10: Schaltungstechnische Realisierung der logischen Disjunktion (ODER, OR) mit Dioden

6.2 Bipolartransistor

6.2.1 Grundlegende Eigenschaften von Bipolartransistoren

Transistoren sind in der Regel Dreipole.³⁾ Sie dienen dem Verstärken und Schalten von Signalen. Man unterscheidet zwei Gruppen: Bipolar- und Feldeffekttransistoren (BJT bzw. FET), letztere werden im nächsten Abschnitt behandelt. Das Wort *Transistor* ist ein Acronym aus den englischen Wörtern *transfer* (Übertragung) und *resistor* (Widerstand).

Bipolartransistoren (engl.: *bipolar junction transistor*, BJT) sind dreischichtig aufgebaut aus n- und p-dotiertem Halbleitermaterial, ebenso wie pn-Dioden, nur dass hier eine Dreifachschichtung in der Anordnung „npn“ oder „pnp“ verwendet wird. Die drei Anschlüsse an diese Schichten eines BJT heißen *Emitter*, *Basis* und *Kollektor*. Schaltbilder zeigt Abb. 6.11.

Beide Schichtungstypen gibt es mit unterschiedlichen Halbleitermaterialien (Silizium, Germanium). Beim npn-Transistor können bei geeigneter Beschaltung mit äußeren Spannungsquellen elektrische Ladungen von einer n-Randschicht über die p-Mittelschicht in die gegenüberliegende n-Randschicht gelangen wobei sowohl Elektronen wie auch Löcher am Stromfluss beteiligt sind. Die Stärke dieses Stromes wird durch einen meist viel kleineren Strom bestimmt, der in die mittlere Schicht, die sog. *Basis*, fließt.

Beim pnp-Transistor sind die Verhältnisse analog zum npn-Transistor, wenn die äußeren Spannungen invers angelegt werden und der Elektronen- mit dem Löchertransport vertauscht werden. In komplexeren Schaltungen müssen beim Ersatz von npn- durch pnp-Transistoren auch noch Elektrolytkondensatoren und Dioden umgepolt verbaut werden.

In der Praxis, insbesondere in integrierten Schaltungen, werden jedoch bevorzugt npn-Transistoren eingesetzt, weil sie bessere elektrische Kenndaten besitzen.

Bei einem FET sind im Unterschied zum BJT nur entweder Löcher oder Elektronen am Stromfluss beteiligt.

Man könnte geneigt sein, etwa einen npn-Transistor mit zwei pn-Dioden aufzubauen, die an der p-Schicht zusammengeschaltet sind und die Basis bilden. Dies würde aber keinen Transistor bilden, weil die räumliche Nähe aller drei Schichten des Transistor für dessen Funktion unerlässlich ist.

Das Hauptmerkmal eines BJT ist es, dass bei geeigneter äußerer Beschaltung der Strom in den Kollektor I_C durch einen vergleichsweise kleinen Basisstrom I_B gesteuert wird,

$$I_C = B \cdot I_B ,$$

³⁾Eine Ausnahme bilden z. B. Multiemittertransistoren wie sie in der Eingangsstufe von digitalen Gattern verwendet werden.

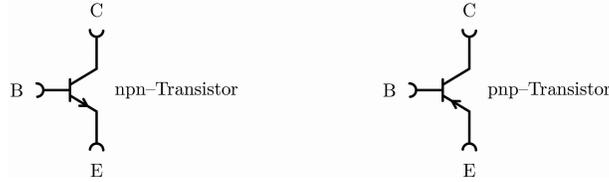


Abb. 6.11: Schaltsymbol von Bipolartransistoren mit Basis (B), Emitter (E) und Kollektor (C)

mit dem *Stromverstärkungsfaktor* $B \gg 1$. Der Emitterstrom I_E ist näherungsweise ebenso groß wie der Kollektorstrom I_C ,

$$I_C \approx I_E .$$

6.2.2 Aufbau

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den npn-BJT. Beim Typ pnp-BJT vertauschen sich die Spannungs- und Stromrichtungen.

Der schematische Aufbau eines BJT in planarer Anordnung zeigt Abb. 6.12 a). Sie verdeutlicht den unsymmetrischen Aufbau, weshalb die Vertauschung von Kollektor und Emitter zu unterschiedlichen Eigenschaften führt. Die Gebiete p^+ und n^+ sind besonders stark, p mittelstark und n^- schwach dotiert. Im Normalfall wird ein npn-BJT mit positiver Spannung am Kollektor gegenüber dem Emitterpotential betrieben. Die Basis ist ebenfalls positiv gegenüber dem Emitter, die „Basis-Emitterdiode“ also in Durchlassrichtung geschaltet, allerdings so, dass in typischen Anwendungen ein vergleichsweise kleiner Basisstrom $I_B \ll I_C$ fließt. Die Basisschicht ist vergleichsweise dünn, so dass der Elektronenstrom $I_E \approx I_C$ vom Emitter hin zum Kollektor dominiert. Das positive Potential am Kollektor bewirkt, dass ein Großteil der Elektronen vom Emitter die p-dotierte Basiszone durchqueren und zum Kollektor fließen, obwohl im Normalbetrieb die Basis-Kollektor-Diode in Sperrichtung betrieben wird.

In der Abb. 6.12 b) ist ein Epitaxial-Planar-BJT⁴⁾ von Typ BFY50 geöffnet zu sehen (Deckel entfernt), (Datenblatt S. 221 ff.). Das Gehäuse (engl.: case) liegt auf Kollektorpotential, Basis und Emitter werden isoliert durch in das Gehäuse geführt und durch dünne Gold- oder Aluminiumdrähte (*Bonddrähte*) mit dem kleinen (etwa $0,5 \times 0,5$ mm²) zentral angeordneten Siliziumchip verbunden. Anstelle des Metallgehäuses kann der Transistor auch mit Kunststoff vergossen werden.

6.2.3 Kennlinien und Kenngrößen

Abbildung 6.13 definiert die Ströme und Spannung an einem BJT, wie sie in den folgenden Kennlinienfeldern verwendet werden.

Ausgangskennlinienfeld: $I_C(U_{CE})$, **Parameter:** $U_{BE} = \text{const.}$

Das Ausgangskennlinienfeld eines typischen BJT zeigt Abb. 6.14. Parameter ist hier die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} . Im Normalbetrieb leitet die Basis-Emitter-Diode, und die Kollektor-Emitter-Diode sperrt. In weiten Bereichen ist der Kollektorstrom I_C nahezu unabhängig von der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} . Die BC-Diode sperrt hier. Nur für sehr kleine Werte von $U_{CE} < U_{CE,sat} \approx 0,3$ V zeigt

⁴⁾ *Epitaxial* bedeutet, dass eine monokristalline Schicht eines bestimmten Stoffes auf ein monokristallines Substrat einer anderen Stoffsorte aufgebracht wird.

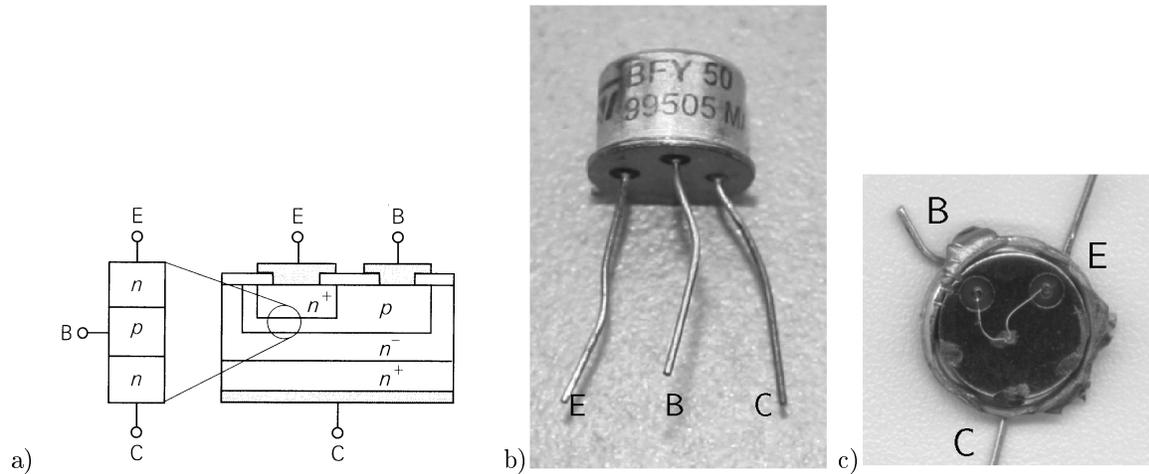


Abb. 6.12: a) Schematischer Aufbau eines Epitaxial-Planar-Bipolartransistoren (nach [16], S. 57), b) Außenansicht BJT Typ BFY50 c) Innenansicht BFY50

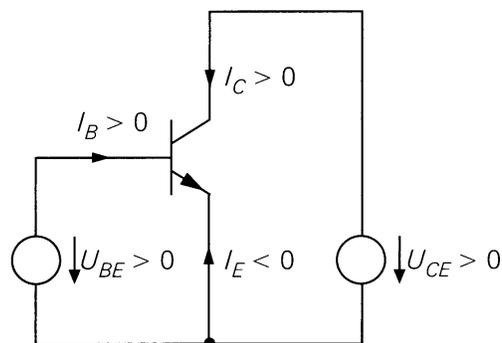


Abb. 6.13: Spannungen und Ströme an einem Bipolartransistors im Normalbetrieb (nach [16], S. 36)

I_C eine starke Zunahme mit U_{CE} . Hier leitet auch die BC-Diode und der BJT gerät in Sättigung. Darin wird $U_{CE,sat}$ *Knick-* oder auch *Sättigungs-Spannung* genannt.

Die Eingangskennlinie $I_B(U_{BE})$ hängt kaum von U_{CE} ab (Abb. 6.16 b), weshalb man das Ausgangskennlinienfeld häufig auch mit dem Parameter I_B anstelle von U_{BE} dargestellt. Beispielsweise gilt $U_{BE}(I_B = 25 \mu A) \approx 0,72 V$. und $U_{BE}(I_B = 15 \mu A) \approx 0,70 V$.

Übertragungskennlinienfeld: $I_C(U_{BE})$, **Parameter:** $U_{CE} = \text{const.}$

Im Normalbetrieb hängt der Kollektorstrom bei konstanter Spannung U_{CE} empfindlich von der Eingangsspannung U_{BE} ab. Das entsprechende Übertragungskennlinienfeld eines typischen BJT zeigt Abb. 6.16 a). Die Kennlinie ändert sich nur geringfügig bei Variation des Parameters U_{CE} .

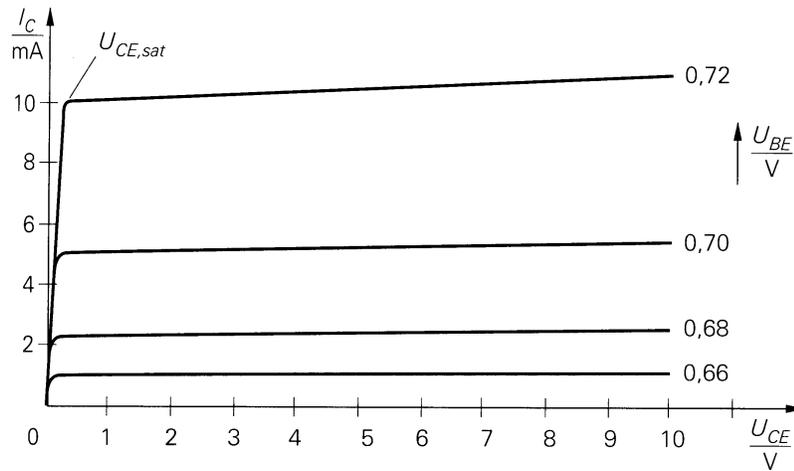


Abb. 6.14: Ausgangskennlinienfeld eines typischen Bipolartransistors. Parameter ist die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} (nach [16], S. 37)

Die Übertragungskennlinie kann näherungsweise als Diodenkennlinie beschrieben werden,

$$I_C(U_{BE}) = I_S \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \left(1 + \frac{U_{CE}}{U_A} \right), \quad \text{für } U_{BE} > 0 \quad (6.2)$$

Darin ist $U_A > 0$ die sogenannte *Early-Spannung*, deren Bedeutung aus Abb. 6.15 ersichtlich wird: Für $U_{CE} = -U_A$ gilt nach Gl. (6.2) $I_C = 0$. Die Early-Spannung bestimmt also neben I_B bzw. U_{BE} die Steilheit der Kurven des Ausgangskennlinienfeld im Sättigungsbereich. Der *Sättigungssperrstrom* beträgt $I_S = (10^{-16} \dots 10^{-12})$ A, und U_T ist wiederum die Temperaturspannung (s.S.93), die unter Normalbedingungen im Bereich $U_T = (20 \dots 30)$ mV liegt.

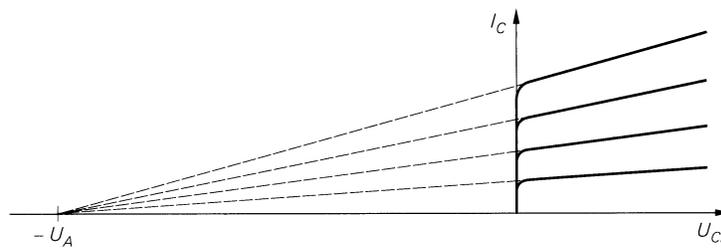


Abb. 6.15: Die Early-Spannung $U_A > 0$ ist gleich jener Spannung $-U_{CE}$, bei der die linear extrapolierten Kurven des Ausgangskennlinienfeldes die Abszisse kreuzen (nach [16], S. 38)

Eingangskennlinienfeld: $I_B(U_{BE})$, **Parameter:** $U_{CE} = \text{const.}$

Das Eingangskennlinienfeld eines typischen BJT zeigt Abb. 6.16 b). Auch diese Kennlinie ändert sich nur

geringfügig bei Variation des Parameters U_{CE} . Die Eingangskennlinie kann wiederum näherungsweise als Diodenkennlinie beschrieben werden,

$$I_B(U_{BE}) = \frac{I_S}{B_0} \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \quad , \quad \text{für } U_{BE} > 0 \quad , \quad B_0 \equiv \frac{B(U_{BE}, U_{CE})}{1 + \frac{U_{CE}}{U_A}} \quad (6.3)$$

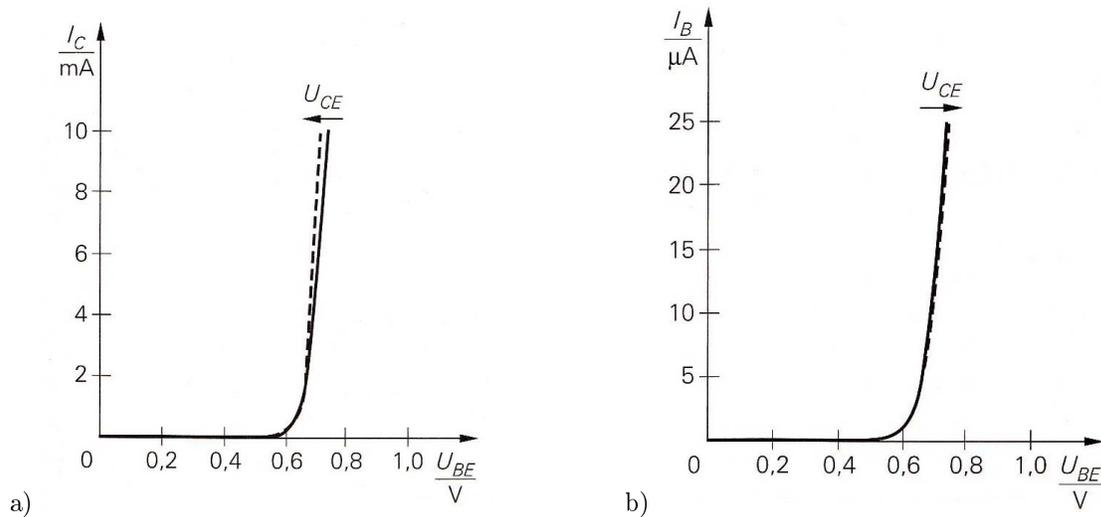


Abb. 6.16: (a) Übertragungskennlinienfeld und (b) Eingangskennlinienfeld eines typischen Bipolartransistors. Parameter ist die Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} (nach [16], S. 37)

Unter Beachtung der Übertragungskennlinie (6.2) folgt

$$I_C(U_{BE}) = B(U_{BE}, U_{CE}) \cdot I_B(U_{BE}) \quad .$$

Die Abhängigkeit des Stromverstärkungsfaktors $B(U_{BE}, U_{CE})$ von der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} ist im sogenannten *Gummel-Plot*, Abb. 6.17, als Abstand $\lg(I_C/A) - \lg(I_B/A)$ dargestellt.

Das Eingangskennlinienfeld ähnelt sehr dem Übertragungskennlinienfeld in Abb. 6.16 a), wenn man den dortigen Kollektorstrom I_C durch den Basisstrom I_B ersetzt. Allerdings ist I_B um etwa den Faktor 1/400 kleiner als I_C . Darüber hinaus wird die Eingangskennlinie mit wachsender Spannung U_{CE} etwas flacher, im Unterschied zur Übertragungskennlinie. Dies gibt Anlass, $I_C(U_{BE})$ und $I_B(U_{BE})$ im Gummel-Plot gemeinsam darzustellen. In weiten Bereichen von $U_{BE} = (0,6 \dots 0,8)$ V und $U_{CE} \gg U_{BE}$ kann der Stromverstärkungsfaktor als nahezu konstant angesehen werden.

Differentielle Kenngrößen — Kleinsignalverhalten

Die oben aufgeführten Kennlinien sind nichtlinear, was eine Großsignalbeschreibung schwierig macht. Oftmals arbeitet ein Transistor jedoch nur bei geringen Änderungen u_{BE} der Basis-Emitter-Spannung $U_{BE} = U_{BE,A} \pm u_{BE}$, $u_{BE} \ll U_{BE,A}$, oder auch des Kollektorstromes $I_C = I_{C,A} \pm i_C$, $i_C \ll I_{C,A}$. Man führt deshalb differentielle Kenngrößen ein, die das Kleinsignalverhalten in der Nähe des sogenannten *Arbeitspunktes*

$$(U_{BE}, U_{CE}, I_B, I_C) = (U_{BE,A}, U_{CE,A}, I_{B,A}, I_{C,A})$$

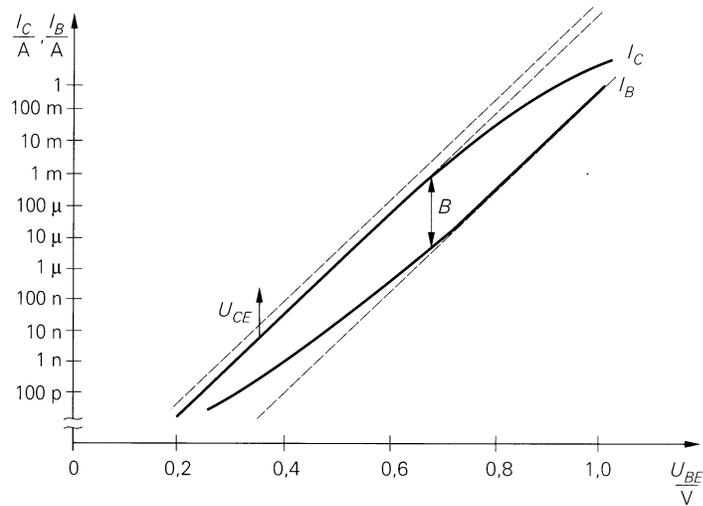


Abb. 6.17: Gummel-Plot: Halblogarithmische Darstellung von Kollektorstrom I_C und Basisstrom I_B als Funktionen der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} . Die gestrichelten Linien sind die Verläufe nach den Kennlinien (6.2) bzw. (6.3). Die dick gezeichneten Verläufe entsprechen typischen realen Kennlinien (nach [16], S. 39)

beschreiben. Dazu werden die Kennlinien nun in der Nähe des Arbeitspunktes linearisiert.

Differentielle Kenngrößen — Kollektorstrom

Für die praktische Dimensionierung von BJT-Schaltungen erweist es sich als günstig, den Kollektorstrom I_C als Funktion der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} und des Basisstroms I_B aufzufassen, $I_C(U_{CE}, I_B)$. Dann kann man bei kleinen Änderungen u_{CE} und i_B am Arbeitspunkt $(U_{CE,A}, I_{B,A})$ wie folgt schreiben,

$$I_C(U_{CE,A} + u_{CE}, I_{B,A} + i_B) - I_C(U_{CE,A}, I_{B,A}) \approx \frac{\partial I_C(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial U_{CE}} \cdot u_{CE} + \frac{\partial I_C(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial I_B} \cdot i_B .$$

Mit den Abkürzungen

$$i_C \equiv I_C(U_{CE,A} + u_{CE}, I_{B,A} + i_B) - I_C(U_{CE,A}, I_{B,A})$$

$$\frac{1}{r_{CE}} \equiv \frac{\partial I_C(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial U_{CE}}$$

$$\beta \equiv \frac{\partial I_C(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial I_B} \tag{6.4}$$

$$\tag{6.5}$$

erhält man,

$$i_C \approx \frac{1}{r_{CE}} \cdot u_{CE} + \beta \cdot i_B$$

 für $u_{CE} \ll U_{CE,A}$ und $i_B \ll I_{B,A}$. (6.6)

Die Größe β für $u_{CE} = 0$ (d.h., $U_{CE} = \text{const.}$) heißt *differentieller Stromverstärkungsfaktor*, oder auch *Kleinsignalstromverstärkung*. Die Größe r_{CE} für $i_B = 0$ (d.h., $I_B = \text{const.}$) ist der *differentielle Ausgangswiderstand* der Kollektor-Emitter-Strecke.

Zu einer anderen Darstellung des differentiellen Kollektorstroms i_C gelangt man, wenn in der Funktion $I_C(U_{CE}, I_B)$ der Basisstrom I_B als Funktion der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} aufgefasst wird. Dann gilt

$$\frac{\partial I_C(U_{CE}, I_B(U_{BE}))}{\partial U_{BE}} = \frac{\partial I_C(U_{CE}, I_B(U_{BE}))}{\partial I_B} \cdot \frac{\partial I_B(U_{BE})}{\partial U_{BE}} .$$

Die Größe

$$r_{BE} \equiv \left(\frac{\partial I_B(U_{BE})}{\partial U_{BE}} \right)^{-1}$$

ist der *differentielle Basis-Emitter-Widerstand* (*differentieller Eingangswiderstand*) des BJT. Man erhält dann anstelle von (6.6) die Darstellung

$$\boxed{i_C \approx \frac{1}{r_{CE}} \cdot u_{CE} + S \cdot u_{BE}} \quad \text{für } u_{CE} \ll U_{CE} \text{ und } u_{BE} \ll U_{BE} . \quad (6.7)$$

Darin ist

$$S \equiv \frac{\partial I_C(U_{CE}, I_B(U_{BE}))}{\partial U_{BE}} = \frac{\beta}{r_{BE}} \quad (6.8)$$

die sogenannte *Steilheit*. Sie beschreibt die Änderung des Kollektorstroms I_C mit der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} . Das ist also der Anstieg der Tangente an die Übertragungskennlinie im Arbeitspunkt, Abb. 6.16 a), Gl. (6.2).

Differentielle Kenngrößen — Basis-Emitter-Spannung

Die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} wird ebenfalls als Funktion der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} und des Basisstroms I_B aufgefasst, $U_{BE}(U_{CE}, I_B)$. Dann kann man bei kleinen Änderungen u_{CE} und i_B am Arbeitspunkt ($U_{CE,A}, I_{B,A}$) wie folgt schreiben,

$$U_{BE}(U_{CE,A} + u_{CE}, I_{B,A} + i_B) - U_{BE}(U_{CE,A}, I_{B,A}) \approx \frac{\partial U_{BE}(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial U_{CE}} \cdot u_{CE} + \frac{\partial U_{BE}(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial I_B} \cdot i_B .$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} u_{BE} &\equiv U_{BE}(U_{CE,A} + u_{CE}, I_{B,A} + i_B) - U_{BE}(U_{CE,A}, I_{B,A}) \\ v_r &\equiv \frac{\partial U_{BE}(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial U_{CE}} \\ r_{BE} &\equiv \frac{\partial U_{BE}(U_{CE,A}, I_{B,A})}{\partial I_B} \end{aligned}$$

erhält man die Kleinsignalgleichung,

$$\boxed{u_{BE} \approx v_r \cdot u_{CE} + r_{BE} \cdot i_B} \quad \text{für } u_{CE} \ll U_{CE} \text{ und } i_B \ll I_B . \quad (6.9)$$

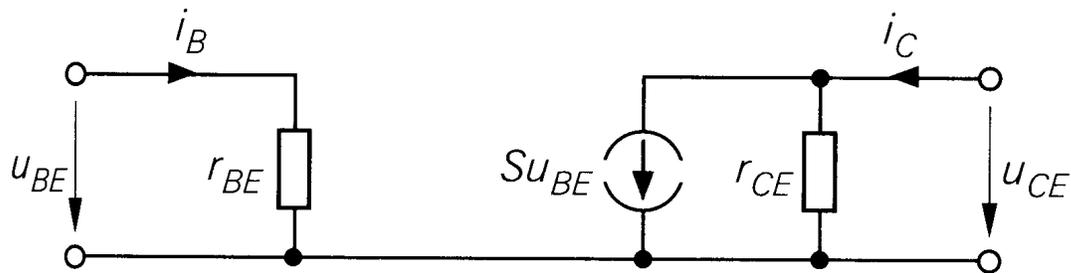


Abb. 6.18: Kleinsignalersatzschaltbild eines Bipolartransistors im Normalbetrieb für niedrige Frequenzen entsprechend den Gleichungen (6.11) und (6.7) (nach [16], S. 45). Der Eingang ist durch den differentiellen Widerstand r_{BE} charakterisiert, an dem die Spannungsänderung u_{BE} die Stromänderung i_B bewirkt. Der Ausgang ist durch die Parallelschaltung des differentiellen Widerstands r_{CE} mit der Stromquelle $S \cdot u_{BE} = \frac{\beta}{r_{BE}} \cdot u_{BE} = \beta \cdot i_B = i_C$ beschrieben. Die Ausgangsspannungsänderung ist durch $u_{CE} = i_C \cdot r_{CE}$ gegeben

Die Größe v_r für $i_B = 0$ (d.h., $I_B = \text{const.}$) heißt *Spannungsrückwirkung*, und r_{BE} für $u_{CE} = 0$ (d.h., $U_{CE} = \text{const.}$) ist der *differentielle Eingangswiderstand* der Basis-Emitter-Strecke.

Gleichung (6.9) lautet aufgelöst nach i_B ,

$$\boxed{i_B \approx \frac{1}{r_{BE}} \cdot u_{BE} + S_r \cdot u_{CE}} \quad \text{für } u_{CE} \ll U_{CE} \text{ und } u_{BE} \ll U_{BE} . \quad (6.10)$$

Darin ist

$$S_r \equiv \frac{\partial I_B(U_{CE}, U_{BE})}{\partial U_{CE}} = -\frac{v_r}{r_{BE}}$$

die sogenannte *Rückwärtssteilheit*. Sie beschreibt die Änderung des Basisstroms I_B mit der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} . Man kann für praktische Anwendungen im Normalbetrieb $S_r \approx 0$ setzen, so dass (6.10) vereinfacht werden kann auf,

$$i_B \approx \frac{1}{r_{BE}} \cdot u_{BE} . \quad (6.11)$$

Aus den Gleichungen (6.11) und (6.7) folgt das Kleinsignalersatzschaltbild Abb. 6.18.

Stromverstärkung

Abbildung 6.19 zeigt die Abhängigkeit der Groß- und Kleinsignalstromverstärkung vom Kollektorstrom I_C für einen typischen Kleinsignaltransistor. Das Maximum B_{\max} der Großstromverstärkung B wird für $I_C = 1 \dots 10 \text{ mA}$ erreicht. Für Leistungstransistoren erhält man B_{\max} bei I_C im Ampere-Bereich. Man betreibt BJTs in der Regel bei $B \lesssim B_{\max}$, für $B > B_{\max}$ nimmt die Schaltgeschwindigkeit ab.⁵⁾

6.2.4 Arbeitspunkteinstellung

Eine typische Anwendung eines BJTs ist die lineare Verstärkung von Signalen $u_{BE}(t)$ im Kleinsignalbetrieb. Dazu werden zunächst der Kollektorstrom $I_C = I_{C,A}$ und die Kollektorspannung $U_{CE} = U_{CE,A}$

⁵⁾Dies ist eine Folge des sogenannten Hochstromeffektes, Details in [16], S. 60 ff.

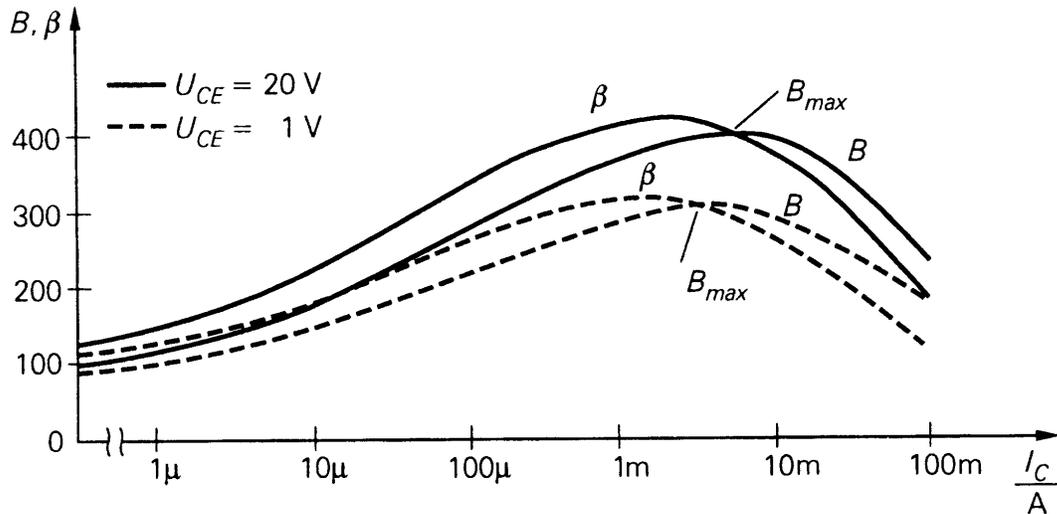


Abb. 6.19: Verlauf der Groß- und Kleinsignalstromverstärkung B bzw. β eines Bipolartransistors im Normalbetrieb bei Variation des Kollektorstroms I_C . Parameter ist die Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} (nach [16], S. 40)

festgelegt und anschließend die Basis-Emitter-Spannung $U_{BE} = U_{BE,A}$ und somit der Basisgleichstrom $I_B = I_{B,A}$ eingestellt. Damit ist der *Arbeitspunkt* $A \equiv (I_{C,A}, U_{CE,A}, I_{B,A})$ des BJT festgelegt, Abb. 6.20. Der Kollektorwiderstand R_2 und die Betriebsspannung U_{B2} werden fest gewählt. Sie bestimmen im Ausgangskennlinienfeld Abb. 6.20 c) die *Arbeitsgerade*: aus $U_{B2} = U_{CE} + I_C \cdot R_2$ folgt,

$$I_C(U_{CE}) = -\frac{1}{R_2} \cdot U_{CE} + \frac{U_{B2}}{R_2} .$$

Dies ist eine Geradengleichung mit dem Anstieg $-R_2^{-1}$ und den Schnittpunkten $I_C(U_{CE} = 0) = U_{B2}/R_2$ auf der Ordinate und $U_{CE}(I_C = 0) = U_{B2}$ auf der Abszisse.

Der Widerstand R_1 und die Betriebsspannung U_{B1} werden ebenso fest gewählt. Sie bestimmen im Eingangskennlinienfeld Abb. 6.20 b) die *Arbeitsgerade*: aus $U_{B1} = U_{BE} + I_B \cdot R_1$ folgt,

$$I_B(U_{BE}) = -\frac{1}{R_1} \cdot U_{BE} + \frac{U_{B1}}{R_1} .$$

Dies ist eine Geradengleichung mit dem Anstieg $-R_1^{-1}$ und den Schnittpunkten $I_B(U_{BE} = 0) = U_{B1}/R_1$ auf der Ordinate und $U_{BE}(I_B = 0) = U_{B1}$ auf der Abszisse.

In der Praxis werden häufig $U_{B1} = U_{B2}$ gesetzt (Betriebsspannung der gesamten Schaltung).

6.2.5 Kleinsignalbetrieb

Der Gleichspannung $U_{BE,A}$ werde nun das zu verstärkende Nutzsinal $u_{BE}(t)$ überlagert. Dazu wird $u_{BE}(t)$ z. B. kapazitiv eingekoppelt. Diese Spannungsänderung bewirkt eine Änderung $i_B(t)$ des Basisstroms I_B entsprechend der steilen Kennlinie (6.3) der Basis-Emitter-Diode, $i_B(t) \approx u_{BE}(t)/r_{CE}$, Abb. 6.16 b) S.105. Dies ruft schließlich eine Änderung $i_C \equiv i_C(t)$ des Kollektorstroms bezüglich des Wertes I_C am Arbeitspunkt hervor.

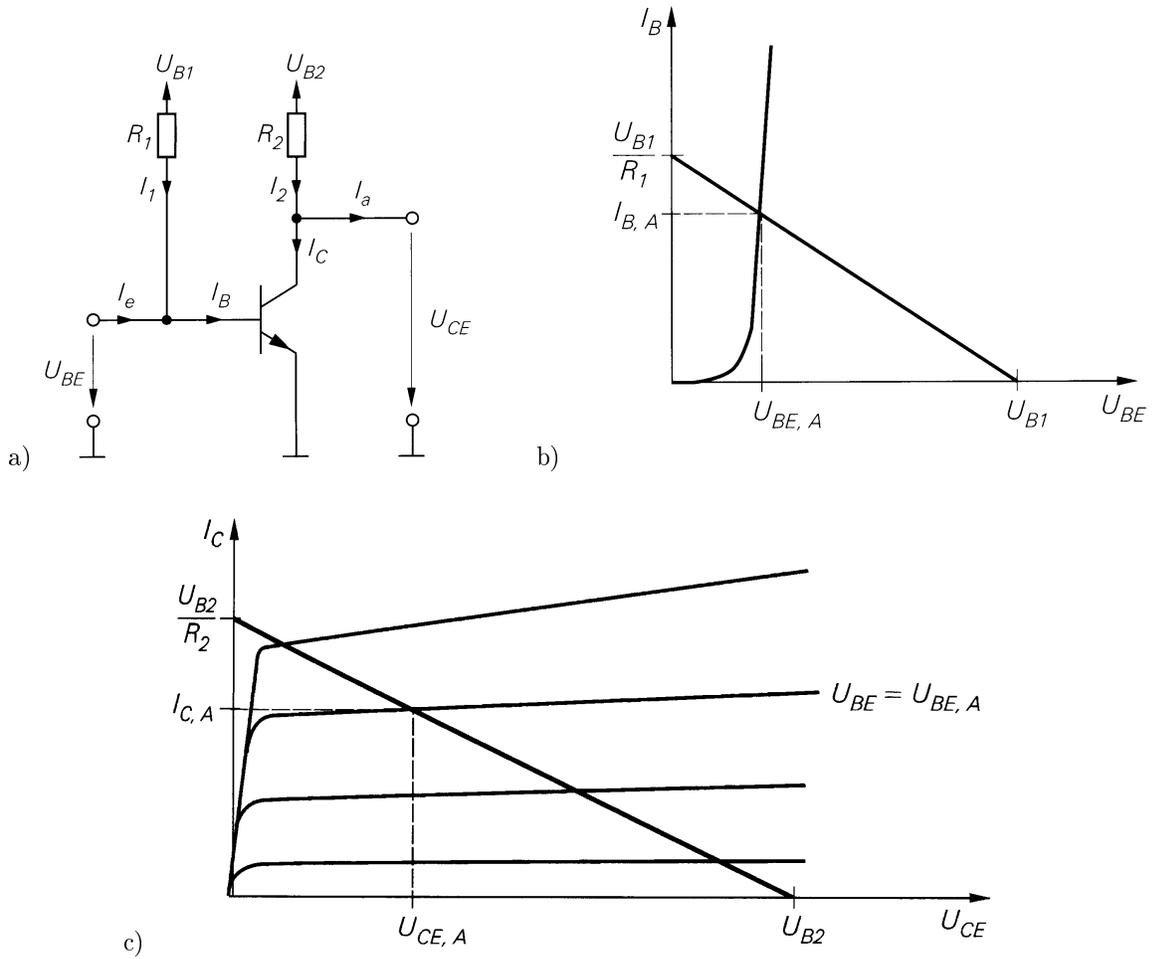


Abb. 6.20: a) Schaltung zur Arbeitspunkteinstellung eines Bipolartransistors. Arbeitspunkt im (b) Eingangs- und (c) Ausgangskennlinienfeld (nach [16], S. 42, f.)

Infolge der Variation der Eingangsspannung um den Arbeitspunkt schwankt der Zustand des BJT im Ausgangskennlinienfeld Abb. 6.20 c), er liegt aber immer auf der Arbeitsgeraden!

6.2.6 Grenzdaten

Transistoren haben verschiedene Grenzdaten, deren Überschreitung in der Regel zur Zerstörung des Bauteils führt. Hier kann nur ein kurzer Überblick gegeben werden, um letztlich das Verständnis von Datenblättern zu BJTs zu erleichtern. Detailliertere Ausführungen finden sich in [16], S. 47, ff.

Maximale Spannungen

Im Folgenden steht der Index BR für *Durchbruch* (engl.: *breakdown*). Der Index O gibt an, dass der entsprechende dritte Anschluss offen ist (engl.: *open*).

Emitter-Basis-Durchbruchspannung, $U_{(BR)EBO}$: Dies ist die maximal zulässige Sperrspannung an der BE-Diode. Typische Werte sind $U_{(BR)EBO} = 5 \dots 7 \text{ V}$. Sie ist oftmals von untergeordneter Bedeutung, weil im Normalbetrieb die BE-Diode nicht gesperrt ist.

Kollektor-Basis-Durchbruchspannung, $U_{(BR)CBO}$: Dies ist die maximal zulässige Sperrspannung an der BC-Diode. Typische Werte sind $U_{(BR)CBO} = 20 \dots 80 \text{ V}$, in Sonderfällen bis zu $U_{(BR)CBO} \approx 1300 \text{ V}$. Sie ist eine vergleichsweise wichtige Kenngröße, weil im Normalbetrieb die BC-Diode in Sperrichtung betrieben wird.

Kollektor-Emitter-Durchbruchspannung, $U_{(BR)CEO}$: Diese Durchbruchspannung ist besonders wichtig für praktische Anwendungen, weil im Normalbetrieb die Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} vergleichsweise groß ist. Im Ausgangskennlinienfeld stellen sich Kollektor-Emitter-Durchbrüche wie in Abb. 6.21 dar. Für positive Basisströme $I_B > 0$ steigt die Kennlinie nach dem Durchbruch stark an. Für die offene Basis $I_B = 0$ fließt bis zur Stelle $U_{CE} = U_{(BR)CEO}$ nahezu kein Kollektorstrom I_C , um dann bei Durchbruch extrem stark anzusteigen. Wird die Basis über einen ohmschen Widerstand R mit dem Emitter verbunden, so erhöht sich die Durchbruchspannung auf $U_{CE} = U_{(BR)CER} > U_{(BR)CEO}$, und die Kennlinie weist einen negativen differentiellen Widerstand auf (wie bei der Tunnel diode). Der Basisstrom ist dabei negativ. Werden schließlich Basis und Emitter kurzgeschlossen (engl. *shorted*), so erhöht sich die Durchbruchspannung weiter auf den größt möglichen Wert $U_{CE} = U_{(BR)CES} > U_{(BR)CER}$. Die beschriebenen Durchbrüche werden *Normaldurchbruch* oder *Durchbruch 1. Art* genannt.

Darüber hinaus gibt es den *Durchbruch 2. Art* (engl.: *secondary breakdown*), im Anschluss an den Normaldurchbruch. Ein Durchbruch 2. Art entsteht durch „Einschnürungen“ der Strompfade, also eine über den Querschnitt inhomogene Stromdichte, was zu einer lokalen Überhitzung und meist Zerstörung des BJT führt. Die entsprechenden Kennlinien sind in der Abb. 6.21 gestrichelt gezeichnet. Sie sind erratische (lawinenartige) irreversible Phänomene und lassen sich deshalb im Unterschied zu den Kennlinien des Normaldurchbruchs nicht statisch messen. Durchbrüche 2. Art treten vor allem bei Leistungstransistoren auf.

Maximale Stromstärken

Es werden die maximal zulässigen Werte für den *Dauerstrom* (engl.: *continuous current*) und den *Spitzenstrom* (engl.: *peak current*) unterschieden. Maximal zulässige Dauerströme in Basis, Kollektor und Emitter

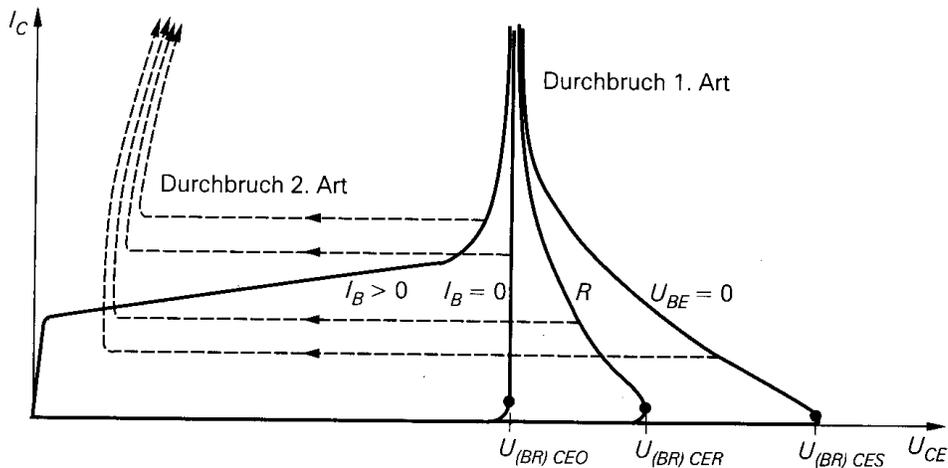


Abb. 6.21: Durchbruchkennlinien der Kollektor-Emitter-Strecke eines npn-Bipolartransistors (nach [16], S. 48)

werden mit $I_{B,max}$, $I_{C,max}$ bzw. $I_{E,max}$ bezeichnet. Entsprechende maximal zulässige Spitzenströme werden mit I_{BM} , I_{CM} bzw. I_{EM} bezeichnet. Sie werden für anzugebende Pulsdauer und Wiederholraten bestimmt und liegen bei Werten, die etwa 1,2- bis 2-mal größer sind, als die entsprechenden Dauerströme. Der Grund für die größeren Werte liegt darin, dass der Transistor in seinen verschiedenen Teilen (Sperrschicht, Gehäuse) eine bestimmte Wärmekapazität hat, deren Temperatur bei Erhöhung des Leistungsumsatzes nicht sofort auf die neue Gleichgewichtstemperatur ansteigen kann. Wird ein Transistor im Dauerbetrieb schon bei seinen Grenzwerten betrieben, so wird eine kurzzeitige (pulsartige) Erhöhung des Leistungsumsatzes eher dessen Zerstörung bewirken, als in jenem Fall, wo der Transistor im Dauerbetrieb fern seiner Leistungsgrenzen arbeitet.

Maximale Verlustleistung

Die *maximale Verlustleistung* $P_{V,max}$ gibt die obere Grenze für die elektrische Energie an, die pro Zeiteinheit im Dauerbetrieb in Wärme umgesetzt werden darf. Wird sie überschritten, kommt es zur Überhitzung des Transistors was ihn „schneller altern“ lässt oder gar zerstört. Die Verlustleistung eines BJT ist gegeben durch

$$P_V = U_{CE} \cdot I_C + U_{BE} \cdot I_B .$$

Im Normalbetrieb ist U_{BE} durch die Schließenspannung $U_S \approx 0,7 \text{ V}$ der BE-Diode gegeben, und mit der Stromverstärkung $B = I_C/I_B$ folgt unter Beachtung von $B \gg 1$,

$$P_V = \left(U_{CE} + \frac{U_S}{B} \right) \cdot I_C \approx U_{CE} \cdot I_C \quad \text{für } U_{CE} \gg \frac{U_S}{B} \lesssim 0,01 \text{ V} . \tag{6.12}$$

Hieraus folgt die Forderung $U_{CE} \cdot I_C \lesssim P_{V,max}$. Die Grenzkurve

$$I_C = P_{V,max} \cdot \frac{1}{U_{CE}} \tag{6.13}$$

heißt *Verlusthyperbel* und wird häufig im Ausgangskennlinienfeld eingezeichnet, Abb. 6.22.

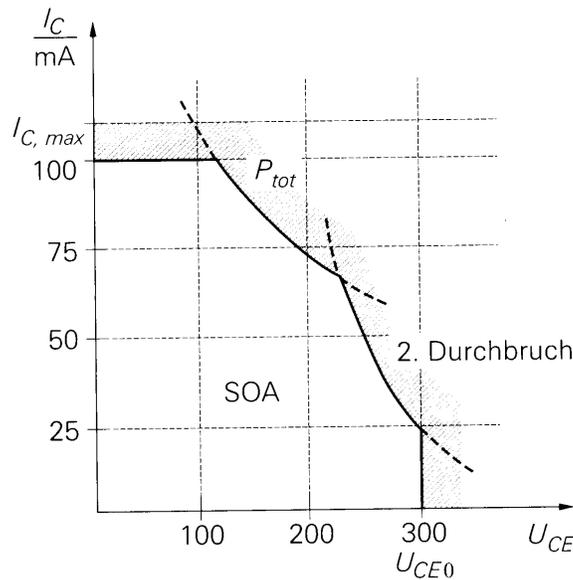


Abb. 6.22: Zulässiger Betriebsbereich (engl.: *safe operating area*, SOA) im Ausgangskennlinienfeld eines Bipolartransistors. Die SOA wird durch die maximal zulässigen Werte für Spannungen, Stromstärken und den Leistungsumsatz bestimmt (nach [16], S. 50)

Wärmeabführung

Der Leistungsumsatz geschieht vor allem in der Sperrschicht (engl.: junction) des BJT. Von dort wird die Wärme über das Gehäuse (engl.: case = C) und möglicherweise einen zusätzlichen Kühlkörper (engl.: heatsink = H) an die Umgebung (engl.: ambient = A) abgegeben, Abb. 6.23. Die entsprechenden Wärmekapazitäten $C_{th,J}$, $C_{th,C}$ und $C_{th,H}$ laden sich im stationären Dauerbetrieb auf bestimmte Temperaturen T_J , T_C bzw. $T_{1/2}$ auf, so dass sich von Baugruppe zu Baugruppe ein Temperaturabfall $T_J \downarrow T_C \downarrow T_{1/2} \downarrow T_A$ einstellt.

Die Temperatursprünge werden durch die Wärmeübergangswiderstände $R_{th,JC}$, $R_{th,CH}$ und $R_{th,HA}$ bestimmt.⁶⁾ Beispielsweise folgt im stationären Fall für die Temperatur des Kühlkörpers (Anwendung der

⁶⁾ Wärmeübergangswiderstände R_{th} dürfen nicht mit ohmschen Widerständen verwechselt werden. Die Maßeinheit von R_{th} ist K/W oder auch °/W. Weitere Analogien fasst die folgende Tabelle zusammen:

Größe	elektrische Ladungsleitung	Wärmeleitung
zu transportierende Größe	$[Q] = C = \text{As}$ [elektrische Ladung] = Coulomb	$[Q] = J = \text{Ws}$ [Wärmemenge] = Joule
Stromstärke	$[I] = \text{A}$	$[I] = \text{W}$
Spannung	$[U] = [\Delta\phi] = \text{V}$	$[\Delta T] = \text{K}$
spezifischer Widerstand	$[\varrho] = \Omega \cdot \text{m} = \text{V} \cdot \text{m} / \text{A}$	$[1/\lambda] = \text{K} \cdot \text{m} / \text{W}$
spezifischer Leitwert	$[1/\varrho] = \text{A} / (\text{V} \cdot \text{m})$	$[\lambda] = \text{W} / (\text{K} \cdot \text{m})$
Widerstand	$[R] = \Omega = \text{V} / \text{A}$	$[R] = \text{K} / \text{W}$
Leitwert	$[G] = \S = \text{A} / \text{V}$ (Siemens)	$[G] = \text{W} / \text{K}$
Kapazität	$[C] = \text{F} = \text{As} / \text{V}$ (Farad)	$[C] = \text{Ws} / \text{K}$
Quelle	Spannungsquelle, $C = \infty$	Wärmequelle, $C = \infty$

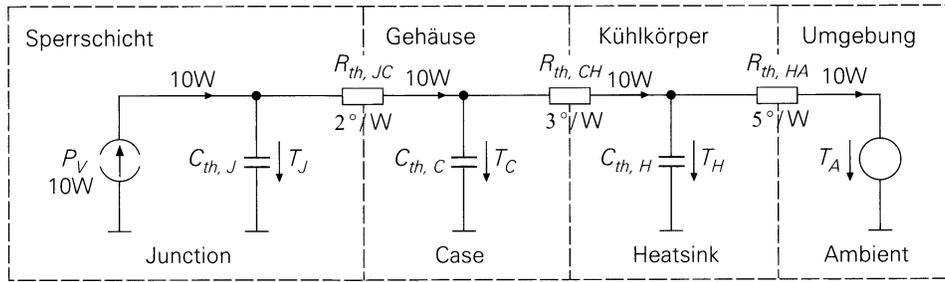


Abb. 6.23: Thermisches Ersatzschaltbild eines Bipolartransistors mit Kühlkörper (nach [16], S. 52)

thermischen Spannungsteilerregel)

$$T_{1/2} - T_A = \frac{R_{th,HA}}{R_{th,JC} + R_{th,CH} + R_{th,HA}} \cdot (T_J - T_A)$$

und mit den Zahlenwerten aus der Abbildung,

$$T_{1/2} = 0,5 \cdot (T_J + T_A) .$$

In Datenblättern ist häufig der Wärmewiderstand $R_{th,JA} = R_{th,JC} + R_{th,CA}$ von der Sperrschicht zur Umgebung angegeben. Er ist zu verwenden, wenn der BJT auf der Leiterplatte stehend ohne Kühlkörper montiert wird.

Bei Transistoren in SMD-Technik⁷⁾ wird die Wärme an den Anschlussbeinen zur Leiterplatte abgeführt. Der Wärmewiderstand von der Sperrschicht zum Lötunkt wird mit $R_{th,JS}$ bezeichnet, worin „S“ für Lötunkt (engl.: soldering point) steht.

Beispielrechnung zum Leistungsumsatz

Ein BJT mit dem Wärmeübergangswiderstand $R_{th,JA} = 250 \text{ K/W}$ soll ohne Kühlkörper betrieben werden. Die maximale Sperrschichttemperatur ist $T_{J,max} = 150 \text{ °C}$. Die Umgebungstemperatur sei $T_A = 50 \text{ °C}$. Die Spannung über Kollektor und Emitter sei $U_{CE} \lesssim 10 \text{ V}$. Gesucht ist der maximal zulässige Kollektorstrom $I_{C,max}$.

Der maximal zulässige Leistungsumsatz in der Sperrschicht ergibt sich zu

$$P_{V,max} = \frac{T_{J,max} - T_A}{R_{th,JA}} = 400 \text{ mW} .$$

Der maximal zulässige Kollektorstrom ergibt sich aus der Verlusthyperbel (6.13) näherungsweise zu

$$I_{C,max} \approx \frac{P_{V,max}}{U_{CE}} = \frac{400 \text{ mW}}{10 \text{ V}} = 40 \text{ mA}$$

In der Praxis sollte der Kollektorstrom wesentlich unter diesem Wert liegen, um eine Reserve bezüglich einer Erhöhung der Umgebungstemperatur zu haben. Darüber hinaus erhöht sich die Lebensdauer der BJTs, wenn sie bei niedrigeren Temperaturen betrieben werden.

⁷⁾SMD: Surface Mounted Device (Oberflächenmontage)

Temperaturabhängigkeit

Die Kennlinien einer BJT sind stark von der Temperatur T abhängig. Insbesondere trifft dies für die Übertragungskennlinie (6.2) zu. Hier hängen sowohl die Temperaturspannung U_T wie auch der Sperrstrom I_S von T ab, es gelten

$$I_C(T) = I_S(T) \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T(T)}} \cdot \left(1 + \frac{U_{CE}}{U_A}\right)$$

$$U_T(T) \approx 86 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot T$$

$$I_S(T) \approx I_S(T_0) \cdot e^{\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) \cdot \frac{U_G(T)}{U_T(T)}} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^3$$

Darin sind $U_G (\approx 1,12\text{ V})$ die *Bandabstandsspannung* (für Silizium). Die relative Temperaturabhängigkeit $I_S^{-1} \cdot \Delta I_S / \Delta T$ von I_S ist recht stark, bei Zimmertemperatur beträgt sie ca. $0,15/\text{K}$. Die relative Temperaturabhängigkeit $I_C^{-1} \cdot \Delta I_C / \Delta T$ von I_C beträgt bei Zimmertemperatur ca. $0,065/\text{K}$. Bei einer Temperaturänderung von ca. 15 K verdoppelt sich also der Kollektorstrom! Die relative Änderung $B^{-1} \cdot \Delta B / \Delta T$ der Großsignalstromverstärkung B bei Zimmertemperatur beträgt etwa $0,005/\text{K}$.

Generell ist die Temperaturabhängigkeit der BJT-Kenngrößen bei der Schaltungsentwicklung ein Problem. Ihr muss durch besondere Vorkehrungen Rechnung getragen werden, so dass sich Temperatureffekte möglichst kompensieren.

Transitfrequenz

Die Kleinsignalstromverstärkung β , Gl. (6.4), hängt neben dem Arbeitspunkt auch von der Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ des differentiellen Eingangsstroms $i_B(t) = |i_B| \cos \omega t$ ab. Diese Abhängigkeit ergibt sich im Wesentlichen aus den parasitären Kapazitäten der Sperrschichten des BJT, Abb. 6.24. Aus der Abbildung folgt der Frequenzgang

$$\beta(j\omega) = \frac{r_{BE} \cdot (S - j\omega C_C)}{1 + j\omega \cdot r_{BE}(C_E + C_C)}$$

Mit $\beta_0 \equiv \beta(j \cdot 0) = r_{BE} \cdot S$. Die Steilheit S (6.8) ist am Arbeitspunkt im Normalbetrieb und hinreichend kleinen Frequenzen ω sehr groß gegen ωC_C , weshalb näherungsweise

$$\beta(j\omega) \approx \frac{\beta_0}{1 + j\omega \cdot r_{BE}(C_E + C_C)}$$

geschrieben werden kann. Dies ist die Übertragungsfunktion eines Tiefpass erster Ordnung, mit der Grenzfrequenz

$$f_\beta \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_{BE} \cdot (C_E + C_C)}$$

Als *Transitfrequenz* bezeichnet man die Frequenz f_T , bei welcher der Betrag der Kleinsignalstromverstärkung auf den Wert 1 abgefallen ist. Es gilt also

$$|\beta(j2\pi f_T)| \approx \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + [2\pi f_T \cdot r_{BE}(C_E + C_C)]^2}} \approx \frac{\beta_0}{2\pi f_T (C_E + C_C)} = 1$$

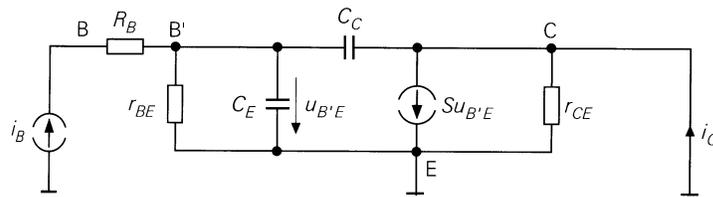


Abb. 6.24: Wechselstrom-Ersatzschaltbild eines Bipolartransistors (nach [16], S. 81). Darin sind: R_B : Basis-Bahnwiderstand, C_E : Basis-Emitter-Kapazität, C_C : Basis-Kollektor-Kapazität und C_S : Substrat-Kapazität

und somit

$$f_T \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{S}{(C_E + C_C)} \tag{6.14}$$

6.2.7 Grundsaltungen

Bipolartransistoren werden in drei Grundsaltungen betrieben, Abb. 6.25. Sie unterscheiden sich in der Wahl des BJT-Anschluss (E, B oder C), der das gemeinsamen Bezugspotentials von Ein- und Ausgangsspannung U_e bzw. U_a bildet. Beispielsweise ist es bei der Emitterschaltung E.

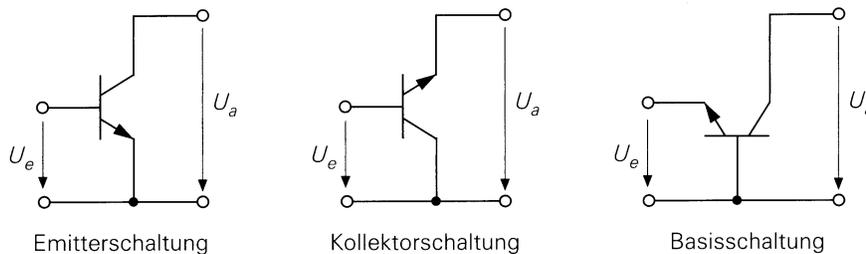


Abb. 6.25: Grundsaltungen eines Bipolartransistors (nach [16], S. 98)

Emitterschaltung

Die Emitterschaltung eines Bipolartransistors und das zugehörige Ersatzschaltbild für Normalbetrieb zeigt Abb. 6.26 a), die entsprechenden Kennlinien Abb. 6.26 b). Solange die BE-Diode sperrt, folgt die Eingangsspannung $U_e = U_{BE}$ der Generatorspannung U_g . Ab der Schleusenspannung $U_S \approx 0,7\text{ V}$ der BE-Diode bleibt U_e bei U_S liegen. Eine weitere Erhöhung von U_g lässt den Basisstrom I_B ansteigen, was über R_g den Spannungsabfall $I_B \cdot R_g$ hervorruft. Es gilt dann $U_e = U_g - I_B \cdot R_g$.

Die Ausgangsspannung U_a liegt zunächst ($U_g < U_S$) fest bei der Betriebsspannung U_b . Fängt die EB-Diode jedoch an zu leiten ($U_g > U_S$), so fließt mit dem Basis- auch ein Kollektorstrom I_C , der seinerseits einen Spannungsabfall $I_C \cdot R_C$ über dem Kollektorwiderstand R_C hervorruft. Für die CE-Spannung (Ausgangsspannung U_a) gilt somit

$$U_a = U_{CE} = U_b - I_C \cdot R_C = U_b - B(U_{CE}, U_{BE}) \cdot I_B \cdot R_C .$$

Diese Spannung nimmt mit wachsendem Basistrom solange ab, bis sich bei $U_{CE} = U_{CE,sat} \approx 0,1 \text{ V}$ Sättigung einstellt. Die BE-Spannung beträgt dann $U_{BE} = U_{BE,sat} \approx U_S + 0,02 \text{ V} \approx 0,72 \text{ V}$. Die BC-Spannung ist dann so groß, dass auch die BC-Diode leitet. Der Kollektorstrom teilt sich dann also auf in den B- und E-Strom, $I_C = I_B + I_E$, mit

$$I_B = \frac{U_g - U_{BE}}{R_g}, \quad U_{BE} \approx 0,72 \text{ V}.$$

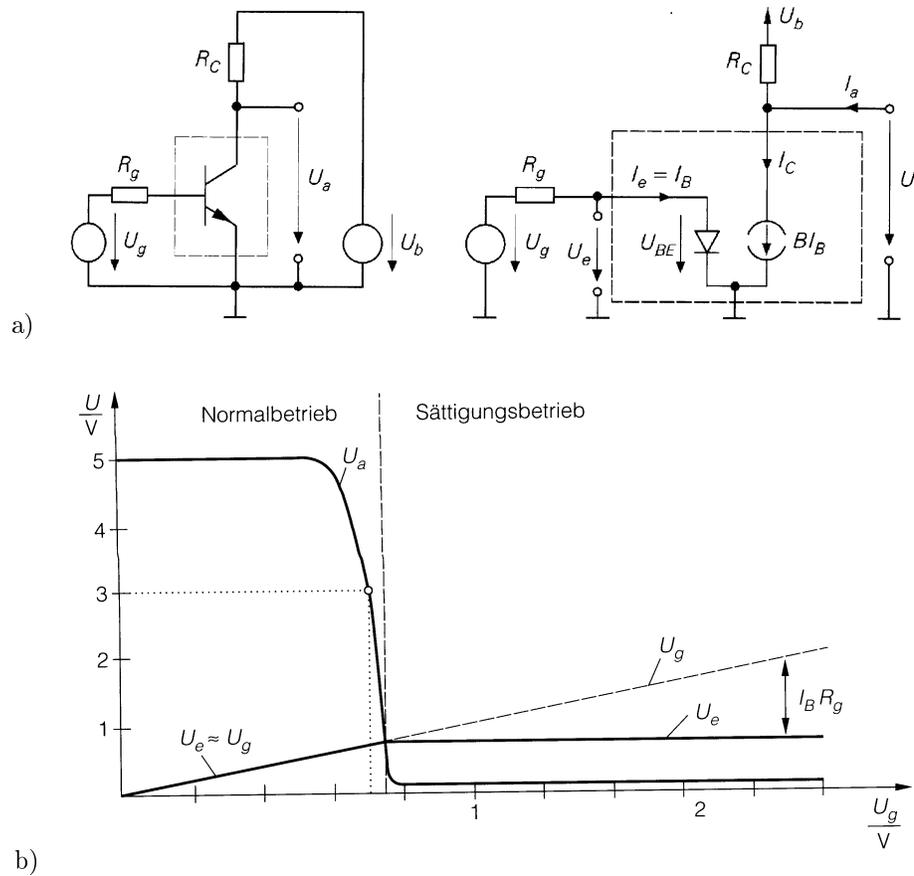


Abb. 6.26: a) Emitterschaltung eines Bipolartransistors (links) mit Großsignal-Ersatzschaltbild für Normalbetrieb
b) Kennlinien: Eingangsspannung U_e und Ausgangsspannung U_a als Funktion der Generatorspannung U_g (nach [16], S. 99)

Abbildung 6.27 zeigt ein Kleinsignal Ersatzschaltbild der Emitterschaltung. Ohne Lastwiderstand ($R_L = \infty$) folgen die Kleinsignalkenngrößen,

$$\text{Differenz-Spannungsverstärkung:} \quad A \equiv \left. \frac{u_a}{u_e} \right|_{i_a=0} = -S \cdot (R_C \parallel r_{CE}) \approx -S \cdot R_C \quad (6.15)$$

$$\text{Differenz-Eingangswiderstand:} \quad r_e \equiv \frac{u_e}{i_e} = r_{BE} \quad (6.16)$$

$$\text{Differenz-Ausgangswiderstand:} \quad r_a \equiv \frac{u_a}{i_a} = R_C \parallel r_{CE} \approx R_C \quad (6.17)$$

Für die Kleinsignaländerung der Ausgangsspannung am Arbeitspunkt A folgt

$$u_a = -\beta_A \cdot i_B \cdot R_C \approx -\frac{\beta_A \cdot R_C}{r_{BE,A}} \cdot u_{BE} . \quad (6.18)$$

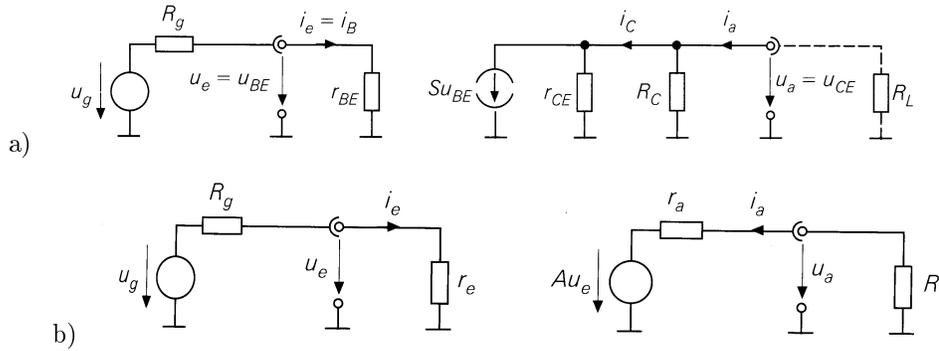


Abb. 6.27: a) Kleinsignal Ersatzschaltbild der Emitterschaltung, b) Kleinsignal Ersatzschaltbild der Emitterschaltung mit den Ersatzgrößen aus den Gln. (6.15, 6.16 und 6.17) (nach [16], S. 102)

Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung

Die Kleinsignal-Übertragungsfunktion (6.18) der Emitterschaltung in Abb. 6.26 a) ist streng genommen nur für infinitesimal kleine Spannungsänderungen linear. Für größere Spannungsänderungen ΔU_{BE} ändert sich U_a jedoch merklich nichtlinear, was letztlich zu unerwünschten Signalverzerrungen führt — der Klirrfaktor der Ausgangsspannung wächst mit größerem Dynamikbereich ΔU_{BE} und ΔI_B der Eingangsspannung bzw. des Eingangsstromes.

Darüber hinaus zeigt die Schaltung eine unerwünschte Temperaturabhängigkeit. So nimmt zum Beispiel die Eingangsspannung $U_e = U_{BE}$ bei konstantem Kollektorstrom I_C um $\frac{dU_e}{dT} \approx 1,7 \text{ mV/K}$ ab. Man muss also die Eingangsspannung um ca. $1,7 \text{ mV/K}$ verringern, um den Arbeitspunkt konstant zu halten. Die Temperaturdrift der Ausgangsspannung beträgt

$$\left. \frac{dU_a}{dT} \right|_A = \left. \frac{\partial U_a}{\partial U_e} \right|_A \cdot \frac{dU_e}{dT} .$$

Für $\frac{\partial U_a}{\partial U_e} = 100$ folgt immerhin,

$$\left. \frac{dU_a}{dT} \right|_A = 170 \text{ mV/K} .$$

Bei einer Temperaturänderung von 10 K würde die Ausgangsspannung um etwa 2 V driften. Oftmals treten noch deutlich größere Temperaturänderung auf, was die Notwendigkeit einer Temperaturstabilisierung verdeutlicht.

Die Nichtlinearität und Temperaturabhängigkeit der Emitterschaltung in Abb. 6.26 a) kann durch eine Stromgegenkopplung bei Verwendung eines Emittterwiderstandes R_E verringert werden, (Abb. 6.28 a).

Die Übertragungskennlinie $U_a(U_g)$ zeigt Abb. 6.28 b). Im Unterschied zur Übertragungskennlinie ohne Stromgegenkopplung, (Abb. 6.26 b), verläuft die Übertragungskennlinie infolge der Gegenkopplung in der Nähe des Arbeitspunktes nahezu linear. Für $r_{CE} \gg R_C, R_E, \beta \gg 1$ und ohne Lastwiderstand (am Ausgang

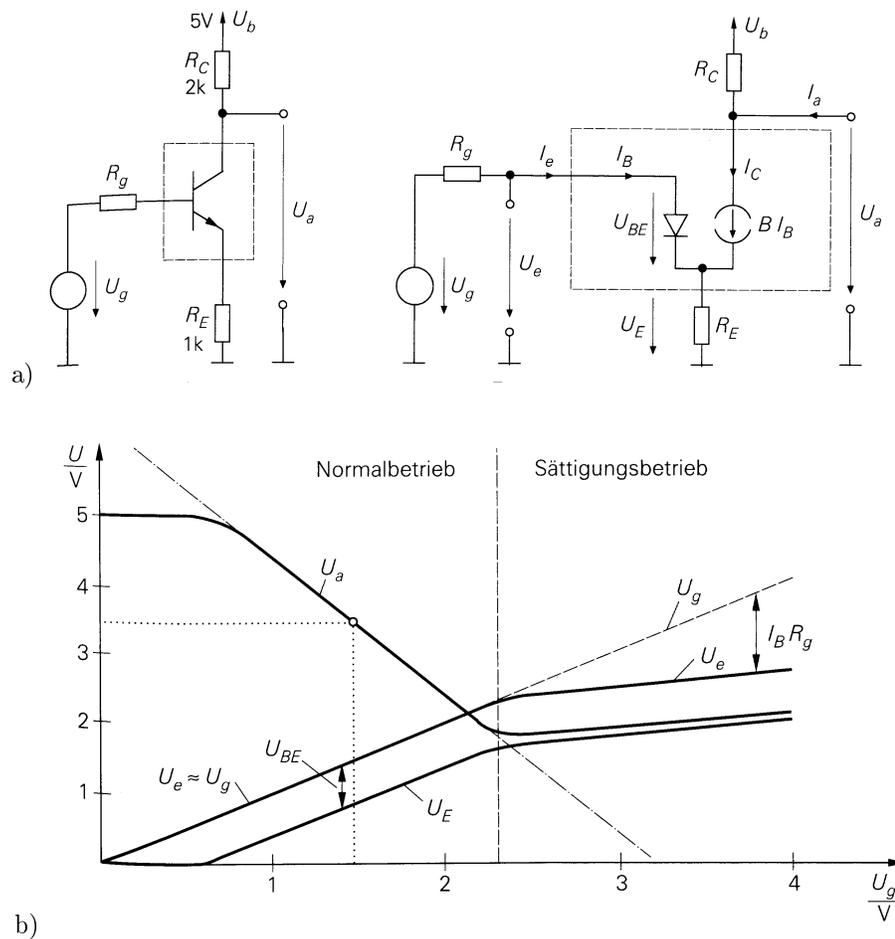


Abb. 6.28: a) Emitterschaltung eines Bipolartransistors mit Stromgegenkopplung (links) mit Großsignal-Ersatzschaltbild für Normalbetrieb

b) Kennlinien: Eingangsspannung U_e und Ausgangsspannung U_a als Funktion der Eingangsspannung U_g (nach [16], S. 105)

wird kein Strom entnommen: „Leerlauf“) findet man

$$\frac{u_a}{u_e} \approx -\frac{S \cdot R_C}{1 + S \cdot R_E} \approx -\frac{R_C}{R_E} \quad (6.19)$$

$$r_e \equiv \frac{u_e}{i_e} \approx r_{BE} + \beta \cdot R_E = r_{BE} \cdot (1 + S \cdot R_E)$$

$$r_a \equiv \frac{u_a}{i_a} \approx R_C \quad (6.20)$$

Zusammenfassung: Emitterschaltungen

Eine Stabilisierung des Arbeitspunktes kann auch mit einer Spannungsgegenkopplung erreicht werden, Abb. 6.29 c).

Eine ausführliche Diskussion findet sich in [16], S. 110 ff. In Tab. 6.2 werden einige wichtige Kenngrößen aller drei Emitterschaltungen zusammengefasst.

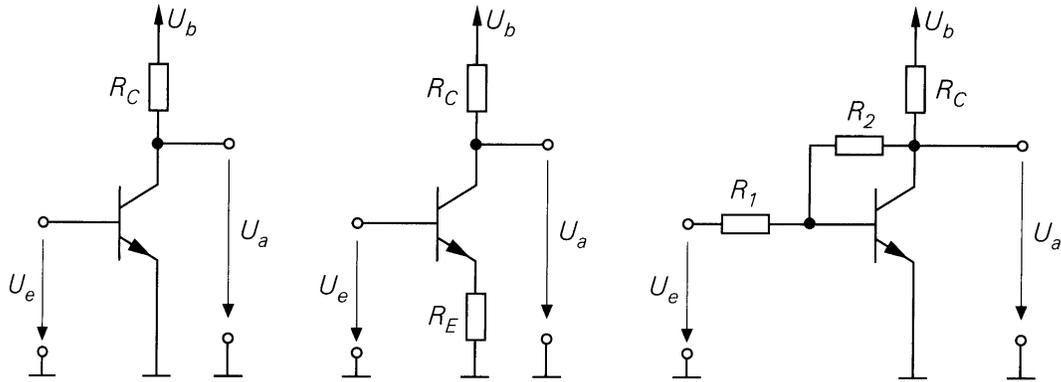


Abb. 6.29: Emitterschaltungen; links: ohne Gegenkopplung, Mitte: mit Stromgegenkopplung und rechts: mit Spannungsgegenkopplung (nach [16], S. 133)

Tab. 6.2: Kenngrößen der Emitterschaltungen aus Abb. 6.29 (nach [16], S. 133)

	ohne GK Abb. 6.29, links	Strom-GK Abb. 6.29, Mitte	Spannungs-GK Abb. 6.29, rechts
$\frac{u_a}{u_e}$	$-S \cdot R_C$	$-\frac{R_C}{R_E}$	$-\frac{R_2}{R_1}$
r_e	r_{BE}	$r_{BE} + \beta \cdot R_E$	R_1
r_a	R_C	R_C	$S \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{\beta}$
k	$\frac{ u_e }{4U_T}$	$\frac{ u_e }{4U_T(1 + SR_E)^2}$	$\frac{ u_e R_2(R_1 + R_2)}{4U_T[SR_1(R_2 R_C)]^2}$

- $\frac{u_a}{u_e}$: Kleinsignal-Spannungsverstärkung im Leerlauf
- r_e : Kleinsignal-Eingangswiderstand
- r_a : Kleinsignal-Ausgangswiderstand
- k : Klirrfaktor bei Ansteuerung mit harmonischer Eingangsspannung der Amplitude $|u_e|$

Darlingtonschaltung

Wenn die Stromverstärkung B eines einzelnen Transistors nicht groß genug ist, so kann man zwei Transistoren mit den Stromverstärkung B_1 bzw. B_2 in der sogenannten *Darlington-Schaltung* (Darlington-Transistor) verwenden, Abb. 6.30. Die Stromverstärkung eines Darlington-Transistors ergibt sich zu,

$$B \approx B_1 \cdot B_2 .$$

Es werden Werte von bis zu $B \approx 10000$ bei maximalen Kollektorströmen von $(0,1 \dots 10)$ A erreicht. Darlington-Transistoren werden auch in einzelnen Gehäusen hergestellt, zur kompakteren Montage auf Leiterplatten.

Das Ausgangskennlinienfeld eines typischen npn-Darlington-Transistors zeigt Abb. 6.31.

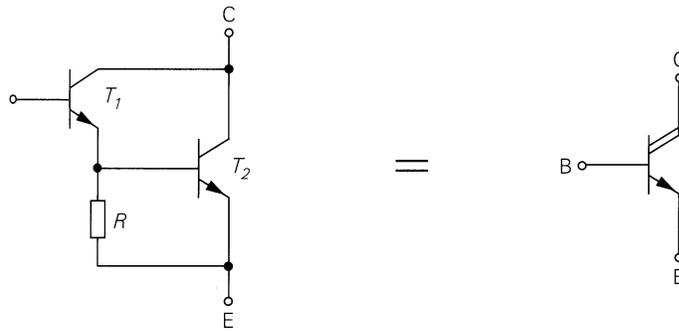


Abb. 6.30: Schaltung und Schaltzeichen eines npn-Darlington-Transistors. Der Widerstand dient der Verbesserung des Schaltverhaltens (nach [16], S. 163)

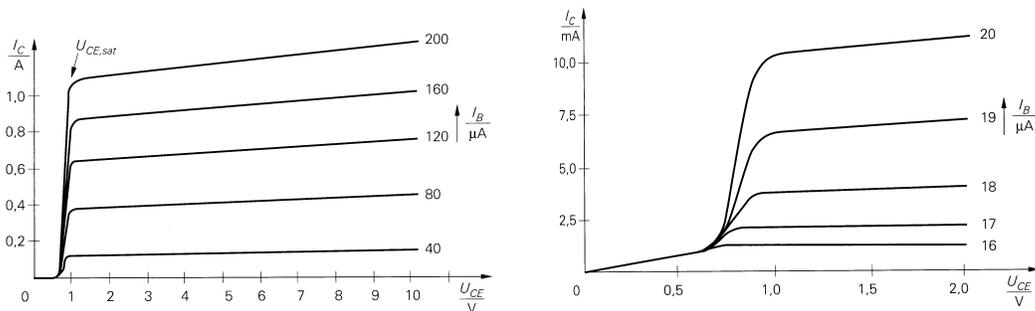


Abb. 6.31: Ausgangskennlinienfeld eines npn-Darlington-Transistors bei großen und kleinen Kollektorströmen (nach [16], S. 164 f.)

6.3 Schaltungen mit Bipolartransistoren

6.3.1 Verstärker mit Stromgegenkopplung

Problemstellung

Die Schaltung in Abb. 6.26 a) verstärkt die Eingangsspannung, entsprechend der Übertragungskennlinie in Abb. 6.26 b). Allerdings hat dieser simple Verstärker eine Vielzahl von praktischen Nachteilen auf die Schaltungsanwendung, die sich aus folgenden Punkten ergeben:

Exemplarstreuung: Transistoren streuen stark in ihren Parametern (Exemplarstreuung), selbst wenn sie aus derselben Fertigungscharge stammen. Dies betrifft u.a. die Stromverstärkung im Schwingungsbereich $B = 100..400$ sowie die Flussspannungen an der BE-Diode, U_{BE} , die einen bestimmten Kollektorstrom, z. B. $I_C = 2\text{ mA}$ hervorrufen. Diese Exemplarstreuungen können $\pm \Delta U_{BE} \approx 50\text{ mV}$ betragen. Bei diesen Schwankungen kann sich der Kollektorstrom entsprechend der Kollektorstrom etwa um den Faktor 10 ändern, entsprechend der Eingangskennlinie in Abb. 6.16 a).

Temperaturabhängigkeit des Kollektorstroms: Transistorparameter sind mehr oder weniger stark von der Temperatur abhängig. Dies betrifft insbesondere die BE-Spannung, welche einen bestimmten Kollektorstrom nach sich ziehen. Bei der Temperaturänderung von T_1 auf T_2 , als um $\Delta T =$

$T_2 - T_1$, ändert sich die BE-Spannung von U_{BE1} auf

$$U_{BE2} \approx U_{BE1} - 2 \frac{\text{mV}}{\text{K}} \cdot \Delta T .$$

Darüber hinaus ändert sich mit der Temperatur der Kollektor-Sättigungssperrestrom von I_{S1} auf

$$I_{S2} \approx I_{S1} \cdot (1 + 0,15 \text{ K}^{-1} \cdot \Delta T) .$$

Aus der Übertragungskennlinie (6.2) folgt somit die Änderung des Kollektorstroms von I_{C1} auf

$$I_{C2} \approx I_{C1} \cdot \frac{I_{S2}}{I_{S1}} \cdot e^{\frac{U_{BE2}}{U_T(T_2)} - \frac{U_{BE1}}{U_T(T_1)}} .$$

Für $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ und $T_2 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ erhält man,

$$\frac{I_{C2}}{I_{C1}} \approx 2,5 \cdot e^{\frac{U_{BE2}}{U_T(T_2)} - \frac{U_{BE1}}{U_T(T_1)}} \approx 2,5 \cdot e^{\frac{U_{BE2} - U_{BE1}}{U_T(T_1 + \Delta T/2)}} \approx 2,5 \cdot e^{-\frac{20 \text{ mV}}{25 \text{ mV}}} \approx 1,12 .$$

Der Kollektorstrom nimmt also bei dieser geringen Temperaturänderung von 10 K schon um mehr als 10% zu.

Temperaturabhängigkeit der Stromverstärkung: Die Stromverstärkung nimmt mit etwa 0,5%/K zu.

Aus diesen Gründen ist ohne geeignete Maßnahmen kein stabiler und nahezu linearer Betrieb des Verstärkers möglich. Man sucht deshalb nach Möglichkeiten, mit denen die Temperaturabhängigkeit deutlich verringert wird sowie bei Austausch des Transistors die Schaltung nicht vollkommen neu dimensioniert werden müsste. Die Probleme werden durch *Gegenkopplung* (Strom- oder Spannungsgegenkopplung) gelöst. Dabei wird ein Teil des Ausgangssignals auf dem Eingang derart zurückgekoppelt, dass die Wirkung des Eingangssignals gemindert wird, also die Übertragungskennlinien flacher werden.

Schaltung und Dimensionierungsbeispiel

Die Schaltung in Abbildung 6.32 a) zeigt einen einstufigen BJT-Verstärker mit Stromgegenkopplung.

Vorgaben:

- Betriebsspannung : $U_b = 12 \text{ V}$
- Eingangsspannungsbereich : $U_{BE} = (0,58 \dots 0,7) \text{ V}$
- Stromverstärkung : $B = 200 \dots 400$

Stromgegenkopplung:

Wird durch Emitterwiderstand R_E realisiert. Je größer R_E , desto größer die Gegenkopplung, aber umso kleiner die Spannungsverstärkung. Kompromiss:

$$U_E = (0,1 \dots 0,2) \cdot U_b \approx 2 \text{ V} .$$

Arbeitspunkt:

$$\begin{aligned} U_{CE,A} &= (U_b - U_E)/2 = 5 \text{ V} \\ &\downarrow \\ U_C &= U_b - U_E - U_{CE,A} = 5 \text{ V} . \end{aligned}$$

Damit ist der Ausgang symmetrisch um den Arbeitspunkt etwa bis zu $\pm 5 \text{ V}$ aussteuerbar.

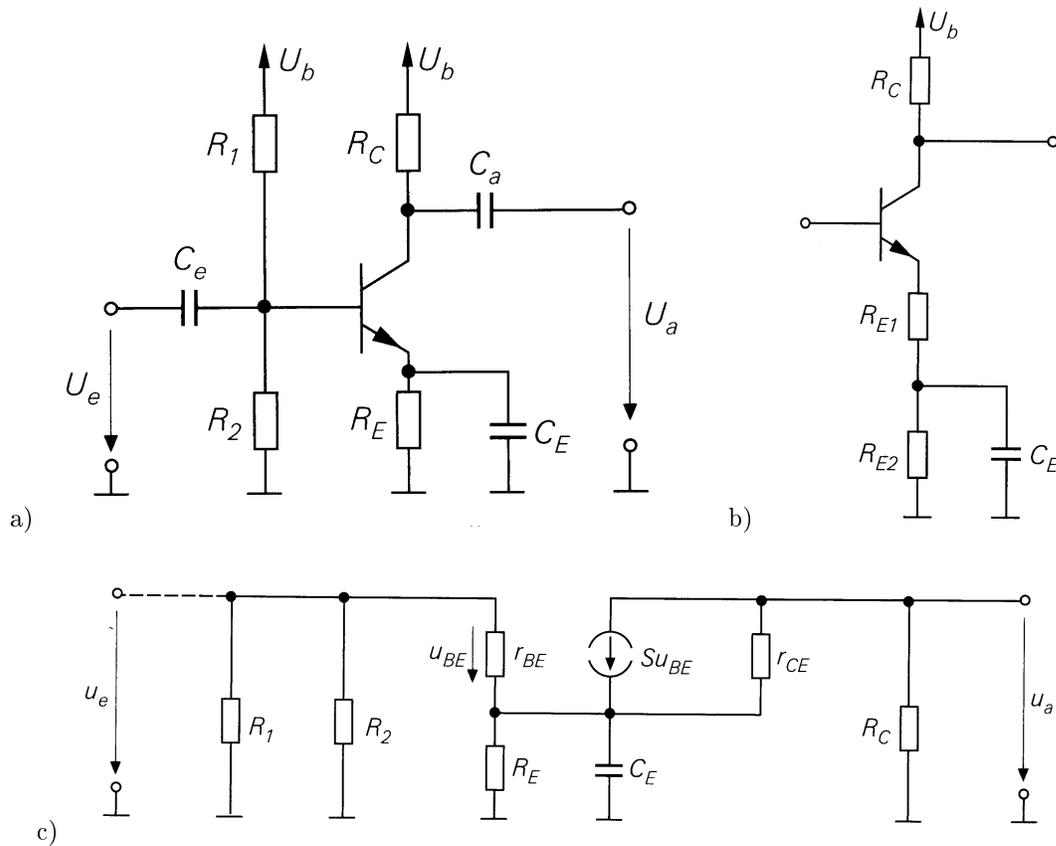


Abb. 6.32: a) Einstufiger Transistorverstärker mit Stromgegenkopplung;
 b) Gleich- und Wechselstromgegenkopplung mit geteiltem Emittterwiderstand $R_E = R_{E1} + R_{E2}$;
 c) Ersatzschaltbild der Schaltung in a) (nach [16], S. 120 f.)

Kollektorstrom am Arbeitspunkt:

Klein genug, um die maximal zulässige Verlustleistung nicht zu überschreiten und die Leistungsaufnahme der Schaltung nicht unnötig hoch werden zu lassen. Vorgabe: $I_{C,A} = 2 \text{ mA}$. Damit gilt

$$I_{C,A} \cdot U_{CE,A} = 2 \text{ mA} \cdot 5 \text{ V} = 10 \text{ mW} .$$

Arbeitswiderstand:

$$R_C = \frac{U_C}{I_{C,A}} = \frac{5 \text{ V}}{2 \text{ mA}} = 2,5 \text{ k}\Omega .$$

Emitterwiderstand:

$$R_E = \frac{U_E}{I_{C,A}} = \frac{2 \text{ V}}{2 \text{ mA}} = 1 \text{ k}\Omega .$$

Basisstrom am Arbeitspunkt:

$$I_{B,A} = \frac{I_{C,A}}{B_{\min}} = \frac{2 \text{ mA}}{200} = 10 \mu\text{ A} .$$

Querstrom im Spannungsteiler an Basis:

Der Querstrom $I_q = I_2$ durch R_2 im Spannungsteiler aus R_2 und R_1 soll groß gegen den Basisstrom $I_{B,A}$, damit die Teilerspannung $U_b \cdot R_2 / (R_2 + R_1)$ bei Belastung mit $I_{B,A}$ nahezu unverändert ist. Der Spannungsteiler darf allerdings auch nicht zu niederohmig sein, damit (i) die Eingangsspannung noch (kapazitiv über C_1) eingekoppelt werden kann und (ii) die Stromaufnahme der gesamten Schaltung nicht unnötig hoch ist. Kompromiss:

$$I_q = 10 \cdot I_{B,A} = 100 \mu\text{A} .$$

Spannungsteiler an Basis:

Die Basisvorspannung $U_2 = R_2 \cdot I_q$ muss groß genug sein, um entsprechend der Spezifikation für die maximale Basis-Emitter-Flussspannung $U_{BE\max} = 0,7\text{V}$ zu erreichen. Hinzu kommt noch die Emitterspannung U_E . Somit gilt,

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_E + U_{BE\max}}{I_q} = \frac{2\text{V} + 0,7\text{V}}{100 \mu\text{A}} = 27\text{k}\Omega . \quad (6.21)$$

Über R_1 fließt $I_1 = I_q + I_B$. Somit gilt

$$R_1 = \frac{U_b - U_2}{I_q + I_B} = \frac{U_b - (U_E + U_{BE\max})}{I_q + I_B} = \frac{12\text{V} - (2 + 0,7)\text{V}}{(100 + 10)\mu\text{A}} \approx 85\text{k}\Omega . \quad (6.22)$$

Damit ist die Schaltung vollständig dimensioniert.

Spannungsverstärkung

Die Eingangsspannung fällt über R_2 ab, $U_e = U_2$. Eine Änderung der Eingangsspannung ΔU_e ruft eine Änderung der Ausgangsspannung ΔU_a hervor. ΔU_e setzt sich zusammen aus der Spannungsänderung über der BE-Diode, ΔU_{BE} , und der Änderung des Spannungsabfalls über R_E , ΔU_E . Die Spannungsverstärkung ist somit gegeben durch

$$A = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_{BE} + \Delta U_E}$$

Bei starker Gegenkopplung, d.h. für $R_C = (1 \dots 10) \cdot R_E$, gilt wegen der steilen Kennlinie der BE-Diode $\Delta U_{BE} \ll \Delta U_E$ und folglich

$$A \approx \frac{\Delta U_a}{\Delta U_E} = - \frac{\Delta I_C \cdot R_C}{\Delta I_E \cdot R_E} = - \frac{\Delta I_C \cdot R_C}{(\Delta I_C + \Delta I_B) \cdot R_E} .$$

Hierbei ist beachten, dass U_a kleiner wird, wenn U_e steigt, und umgekehrt. Folglich ist der Quotient A negativ. Wegen $\Delta I_C \ll \Delta I_B$ kann $\Delta I_C + \Delta I_B \approx \Delta I_C$ genähert werden. Man erhält schließlich,

$$\boxed{A \approx - \frac{R_C}{R_E}} \quad \text{für } R_E > 0, R_C = (1 \dots 10) \cdot R_E. \quad (6.23)$$

Im betrachteten Beispiel beträgt also die Spannungsverstärkung

$$A \approx - \frac{R_C}{R_E} = - \frac{2,5\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega} = 2,5 .$$

Dieser Wert ist nicht besonders hoch, weil die Gegenkopplung recht stark gewählt wurde. Dafür weist der Verstärker aber eine vergleichsweise gute Linearität auf.

Das Driften des Arbeitspunktes infolge von Temperaturänderungen ist meist viel langsamer als die Änderungen des zu verstärkenden Nutzsymbols. Man kann deshalb mit einer Emittterkapazität C_E parallel zum $-$ widerstand R_E die Gegenkopplung für höhere Frequenzen, das Signalband, aufheben. Dann ergibt sich für das Signalband die maximal mögliche Spannungsverstärkung von,

$$A_{\max} = \frac{u_{CE}}{u_{BE}} = -\frac{i_C \cdot R_C}{u_{BE}} = -S \cdot R_C .$$

Für die Steilheit des Transistors gilt

$$S = \frac{i_C}{u_{BE}} = \frac{\beta \cdot i_B}{r_{BE} \cdot i_B} = \frac{\beta}{r_{BE}}$$

Unter Berücksichtigung der Kennlinie (6.2) folgt,

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} = \frac{I_C}{U_T}$$

Somit gilt schließlich für die Wechselspannungsverstärkung,

$$A_{\max} \approx -\frac{I_C}{U_T} \cdot R_C \quad \text{für } C_E = 0.$$

In der betrachteten Schaltung gilt also

$$A_{\max} \approx -\frac{I_C}{U_T} \cdot R_C \approx -\frac{2 \text{ mA}}{26 \text{ mV}} \cdot 2,5 \text{ k}\Omega \approx 190 .$$

Wird der Emittterwiderstand geteilt, Abb. 6.32 b), dann werden auch höhere Signalfrequenzen durch den Widerstand R_{E1} gegengekoppelt. Die Signalspannungsverstärkung beträgt für $R_{E1} = R_{E2} = R_E/2 = 500 \Omega$,

$$A \approx -\frac{R_C}{R_{E1}} = -\frac{2500 \Omega}{500 \Omega} = 5 .$$

Frequenzgang

Ersetzt man in (6.23) R_E durch

$$R_E \parallel (j\omega C_E)^{-1} = \frac{R_E}{1 + j\omega R_E C_E} ,$$

so erhält man einen Ausdruck für die Frequenzabhängigkeit der Spannungsverstärkung,

$$A(j\omega) \approx -\frac{R_C}{R_E} \cdot (1 + j\omega R_E C_E) .$$

Für $\omega \ll \omega_0 \equiv (R_E C_E)^{-1}$ ist die Spannungsverstärkung näherungsweise $-\frac{R_C}{R_E} = \text{const.}$ Für $C_E = 100 \mu\text{F}$ findet man bei $R_E = 1 \text{ k}\Omega$,

$$\omega_0 \equiv 2\pi f_1 = \frac{1}{R_E C_E} = 10 \text{ Hz} \quad \text{und somit } f_1 \approx 1,6 \text{ Hz.}$$

Im Frequenzbereich $0 \dots f_1$ ist also im Wesentlichen die Gleichspannungskopplung wirksam und es gilt der vergleichsweise kleine Spannungsverstärkungsfaktor $-R_C/R_E$.

Für höhere Frequenzen $\omega > \omega_0$ steigt der Betrag der Spannungsverstärkung an. Den genaueren Verlauf erhält man, wenn nun in Gl. (6.19) R_E wiederum durch $R_E \parallel (j\omega C_E)^{-1}$ ersetzt wird,

$$\begin{aligned}
 A(j\omega) &\approx -\frac{S \cdot R_C}{1 + S \cdot (R_E \parallel (j\omega C_E)^{-1})} \\
 &= -\frac{S \cdot R_C \cdot (1 + j\omega R_E C_E)}{1 + S \cdot R_E + j\omega R_E C_E} \\
 &= -\frac{R_C \cdot (1 + j\omega R_E C_E)}{S^{-1} + R_E(1 + j\omega C_E/S)} \\
 &\approx -\frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{1 + j\omega R_E C_E}{1 + j\omega C_E/S} \quad \text{für } R_E \gg S^{-1} \\
 &\approx -\frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{j\omega R_E C_E}{j\omega C_E/S} = -S \cdot R_C \quad \text{für } \omega > \omega_2 \equiv C_E/S .
 \end{aligned}$$

Mit der Steilheit $S = \beta/r_{BE} = 200/2,5 \text{ k}\Omega \approx 0,1 \text{ A/V}$, $C_E = 100 \mu\text{F}$ und $R_C = 2,5 \text{ k}\Omega$ erhält man,

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_2}{2\pi} = f_2 &= \frac{S}{2\pi \cdot C_E} \approx 160 \text{ Hz} \\
 |A(j\omega)|_{\omega > \omega_2} &\approx \xi \cdot R_C = 250 .
 \end{aligned}$$

Die gewünschte hohe Verstärkung der Eingangswechselspannung setzt also erst bei Frequenzen über ca. 160 Hz ein.

Für den weiteren Verlauf der Spannungsverstärkung ist der Frequenzgang der Steilheit $S(\omega) = \beta(\omega)/r_{BE}$, bzw. der Frequenzgang der Stromverstärkung $\beta(\omega)$ entscheidend.

Eingangswiderstand

Der differentielle Eingangswiderstand ist definiert durch

$$r_e \equiv \frac{dU_e}{dI_e} = \frac{u_e}{i_e} .$$

Für Spannungsänderungen u_e am Eingang des Verstärkers liegt R_1 auf der Seite des Betriebsspannungsquelle an Masse, Abb. 6.32 c). Dies gilt, weil die Betriebsspannungsquelle mit einem sehr kleinen Innenwiderstand vorausgesetzt wird. Darüber hinaus ist R_E durch C_E für Wechselspannungen überbrückt. Der differentielle Eingangswiderstand berechnet sich somit nach,

$$r_e = r_{BE} \parallel R_1 \parallel R_2 . \quad (6.24)$$

Damit die Eingangsspannungsquelle U_e durch den Verstärker nicht zu sehr belastet wird, wünscht man sich r_{BE} in möglichst groß. Folglich darf der Basisspannungsteiler aus R_1 und R_2 nicht zu niederohmig gewählt werden.

Aus der Eingangskennlinie Gl. (6.3) bzw. Abb. 6.16 b) folgt

$$r_{BE} = \left(\frac{\partial I_B}{\partial U_{BE}} \right)^{-1} \approx \frac{U_T}{I_B} \approx \frac{25 \text{ mV}}{10 \mu\text{A}} = 2,5 \text{ k}\Omega .$$

Für den differentielle Eingangswiderstand (6.24) folgt mit der oben erfolgten Dimensionierung von R_1 und R_2 , Gln. (6.22, 6.21),

$$r_e = (2,5^{-1} + 27^{-1} + 85^{-1})^{-1} \cdot \text{k}\Omega \approx 2,2 \text{ k}\Omega .$$

Das Beispiel zeigt, dass der differentielle Eingangswiderstand des Verstärkers wesentlich durch den differentiellen Basis-Emitterwiderstand bestimmt wird, und dieser ist recht klein, was einen wesentlichen Nachteil dieser Schaltung ausmacht.

Ausgangswiderstand

Wird am Ausgang der Strom ΔI_a entnommen, so sinkt die Ausgangsspannung um ΔU_a . Der entsprechende differentielle Ausgangswiderstand ist

$$r_a = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_a} .$$

Bei Belastung des Ausgangs mit dem Lastwiderstand R_L bilden r_a und R_L einen Spannungsteiler, die Ausgangsspannung wird also um den Faktor $R_L/(r_a + R_L)$ kleiner.

In ARBEIT –In ARBEIT –In ARBEIT –In ARBEIT –In ARBEIT –In ARBEIT –

6.4 Feldeffekttransistor

Ein Feldeffekttransistor (FET; engl.: *field effect transistor*) hat ebenso wie ein Bipolortransistor drei Anschlüsse. Sie heißen hier

Gate (G): dies ist der Steuereingang; entspricht der Basis beim BJT

Source (S): entspricht dem Emitter beim BJT

Drain (D) : entspricht dem Kollektor beim BJT

Bei komplexeren Halbleiterbauelementen, die aus mehreren FETs und möglicherweise anderen Bauelementen bestehen, die auf einem gemeinsamen Halbleiterträger, dem sogenannten *Substrat* (S), aufgebaut sind, wird oftmals auch ein elektrischer Anschluss für das Substrat herausgeführt. Um bei FET-Schaltungen Verwechslungen mit der Source zu vermeiden, wird hier der Halbleiterträger *Bulk* (B) genannt.⁸⁾ Bei Einzel-FETs (in einem Einzelgehäuse) wird das Substrat (Bulk) oftmals intern zusammen mit der Source S verbunden und als gemeinsamer Anschluss (PIN) nach außen geführt.

Wesentliches Charakteristikum eines FET ist, dass mit der zwischen Gate und Source anliegenden Steuerungsspannung U_{GS} der elektrische Widerstand R_{DS} zwischen Drain und Source gesteuert wird. Dabei fließt in das Gate ein extrem kleiner Strom, so dass praktisch von einer leistungsfreien Ansteuerung ausgegangen werden kann. Eingangstufen von elektronischen Schaltungen mit FET können somit auch mit hochohmigen Signalquellen angesteuert werden, denn die Signalquelle wird quasi nicht belastet. Dies ändert sich allerdings bei Wechselsignalen, weil hier die parasitären Eingangskapazitäten des FET zur Geltung kommen. Generell bleibt aber der Vorteil der nahezu leistungsfreien Ansteuerung weitgehend bestehen.

6.4.1 Funktionsweise und Typen

MOSFET:

Die Abkürzung steht für *metal oxid semiconductor FET*. Sie werden auch *insulated gate FET* und mit IGFET abgekürzt (deutsch: FET mit isoliertem Tor). Das Gate ist hier durch eine stark isolierende Oxid-Schicht (SiO_2) vom Kanal getrennt, Abb. 6.33. Somit kann kein Strom in das Gate fließen, und

⁸⁾Bei Schaltungen mit BJTs wird der Halbleiterträger jedoch *Substrat* (S) genannt.

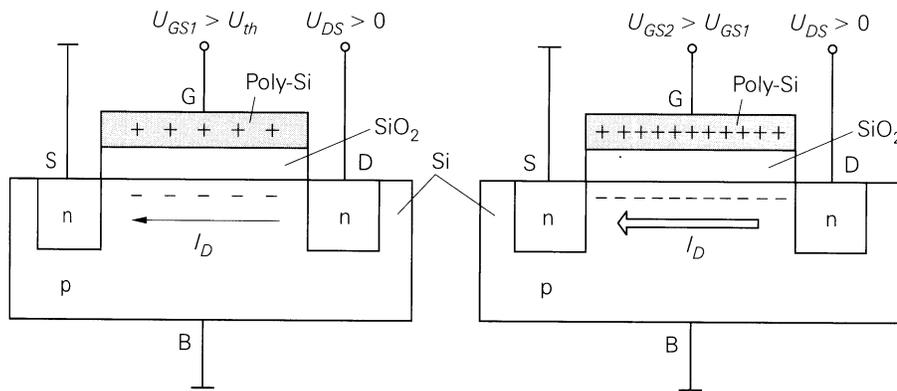


Abb. 6.33: Aufbau eines n-Kanal MOSFET (nach [16], S. 171)

dies gilt auch bei beliebiger Polarität der Gatespannung. Auf der dem Gate abgewandten Seite der Oxid-Schicht befindet sich die sogenannte *Inversionsschicht*. Sie bildet einen mehr oder weniger gut leitenden n-Kanal zwischen Source und Drain, eingebettet im p-Substrat. Die Steuerspannung beeinflusst die Ladungsträgerdichte im Kanal und somit den DS-Widerstand.

Je nach Dotierung erhält man *selbstleitende* (engl.: *depletion*) oder *selbsterregende* (engl.: *enhancement*) MOSFETs. Das bedeutet Folgendes: Wird an die DS-Strecke eine Spannung gelegt, $U_{DS} > 0$, und gilt $U_{GS} = 0$, so fließt beim selbstleitenden MOSFET ein Drain- bzw. Source-Strom, $I_D = I_S > 0$. Es gibt hier eine negative Schwellenspannung, $U_{th} < 0$, so dass die DS-Strecke niederohmig ist für $U_{GS} > U_{th}$.⁹⁾ Hingegen fließt beim selbsterregenden MOSFET kein Strom, $I_D = I_S \approx 0$, wenn $U_{GS} = 0$ gilt. Hier fließt ein Strom erst, wenn U_{GS} die positive Schwellenspannung $U_{th} > 0$ übertrifft.

Der Strom I_D wird beim selbstleitenden MOSFET größer, wenn das Gate mit höheren Spannungen angesteuert wird. Genauer wird dies mit den weiter unten angegebenen Kennlinie beschrieben.

Sperrschicht-FET:

Dies FETs werden mit JFET abgekürzt was für *junction FET* steht. Eine andere Bezeichnung ist *non insulated gate FET* (NIGFET) (deutsch: FET mit nicht isoliertem Tor). Den schematischen Aufbau zeigt Abb. 6.34. Hier beeinflusst die Steuerspannung am Gate die Sperrschichtweite eines in Sperrichtung betriebenen pn-Übergangs zwischen Gate (im Bild p-Schicht) und Source bzw. Drain (im Bild n-Schicht). Die beeinflusst letztlich den DS-Widerstand. n-Kanal JFETs werden in der Regel mit negativen Spannungen am Gate angesteuert. Andernfalls würde der pn-Übergang leitend werden (bei Überschreitung der Schleusenspannung), so dass der Vorteil der leistungslosen Ansteuerung verloren ginge. JFETs sind immer selbstleitend.

MESFET:

Diese Abkürzung steht für *metal semiconductor FET*. Hierbei handelt es sich um einen JFET, bei dem anstelle des pn- ein Metall-Halbleiter-Übergang (Schottky-Übergang) verwendet wird.

⁹⁾Der Index in U_{th} leitet sich aus engl. *threshold voltage* ab.

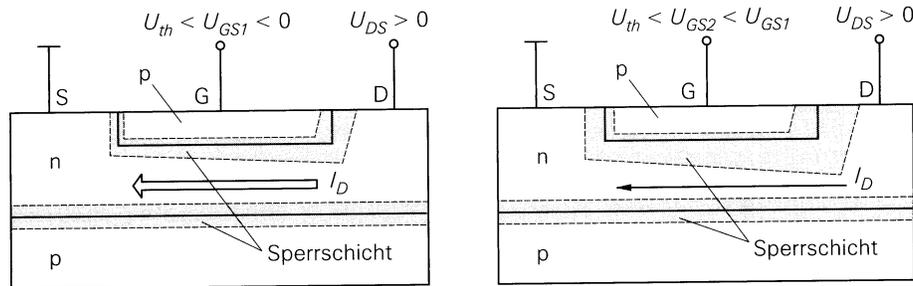


Abb. 6.34: Aufbau eines n-Kanal-Sperrschicht-FETs (nach [16], S. 172)

Überblick:

MOS-, J- und MES-FETs sind bezüglich der beiden Anschlüssen Source und Drain nahezu symmetrisch. Unterschiede ergeben sich jedoch bei Einzeltransistoren aus der Zuordnung zwischen Source und Substrat. Darüber hinaus können andere Asymmetrien auftreten, weshalb Source und Drain beim Einbau in Schaltungen nicht vertauscht werden sollten.

Alle FETs gibt es auch in p-Kanal Ausführung. Einen Überblick gibt Abb. 6.35.

6.4.2 Kennlinien

Die folgenden Kennlinien beziehen sich auf einen selbstsperrenden n-Kanal MOSFET. Für andere FETs sind die Kennlinien ähnlich, wie in Abb. 6.35 schematisch dargestellt ist.

Ausgangskennlinienfeld:

In Abbildung 6.36 ist das Ausgangskennlinienfeld eines selbstsperrenden n-Kanal MOSFET dargestellt. Ein D- bzw. S-Strom fließt erst, wenn die Gate-Source-Spannung U_{GS} die Schwellenspannung U_{th} übersteigt. Dabei sind zwei Bereiche für die DS-Spannung U_{DS} zu unterscheiden:

$U_{DS} < U_{DS,ab}$: Dies ist der sogenannte *ohmsche Bereich* (engl.: *ohmic region*), weil hier die Kennlinien nahezu linear verlaufen und treffen sich bei $U_{DS} = 0$ im Koordinatenursprung. Die DS-Strecke verhält somit wie ein ohmscher Widerstand. Dessen Größe $\Delta U_{DS}/\Delta I_D$ wird durch die Gatespannung U_{GS} gesteuert.

$U_{DS} > U_{DS,ab}$ — **Abschnürbereich** (engl. *saturation area*):

Hier verlaufen die Kennlinien nahezu horizontal. Der D-Strom hängt also nicht mehr von der DS-Spannung ab und wird wesentlich nur noch von der GS-Spannung gesteuert.

Die Abschnürung kommt dadurch zustande, dass die stark positive D-Spannung die positiven Ladungen der Gateelektrode verdrängt und somit der Kanal auf der Drain-Seite an Ladungsträgern verarmt, Abb. 6.37.

Keine Abschnürung tritt auf, solange U_{DS} klein genug ist, damit der n-Kanal auch im Bereich vom Drain leitend ist, also für $U_{DS} + U_{th} < U_{GS}$. Andererseits wird für $U_{DS} + U_{th} > U_{GS}$ der Kanal abgeschnürt, also für

$$U_{DS} > U_{GS} - U_{th} \equiv U_{DS,ab} .$$

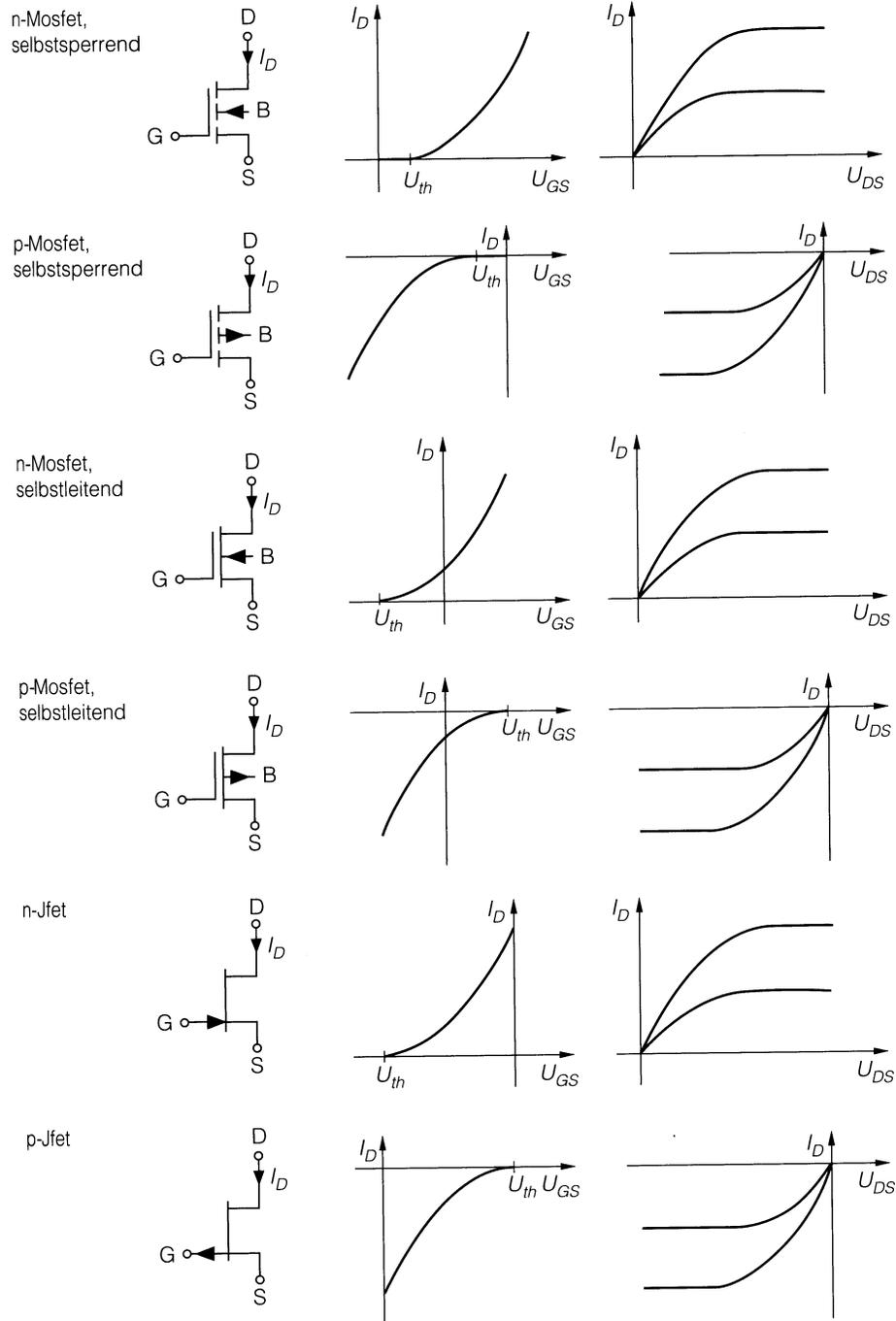


Abb. 6.35: Typen von Feldeffekttransistor (nach [16], S. 173)

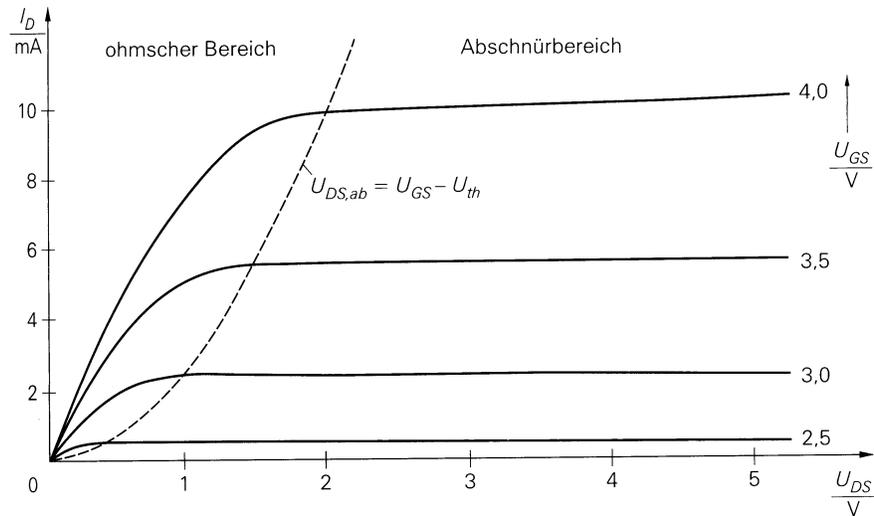


Abb. 6.36: Ausgangskennlinienfeld für einen selbstsperrenden n-Kanal MOSFET (nach [16], S. 175)

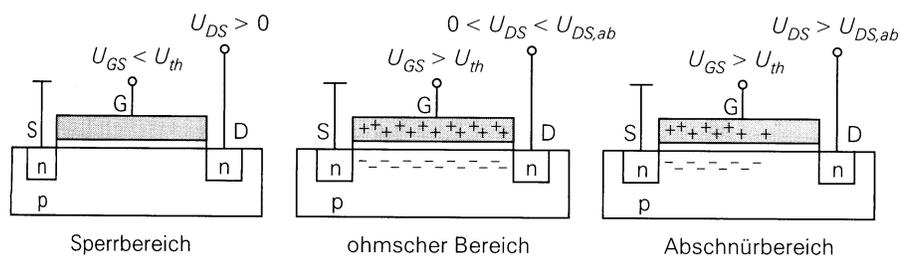


Abb. 6.37: Verteilung der Ladungsträger im n-Kanal eines selbstsperrenden MOSFET. Der MOSFET sperrt, solange die Gate-Source-Spannung U_{GS} die Schwellenspannung U_{th} unterschreitet. Im ohmschen Bereich überschreitet U_{GS} die Schwellenspannung. Im Abschnürbereich ist die Drain-Source-Spannung so hoch, dass der Kanal D-seitig an freien Ladungsträgern verarmt (nach [16], S. 175)

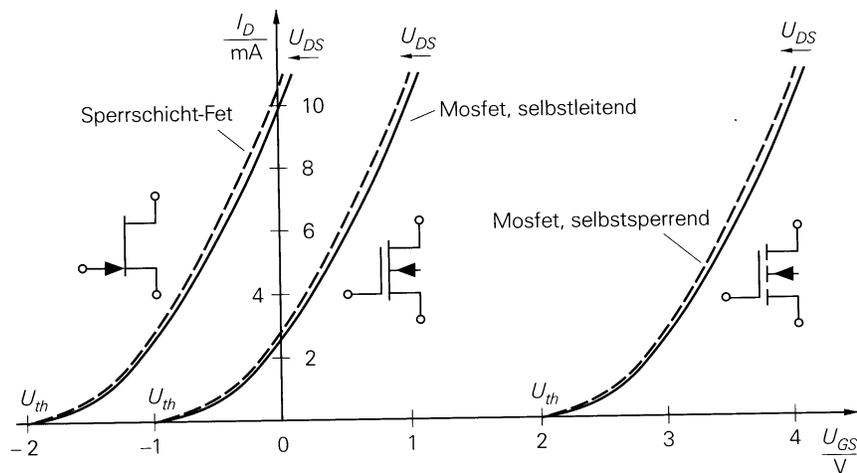


Abb. 6.38: Übertragungskennlinien verschiedener n-Kanal FETs. Parameter ist die Drain-Source-Spannung U_{DS} , die hier im Abschnürbereich variiert wird (gestrichelte Linie) (nach [16], S. 176)

Übertragungskennlinienfeld:

Übertragungskennlinien verschiedener n-Kanal FETs zeigt Abb. 6.38. Im Abschnürbereich ist der Drain-Strom I_D im Wesentlichen nur noch von der Steuerspannung U_{GS} abhängig, wohingegen die Drain-Source-Spannung U_{DS} nur geringen Einfluss hat.

Eingangskennlinienfeld:

Eingangskennlinien von n-Kanal FETs zeigt Abb. 6.39. Sie zeigen den Gate-Strom I_G als Funktion der Gate-Source-Spannung U_{GS} . Wegen des hohen Eingangswiderstands ist der Gate-Strom in weiten Bereichen verschwindend klein.

Es besteht die Gefahr, dass sich bei der Lagerung bzw. dem Transport von FETs das Gate elektrostatisch auflädt, was leicht zur Zerstörung führt, wenn etwa beim MOSFET die Isolationsschicht bei Spannung $|U_{GS}| \gtrsim 40 \text{ V}$ durchschlagen wird. Zum Hochspannungsschutz dienen in der Praxis Z-Dioden, wie in der Abbildung (Mitte) zu sehen ist. Diese sind oftmals in dem Einzel-FET-Gehäuse integriert. Man erhält dann über der GS-Strecke die Kennlinie der Z-Diode.

Bei Sperrschicht-n-Kanal-FETs (Abb. 6.39, unten) leitet die Gate-Drain/Source-Diode (p=Gate, n=Drain/Source) sobald U_{GS} die Spannung von ca. 0,6 V überschreitet und einen Gate-Strom entsprechend der Diodenkennlinie hervorruft. Im Sperrbereich $U_{GS} < 0$ fließt erst dann ein Strom wenn ein Durchbruch des pn-Übergangs auftritt, im Bild bei $U_{GS} = -50 \text{ V}$.

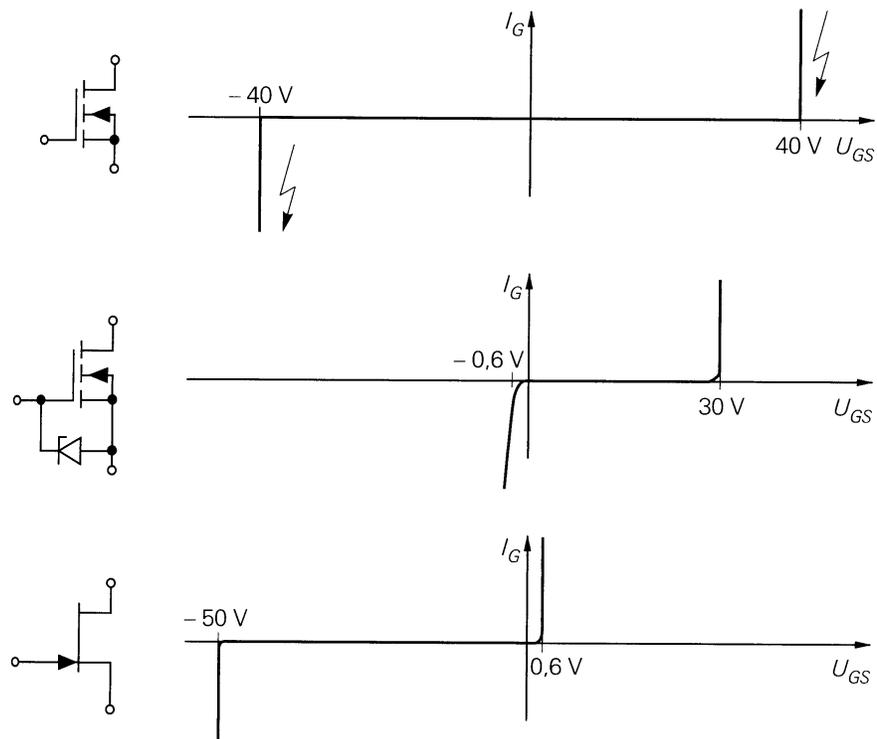


Abb. 6.39: Eingangskennlinien von n-Kanal FETs. oben: einfacher MOSFET; Mitte: MOSFET mit Zener-Schutzdiode; unten: Sperschicht-FET (nach [16], S. 177)

Kapitel 7

Operationsverstärker

Operationsverstärker (OPV) dienen der Spannungs- oder Leistungsverstärkung. Durch ihre vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten und niedrigen Preise sind sie aus der heutigen analogen Schaltungstechnik nicht mehr wegzudenken. Zumeist sind sie integriert aufgebaut, so dass der innere Aufbau fest vorgegeben ist. Allerdings kann durch die frei wählbare äußere Beschaltung eine Vielzahl verschiedener Schaltungen realisiert werden, so z. B. zur Addition von Spannungssignalen, zu deren Differentiation oder auch Integration. Die Ausführung solcher *Operationen* in Analogrechnern war eines der ersten Einsatzgebiete dieser Verstärker und hat ihnen den Namen gegeben. Operationsverstärker sind in der Eingangsstufe als Differenzverstärker ausgelegt. Dem Anwendungsgebiet entsprechend kann zwischen einer Vielzahl von Typen verschiedener Hersteller ausgewählt werden. (Generelle Literaturempfehlungen: [16, 7, 3, 5].)

7.1 Eigenschaften von Operationsverstärkern

7.1.1 Idealer und realer Operationsverstärker

Abbildung 7.1 zeigt das Schaltsymbol eines OPV.

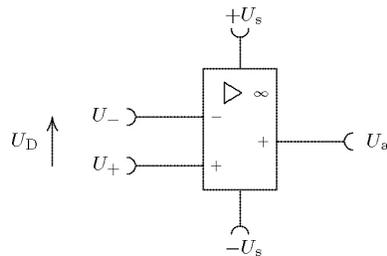


Abb. 7.1: Schaltsymbol eines Operationsverstärker (Darstellungen in Dreiecksform sind auch üblich.)

Alle Spannungen beziehen sich auf das nicht eingezeichnete Massepotential. Der OPV hat zwei Eingänge, den *invertieren* und den *nichtinvertierenden* Eingang „-“ bzw. „+“. Die Ausgangsspannung U_a hängt nur von der Differenz-Eingangsspannung

$$U_D \equiv U_+ - U_- \quad (7.1)$$

ab. Als Speisespannung wird zumeist ein positives und negatives Potential $+U_s$ bzw. $-U_s$ verwandt¹⁾. Zur besseren Übersicht werden die Speisespannungen in der Regel nicht eingezeichnet. Das Zeichen ∞ kennzeichnet den *idealen* OPV, der die folgenden fiktiven Eigenschaften hat:

1. Die *Differenzverstärkung*²⁾

$$A_D \equiv \frac{U_a}{U_D} = \frac{U_a}{U_+ - U_-} \quad (7.2)$$

ist frequenzunabhängig und unendlich groß.

2. Die Eingangswiderstände sind unendlich.
3. Der Ausgangswiderstand ist null.

Die erste Eigenschaft bedeutet u.a., dass der ideale OPV eine unendliche Bandbreite hat. Die Unendlichkeit der Verstärkung hat zur Folge, dass die Funktionsweise eines idealen OPV allein durch seine äußere Beschaltung (Rückkopplung) bestimmt werden kann, was weiter unten noch genauer ausgeführt wird. Beim realen OPV gilt immerhin noch $A_D = 10^4 \dots 10^7$, vorausgesetzt, der OPV wird nicht übersteuert³⁾ und die Frequenz des Eingangssignals ist nicht zu groß ($\lesssim 50\text{Hz}$).

Die zweite Eigenschaft bedeutet, dass der ideale OPV leistungsfrei angesteuert werden kann und somit die ansteuernde Spannungsquelle nicht belastet wird. Die Verhältnisse am Ein- und Ausgang eines realen OPV werden durch das Ersatzschaltbild in Abb. 7.2 beschrieben.

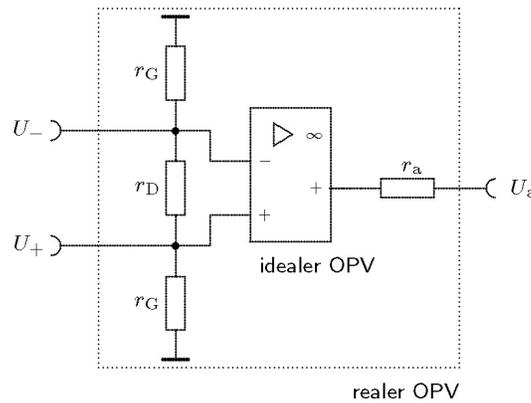


Abb. 7.2: Ersatzschaltbild für die Ein- und Ausgangsstufe eines realen Operationsverstärkers, mit den differentiellen Gleichtakt- und Differenz-Eingangswiderständen r_G bzw. r_D sowie dem differentiellen Ausgangswiderstand r_a

Der Differenzeingangswiderstand

$$r_D \equiv \frac{dU_D}{dI_D}$$

liegt bei $10^6 \Omega$ oder $10^{12} \Omega$, je nachdem, ob in der Eingangsstufe Bipolar- oder Feldeffekttransistoren verwendet werden.⁴⁾ Die Gleichakteingangswiderstände

$$r_G \equiv \frac{dU_{\pm}}{dI_{\pm}}$$

¹⁾Typische Werte sind $U_s = 10 \dots 15 \text{ V}$.

²⁾Sie wird auch *Leerlaufverstärkung (open loop gain)* genannt.

³⁾Die Aussteuerbarkeit der Ausgangsspannung U_a liegt im Bereich von $(-U_s + 2V) \dots (+U_s - 2V)$.

⁴⁾Der im Elektronikpraktikum verwendete OPV vom Typ LF356N hat Feldeffekttransistoren (JFET) in der Eingangsstufe.

liegen bei $10^9 \Omega$ bzw. $10^{15} \Omega$.

Schließlich bedeutet die dritte Eigenschaft, dass der ideale OPV am Ausgang niederohmig belastet werden kann, ohne dass U_a „zusammenbricht“. Ein realer OPV hat einen differentiellen Ausgangswiderstand

$$r_a \equiv \frac{dU_a}{dI_a}$$

von $30 \dots 1000 \Omega$. Belastungsänderungen (Stromänderungen) ΔI_a am Ausgang gehen also mit unerwünschten Spannungsänderungen $\Delta U_a \approx r_a \cdot \Delta I_a$ einher.

Für viele Anwendungen sind die Unterschiede zwischen einem realen und idealen OPV in erster Näherung vernachlässigbar, so dass bei der Dimensionierung einer Schaltung zunächst vom idealen OPV ausgegangen werden kann. Verschiedene Kenngrößen charakterisieren die Abweichungen eines realen OPV vom idealen, einige werden im Folgenden erläutert. Die genannten Eigenschaften sowie einige im Folgenden erläuterte fasst Tab. 7.1 zusammen.

Tab. 7.1: Eigenschaften idealer und realer Operationsverstärker

	ideal	real
Differenzverstärkung A_D :	∞	$10^4 \dots 10^7$
differentieller Differenzeingangswiderstand r_D :	∞	$(10^4 \dots 10^{12}) \Omega$
differentieller Gleichakteingangswiderstand r_G :	∞	$(10^7 \dots 10^{12}) \Omega$
differentieller Ausgangswiderstand r_a :	0	$(15 \dots 1000) \Omega$
Gleichtaktunterdrückung G :	∞	$10^4 \dots 10^5$
Gleichtaktverstärkung A_G :	0	A_D/G
Eingangsfehlspannung (Offsetspannung) U_O :	0	$< 100 \mu\text{V/K}$
Eingangsfehlstrom (Offsetstrom) I_O :	0	$(10^{-9} \dots 10^{-6}) \text{A}$
Transitfrequenz f_T :	∞	$(10^5 \dots 10^9) \text{Hz}$
Anstiegsgeschwindigkeit S_r :	∞	$(10^0 \dots 5 \cdot 10^3) \text{V}/\mu\text{s}$

7.1.2 Gleichtaktunterdrückung

Legt man an die beiden Eingänge eines idealen OPV die gleiche Spannung U_G , so gilt für die Spannungsdifferenz $U_D = 0$ und nach (7.2) verschwindet dann auch die Ausgangsspannung U_a , unabhängig davon, wie groß U_G ist. Beim realen OPV ändert sich jedoch U_a in Abhängigkeit von der *Gleichtakteingangsspannung* U_G , was durch die *Gleichtaktverstärkung*

$$A_G \equiv \frac{\Delta U_a}{\Delta U_G} \quad (7.3)$$

beschrieben wird. Im Idealfall wäre $A_G = 0$.

Mit der *Gleichtaktunterdrückung*

$$G \equiv \frac{A_D}{A_G} \quad (7.4)$$

wird die Gleichtaktverstärkung in Relation zur Differenzverstärkung (7.2) gesetzt. Im Idealfall wäre $G = \infty$. Typische Werte für reale OPV sind $G = 10^4 \dots 10^5$.

7.1.3 Eingangsfehlspeisung

Wie bereits erwähnt, verschwindet beim realen OPV mit der Differenzeingangsspeisung U_D im Allgemeinen nicht auch die Speisung U_a am unbelasteten Ausgang, was eine Abweichung vom idealisierten Zusammenhang (7.2) bedeutet. Realistischer ist hingegen der Ansatz

$$U_a = A_D(U_D - U_O),$$

wobei U_O die sogenannte *Eingangsfehlspeisung* oder auch *Eingangs-Offset-Speisung* (engl.: *input offset voltage*) bezeichnet. Für $U_D = U_O$ verschwindet die Ausgangsspeisung. U_O beträgt in der Regel einige mV und kann bei vielen Anwendungen vernachlässigt werden.⁵⁾ Im Allgemeinen ändert sich die Eingangsfehlspeisung in Abhängigkeit von der Temperatur, $(3 \dots 10)\mu\text{V/K}$, der Betriebspeisung, $(10 \dots 100)\mu\text{V/V}$, sowie der Zeit, einige $\mu\text{V/Monat}$. Bei OPV mit FET-Eingängen ist die Eingangsfehlspeisung im Vergleich zu solchen mit bipolarer Eingangsstufe relativ instabil, z. B. bis zu $100\mu\text{V/K}$.

7.1.4 Eingangsruhe- und -fehlspeisung

Unter den *Eingangsruhestromen* I_{b-} und I_{b+} versteht man die Gleichkomponente der Ströme in den invertierenden bzw. nichtinvertierenden Eingang des OPV, die bei einer verschwindenden Gleichakteingangsspeisung am unbelasteten Ausgang die Speisung null erzeugen. Beim idealen OPV sind diese Fehlerströme null, während sie beim realen OPV zwar von null verschieden, aber nahezu gleich groß sind. Dennoch führt man zum einen den Mittelwert

$$I_b = \frac{I_{b-} + I_{b+}}{2} \quad (7.5)$$

ein, der auch schlechthin *Eingangsruhestrom* (*average bias current*) heißt, und zum anderen die Differenz

$$I_O = |I_{b-} - I_{b+}|,$$

welche *Eingangsfehlspeisung* oder auch *Eingangs-Offset-Strom* (*input offset current*) heißt. Typische Werte sind $I_O = (10^{-9} \dots 10^{-6})\text{A}$. Einige OPV mit FET-Eingängen erreichen sogar um 10^{-11}A . Generell macht I_O etwa 5...10 % vom Eingangsruhestrom I_b aus.

7.1.5 Frequenzgang

Beim realen OPV ist die Differenzverstärkung (7.2) nicht nur endlich, vielmehr hängt sie auch von der Frequenz ab. Das betrifft sowohl den Betrag der Differenzverstärkung wie auch die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangsspeisung U_D bzw. U_a . Ist das Eingangssignal z. B. harmonisch mit der Kreisfrequenz ω , also $U_D = \hat{U}_D \cos \omega t$, so ergibt sich die Ausgangsspeisung

$$U_a = |A_D| \hat{U}_D \cos(\omega t + \varphi).$$

Hierin sind $|A_D|(\omega)$ der Betrag der Differenzverstärkung und $\varphi(\omega)$ die Phasenverschiebung zwischen U_D und U_a . Beide hängen von der Kreisfrequenz ω ab. In komplexer Schreibweise kann man hierfür auch

$$U_a = A_D U_D$$

⁵⁾Der OPV LF356N hat zwei Anschlüsse zur Offsetkompensation (Nullabgleich, s. Datenblatt).

schreiben, mit

$$\begin{aligned} A_D &= |A_D| e^{j\varphi} \quad \text{und} \\ U_D &= \hat{U}_D e^{j\omega t} . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ein OPV kann in guter Näherung als Tiefpass erster Ordnung angesehen werden, so dass

$$A_D(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} \quad (7.7)$$

angesetzt wird. Überführt man diesen Ausdruck in die eulersche Schreibweise (7.6), so liefert der Koeffizientenvergleich den Amplitudenfrequenzgang

$$|A_D|(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \quad (7.8)$$

sowie den Phasenfrequenzgang

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_g} . \quad (7.9)$$

Hierbei sind $A_0 \equiv |A_D|(0)$ die Differenzverstärkung bei niedrigen Frequenzen (streng genommen bei Gleichspannung) und $f_g \equiv \omega_g/(2\pi)$ die *Grenzfrequenz*, bei welcher der Betrag der Verstärkung auf das $(1/\sqrt{2} \approx 0,71)$ -fache von A_0 abgesunken ist⁶⁾. Die Phasenverschiebung ist hier $\varphi(\omega_g) = -45^\circ$.

Jenseits der Grenzfrequenz fällt $|A_D|$ mit nahezu -20 dB pro Frequenzdekade, denn für $\omega \gg \omega_g$ geht (7.8) über in $|A_D|(\omega) \approx A_0 \omega_g/\omega$, so dass

$$20 [\lg|A_D|(10\omega) - \lg|A_D|(\omega)] \approx -20 \text{ dB}$$

gilt. Die vollständigen Frequenzgänge (7.8) und (7.9) sind in Abb. 7.3 dargestellt. Die Frequenz

$$f_t \equiv \sqrt{A_0^2 - 1} f_g \approx A_0 f_g , \quad (7.10)$$

bei der $|A_D|$ auf 1 (0 dB) abgesunken ist, heisst *Transitfrequenz*⁷⁾. Wegen der Beziehung (7.10) wird f_t auch *Verstärkungs-Bandbreite-Produkt* genannt (engl.: *gain-bandwidth-product*).

Wenn ein Teil der Ausgangsspannung des OPV auf den Eingang mit ohmschen Widerständen gegengekoppelt wird, so muss sichergestellt werden, dass die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangsspannung im Verstärkungsbereich, d.h. bis zur Transitfrequenz, nicht kleiner als ca. -90° wird. Bei einer Phasenverschiebung von etwa -180° würde sich die gewünschte Gegenkopplung in eine Mitkopplung verkehren und die Schaltung zu Eigenschwingungen neigen. Bei einigen OPV-Typen sind deshalb Anschlüsse zur Frequenzkompensation herausgeführt, die entsprechend den Herstellerangaben (meist mit RC-Gliedern) zu beschalten sind⁸⁾. Durch die Kompensation wird erreicht, dass sich der OPV zumindest bis zur Transitfrequenz wie ein Tiefpass erster Ordnung (7.7) verhält, nicht aber wie einer höherer Ordnung, bei dem die Verschiebung auch kleiner als -90° werden kann.

⁶⁾In Einheiten von Dezibel (dB) erhält man bei der Grenzfrequenz einen Verstärkungsabfall um

$$20 \lg \frac{|A_D|(\omega_g)}{A_0} = -20 \lg \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB} .$$

In der Praxis gilt $f_g = 10 \dots 100$ Hz, abhängig vom OPV-Typ.

⁷⁾Für reale OPV gilt typenabhängig $f_t = 0,5 \dots 1000$ MHz.

⁸⁾Beim im Praktikum verwendeten OPV LF356N ist die Frequenzkompensation bereits intern realisiert.

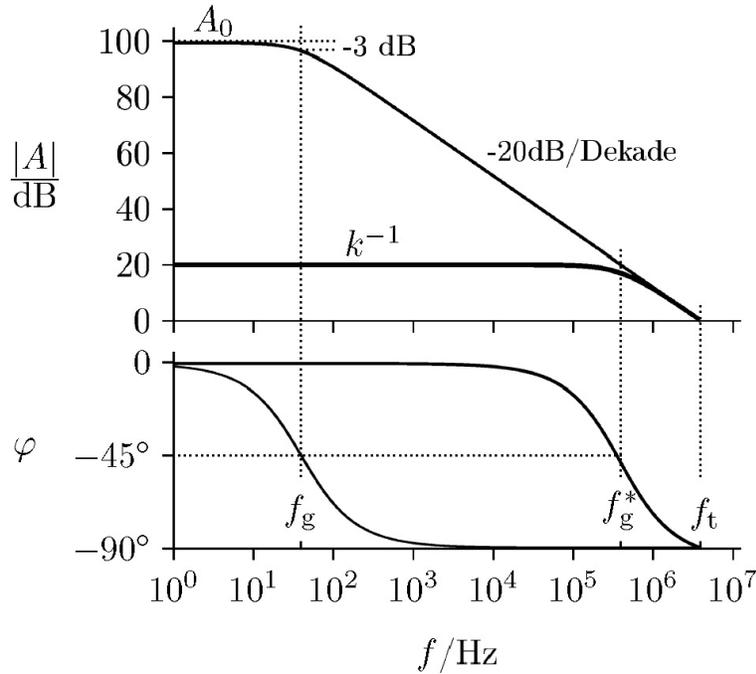


Abb. 7.3: Typisches Bode-Diagramm der Differenzverstärkung A eines frequenzkompensierten Operationsverstärkers (dünne Kurven ohne Gegenkopplung nach Gl. (7.7), dicke Kurven mit Gegenkopplungsfaktor nach Gl. (7.14) bei $k^{-1} = 10$, $A_0 = 10^5$, $f_g = 40\text{Hz}$, $f_t = 4\text{MHz}$)

7.1.6 Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsspannung

Springt die Differenz-Eingangsspannung U_D von null auf einen positiven (oder negativen) Wert, so folgt die Ausgangsspannung U_a dieser plötzlichen Spannungsänderung nur mit einer gewissen Verzögerung, welche durch eine *mittlere Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsspannung* beschrieben wird (auch *Flankensteilheit* oder *slew rate* genannt),

$$S_r \equiv \max_t \left\{ \left| \frac{dU_a(t)}{dt} \right| \right\} \tag{7.11}$$

bei

$$|U_D| = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ \text{const.} > 0 & : t > 0 \end{cases}$$

Bei Universal-OPV-Typen mit FET-Eingängen liegt die Anstiegsgeschwindigkeit bei $10 \text{ V}/\mu\text{s}$ und bei bipolar aufgebauten um etwa eine Größenordnung schlechter (ca. $1 \text{ V}/\mu\text{s}$).

Die Anstiegsgeschwindigkeit bestimmt wesentlich die Aussteuerbarkeit der Ausgangsspannung. Nehmen wir beispielsweise an, der OPV soll Sinus-Schwingungen verstärken, so dass am Ausgang der Spannungsverlauf $U_a(t) = \hat{U}_a \sin \omega t$ erwartet wird. Die größte Steilheit hat $U_a(t)$ bei den Nulldurchgängen mit $\omega \hat{U}_a$. Sollen die Signalverzerrungen vernachlässigbar sein, so darf $\omega \hat{U}_a$ nicht größer als die Flankensteilheit S_r des OPV sein. Daraus folgt für die Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ die Relation

$$f \leq \frac{S_r}{2\pi \hat{U}_a} \equiv f_{GS} \tag{7.12}$$

Für große Amplituden, also für $\hat{U}_a \lesssim U_s = 10 \dots 15\text{V}$, heisst f_{GS} *Großsignalbandbreite*. Wird der Ausgang z. B. bis zur Amplitude $\hat{U}_a = 10\text{V}$ angesteuert, so ergibt sich für $S_r = 12\text{ V}/\mu\text{s}$ die maximal zulässige Frequenz von $(0,6/\pi)\text{MHz} \approx 200\text{ kHz}$. f_{GS} ist i.a. kleiner als die Kleinsignalbandbreite (7.15), die man für $\hat{U}_a \ll U_s$ aus anderen Überlegungen erhält, was im folgenden Abschnitt aufzeigt wird.

7.1.7 Elektrometer–Gegenkopplung

Der Wert von f_g bestimmt die *Bandbreite* des OPV. Wie aus Abb. 7.3 hervorgeht, ist sie recht gering. Die Situation ändert sich jedoch, wenn der Bruchteil kU_a der Ausgangsspannung auf den Eingang gegengekoppelt wird. Am einfachsten geschieht das durch eine Rückführung auf den invertierenden Eingang über einen ohmschen Spannungsteiler, wie in Abb. 7.4.

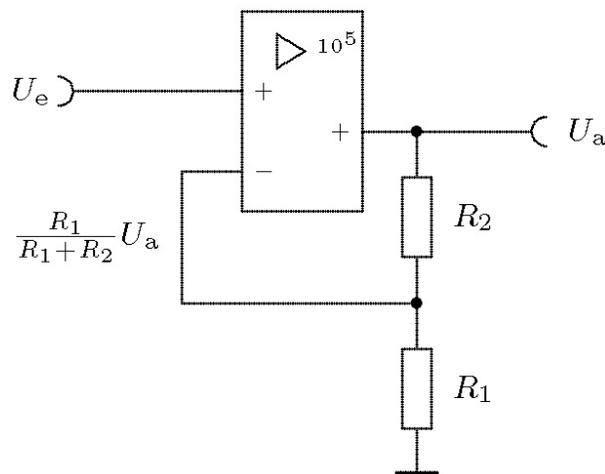


Abb. 7.4: Nicht-invertierender Verstärker (Elektrometerverstärker)

Der Rückkopplungsfaktor beträgt hier

$$k \equiv \frac{U_-}{U_a} = \frac{R_1}{R_2 + R_1} \leq 1 .$$

Ändert sich U_e um den Wert ΔU_e , so folgt U_a dieser Änderung in genau dem Maße, dass sich die Differenzeingangsspannung $U_D \approx 0$ einstellt. Bei einem idealen OPV würde $U_D = 0$ gelten, so dass

$$U_e = \frac{R_1}{R_2 + R_1} U_a = k U_a . \quad (7.13)$$

Bei einem realen OPV gilt $U_D > 0$ und unter Beachtung von (7.1) und (7.2) folgt

$$U_a = A_D U_D = A_D (U_e - k U_a) \implies U_a \cdot (1 + k A_D) = A_D U_e .$$

Für die Verstärkung bei Gegenkopplung folgt somit,

$$A \equiv \frac{U_a}{U_e} = \frac{A_D}{1 + k A_D} = \frac{1/k}{1 + \frac{1}{k A_D}} .$$

Mit dem Frequenzgang (7.7) von $A_D(\omega)$ gilt,

$$A(\omega) = \frac{1/k}{1 + \frac{1}{kA_D}} = \frac{1/k}{1 + \frac{1+j\omega/\omega_g}{kA_0}} .$$

Für $kA_0 \gg 1$ folgt schließlich,

$$A(\omega) \approx \frac{1/k}{1 + j\frac{\omega}{kA_0\omega_g}} \quad (7.14)$$

Hieraus lesen wir ab, dass beim gegengekoppelten Verstärker die Gleichspannungsverstärkung U_a/U_e durch k^{-1} und die Grenzfrequenz (Kleinsignalbandbreite) durch

$$f_g^* = kA_0f_g \quad (7.15)$$

gegeben ist (beachte, $\omega_g = 2\pi f_g$). Der Frequenzgang von Amplitude und Phase der Verstärkung A des gegengekoppelten Verstärkers ist in Abb. 7.3 für das Beispiel $k = 10^{-1}$ eingezeichnet. Wir sehen also, dass durch die Gegenkopplung die Gleichspannungsverstärkung zwar sinkt, dafür aber die Bandbreite f_g^* wächst. In Abb. 7.3 gilt $A_0 = 10^5$ und folglich $f_g^* = 10^4 f_g$.

Eingangswiderstand: Es werden der Gleichtakt- und der sehr viel kleinere Differenzeingangswiderstand r_G bzw. r_D unterschieden, Abb. 7.2.

Die Gleichtakteingangswiderstände führen von den beiden OPV-Eingängen nach Masse, also parallel zu den Innenwiderständen der ansteuernden Spannungsquellen. Sind der Innenwiderstand R der U_e -Spannungsquelle und das Rückkopplungsnetzwerk abgeglichen, d.h. gilt $R = R_1 || R_2$, dann kompensieren sich die Wirkungen der Spannungsabfälle an den Innenwiderständen. Ungeachtet dessen ist der Einfluss von den beiden r_G auch deshalb gering, weil sie sehr groß sind.

Unter Verwendung des Ersatzschaltbildes von Abb. 7.2 erhält man für den Differenzeingangswiderstand

$$r_D^* = kA_0r_D || r_G \quad (7.16)$$

Für $kA_0r_D \ll r_G$ gilt $r_D^* \approx kA_0r_D$. Durch die Gegenkopplung wird also der Differenz-Eingangswiderstand r_D um den Faktor kA_0 , der üblicherweise viel größer als 1 ist, hochtransformiert. Diese Art der Rückkopplung heisst deshalb *Elektrometer-Gegenkopplung*. Hierbei ist zu beachten, dass r_D und r_G nur differentielle Widerstände sind, was durch die Kleinschreibung zum Ausdruck kommt.

Für den gesamten differentiellen Eingangswiderstand erhält man somit,

$$r_e = \frac{\Delta U_e}{\Delta I_e} = r_G || r_D^* \quad (7.17)$$

Beide Anteile r_G und r_D^* sind im Allgemeinen sehr groß, so dass üblicherweise r_e im Bereich von $G\Omega$ liegt. Zu beachten ist, dass es sich bei r_e in Gl. (7.17) um einen differentiellen Widerstand handelt. Dem Eingangsstrom U_e/r_e ist der Eingangsruhestrom I_b aus Gl. (7.5) überlagert, welcher möglicherweise noch größer als U_e/r_e ist.

Ausgangswiderstand: Der relativ große Ausgangswiderstand r_a realer OPV von bis zu $1\text{k}\Omega$ ist unerwünscht. Er wird jedoch durch die Gegenkopplung verringert, denn eine Belastung des Ausgangs (Ausgangsstrom) verursacht eine Verringerung des Betrages der Ausgangsspannung, die über den Spannungsteiler aus R_1 und R_2 auf den invertierenden Eingang zurückgekoppelt wird.

Zur Berechnung des Ausgangswiderstandes denkt man sich den OPV in Abb. 7.4 durch den realen OPV in Abb. 7.2 ersetzt. Der Ausgangsstrom I_a durch r_a teilt sich in den Laststrom und den Strom durch den Spannungsteiler auf. Die interne Ausgangsspannung U_a^* ist dann um den Spannungsabfall an r_a größer,

$$U_a^* = U_a + I_a \cdot r_a .$$

Die Differenzspannung zwischen den beiden OPV-Eingängen ist dann

$$U_D \equiv U_+ - U_- = U_e - kU_a .$$

Es gilt auch

$$U_D = U_a^* / U_D$$

und somit

$$U_e - kU_a \dots$$

Hieraus folgt,

$$U_a = \frac{A_D U_e - I_a \cdot r_a}{1 + kA_D} \approx \frac{U_e}{k} - \frac{I_a \cdot r_a}{1 + kA_D} ,$$

worin die Approximation für $kA_D \gg 1$ zulässig ist. Für $I_a = 0$ geht dies in Gleichung (7.13) über. Der differentielle Ausgangswiderstand ist somit,

$$r_a^* \equiv \left| \frac{dU_a}{dI_a} \right| = \frac{r_a}{1 + kA_D} \quad (7.18)$$

Der Ausgangswiderstand r_a wird also durch die Gegenkopplung um dem Faktor $(1 + kA_D)^{-1}$ reduziert. Bei einem Gegenkopplungsfaktor von $k = 10^{-1}$, einer Leerlaufverstärkung von $A_D \approx 10^5$ und $r_a = 1\text{k}\Omega$ erhält man immerhin $r_a^* \lesssim 0,1\Omega$. Dies gilt allerdings nur bis zur Grenzfrequenz $f_g \lesssim 50\text{Hz}$. Bei höheren Frequenzen muss A_D wie in (7.7) angesetzt werden, was dazu führt, dass r_a^* wächst und sich hinsichtlich des Frequenzgangs wie eine Induktivität verhält.

Impedanzwandler: Der Verstärkungsfaktor $k = 1$ wird für $R_2 = 0$ und $R_1 \rightarrow \infty$ erreicht. Die Schaltung in Abb. 7.4 vereinfacht sich dann zu der in Abb. 7.5.

Sie hat nach (7.17) den relativ großen Eingangswiderstand $r_e \approx r_G$ und nach (7.18) den verhältnismäßig kleinen Ausgangswiderstand $r_a^* \lesssim 10\text{m}\Omega$. Damit eignet sich die Schaltung zur Impedanzwandlung.

7.2 Schaltungen mit Operationsverstärkern

7.2.1 Invertierender Verstärker

Abbildung 7.6 zeigt einen invertierenden Verstärker.

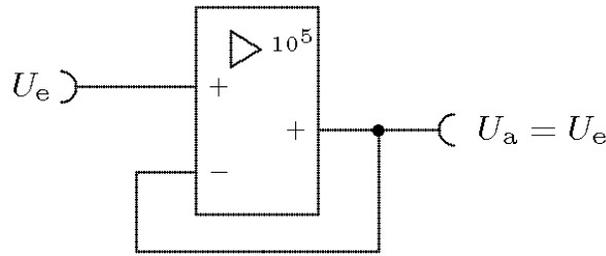


Abb. 7.5: Impedanzwandler

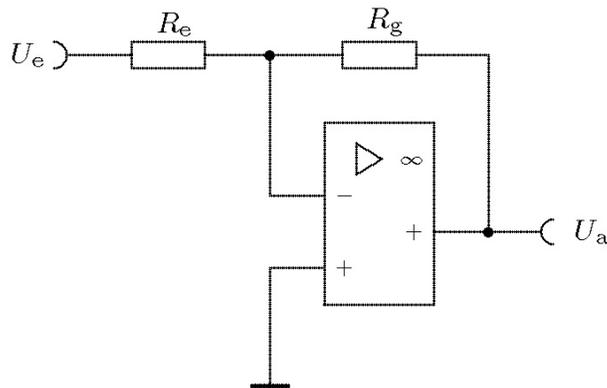


Abb. 7.6: Invertierender Verstärker

Bei gegebener Eingangsspannung U_e stellt sich die Ausgangsspannung U_a gerade so ein, dass am invertierenden Eingang dieselbe Spannung wie am nicht-invertierenden liegt. Letzterer hat Massepotential, so dass der invertierende Eingang ebenfalls auf Masse liegt, allerdings nur *virtuell*.

In die Eingänge eines (idealen) OPV fließt kein Strom. Folglich verzweigt sich der Strom am Knoten zwischen dem Eingangswiderstand R_e und dem gegenkoppelnden Widerstand R_g nicht und die Ströme durch diese Widerstände haben den gleichen Betrag, also $U_e/R_e = -U_a/R_g$. Hieraus folgt

$$U_a = -\frac{R_g}{R_e} U_e \quad (7.19)$$

Für den differentiellen Eingangswiderstand findet man leicht

$$r_e = R_e \quad (7.20)$$

In der Praxis wird R_e sehr viel kleiner als der differentielle Gleichtakt-Eingangswiderstand r_G eines realen OPV gewählt (s. Abb. 7.2). Folglich ist beim invertierenden Verstärker r_e bedeutend kleiner als etwa bei der Elektrometer-Gegenkopplung in Abb. 7.4, für den (7.17) gilt.

Der differentielle Ausgangswiderstand beim invertierenden Verstärker ist wie bei der Elektrometer-Gegenkopplung durch (7.18) gegeben, wobei der Rückkopplungsfaktor nun allerdings bestimmt ist durch

$$k \equiv \left. \frac{U_-}{U_a} \right|_{U_e=0} = \frac{R_e}{R_e + R_g} \quad (7.21)$$

In realen Schaltungen muss die Übertragungsfunktion (7.19) für hohe Frequenzen modifiziert werden, kommt hier doch die Tiefpasscharakteristik realer OPV zur Geltung.

7.2.2 Messung der Differenzverstärkung

Bei einer direkten Messung der Differenzverstärkung A_D aus Gl. (7.2) ergeben sich messtechnische Probleme. Das liegt vor allem daran, dass schon geringes Rauschen, welches in der Messpraxis der Differenzeingangsspannung U_D immer überlagert ist, zu starken Schwankungen der Ausgangsspannung oder gar zur Übersteuerung des OPV führt. Mit der Schaltung in Abb. 7.7 wird dieses Problem durch Gegenkopplung gelöst.

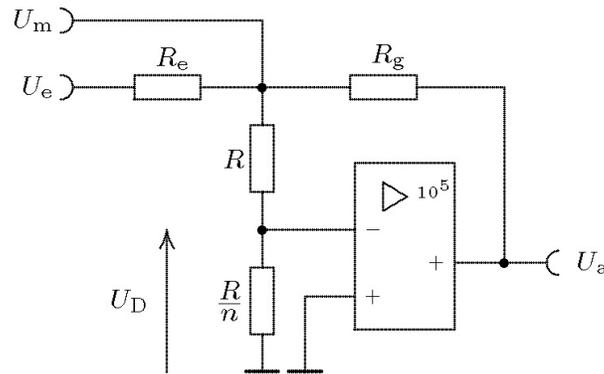


Abb. 7.7: Schaltung zur Messung der Differenzverstärkung

Sie unterscheidet sich vom invertierenden Verstärker in Abb. 7.6 allein durch den zusätzlichen Spannungsteiler aus den Widerständen R und R/n . Er bewirkt, dass die Messspannung U_m für $n \gg 1$ etwa n -mal so groß wie die gesuchte Differenzspannung U_D ist. So liegt z. B. U_m für $n = 1000$ im messtechnisch leichter zu handhabenden mV-Bereich wenn der OPV voll angesteuert wird ($U_a \lesssim \pm U_s$) und A_D von der Größenordnung 10^5 ist. Für die Differenzverstärkung gilt also

$$|A_D| = n \frac{U_a}{U_m} .$$

7.2.3 Invertierender Summierer

Abbildung 7.8 zeigt einen invertierenden Summierverstärker. Der Strom durch R_g ist dem Betrage nach gleich der Summe der Ströme durch die Eingangswiderstände R_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Daraus folgt

$$U_a = -R_g \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots + \frac{U_n}{R_n} \right) . \quad (7.22)$$

Die Ausgangsspannung ist also gleich der Summe der gewichteten Eingangsspannungen U_i , wobei die Gewichtungsfaktoren durch $-R_g/R_i$ bestimmt sind.

7.2.4 Astabiler Multivibrator

Mit Operationsverstärkern kann man recht einfach verschiedene Oszillatoren aufbauen. Abbildung 7.9 zeigt das Beispiel eines Multivibrators.

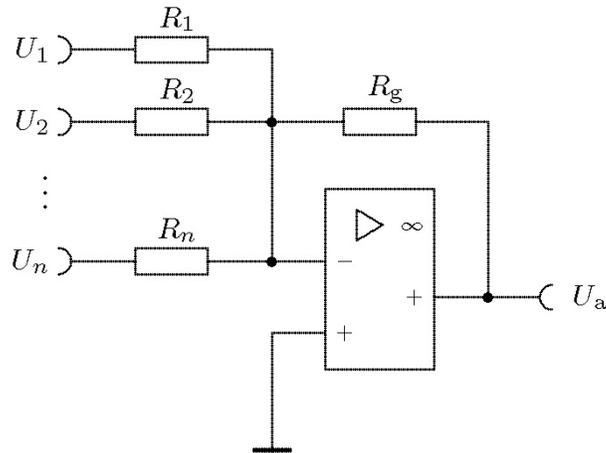


Abb. 7.8: Invertierender Summierverstärker

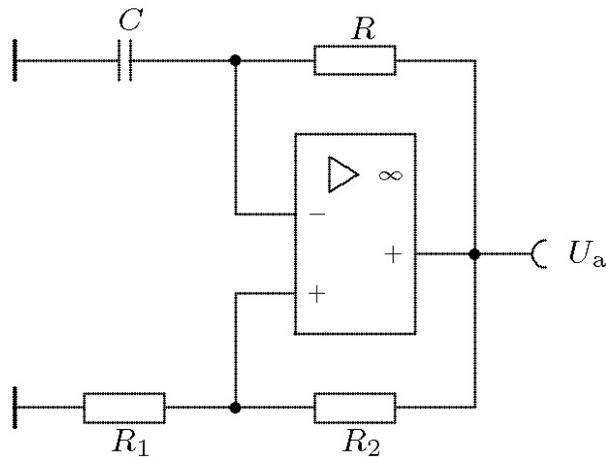


Abb. 7.9: Astabiler Multivibrator

Die Ausgangsspannung U_a springt hier periodisch zwischen den Werten $\pm U_{\max}$, wobei $U_{\max} \lesssim +U_s$. Nehmen wir zunächst an, dass U_a gerade auf U_{\max} gesprungen ist. Dann beginnt sich der Kondensator C über R so umzuladen, als würde die über ihm abfallende Spannung U_- asymptotisch gegen U_{\max} streben. Dies geschieht mit der Zeitkonstante RC . Am nicht-invertierenden Eingang des OPV liegt dabei die Spannung

$$U_e \equiv \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{\max} \quad (7.23)$$

Überschreitet U_- diesen Wert nur geringfügig, so ändert sich das Vorzeichen der Differenzeingangsspannung $U_D = U_+ - U_-$ und U_a springt auf den Wert $-U_{\max}$. Nun lädt sich C wiederum um, beginnend bei U_e und asymptotisch gegen $-U_{\max}$ strebend. Der Umladevorgang wird wiederum abgebrochen, wenn U_- den Wert $-U_e$ erreicht usw.

Der zeitliche Spannungsverlauf beim Umladevorgang $U_- = -U_e \uparrow U_e$ wird durch das Exponentialgesetz

$$U_-(t) = (U_{\max} + U_e) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - U_e$$

beschrieben. Nach der Zeit $T/2$ möge U_- den Wert $U_e < U_{\max}$ erreichen, bei dem die Schaltung zurückkippt. Aus dem Ansatz $U_-(T/2) = U_e$ erhalten wir dann

$$T = 2RC \ln \left(\frac{U_{\max} + U_e}{U_{\max} - U_e} \right) .$$

Unter Verwendung von (7.23) folgt schließlich

$$T = 2RC \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right) . \quad (7.24)$$

Für den Umladevorgang $U_- = U_e \downarrow -U_e$ wird ebenfalls die Zeit $T/2$ benötigt, so dass T gerade die Schwingungsperiode ist. Im Spezialfall $R_1 = R_2$ vereinfacht sich der Ausdruck (7.24) zu

$$T = RC \ln 9 \approx 2,2 RC .$$

7.2.5 Schmitt-Trigger

Einen Schmitt-Trigger erhält man recht einfach, indem man die Gegenkopplung beim invertierenden Verstärker von Abb. 7.6 in eine Mitkopplung verwandelt. Dazu wird die Ausgangsspannung U_a nun auf den *nicht-invertierenden* Eingang des OPV zurückgekoppelt, Abb. 7.10.

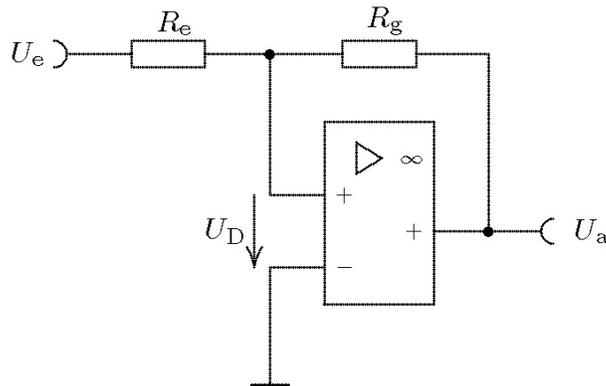


Abb. 7.10: Schmitt-Trigger

Die Ausgangsspannung U_a kann generell nur zwischen $\pm U_{\max}$ schwanken, wobei $U_{\max} \lesssim +U_s$. Nehmen wir zunächst an, dass $U_a = U_{\max}$ gilt. Unterschreitet dann die Eingangsspannung U_e den Wert

$$U_{\text{aus}} \equiv -\frac{R_e}{R_g} U_{\max} < 0 ,$$

so wird die Differenzeingangsspannung U_D negativ und U_a springt auf $-U_{\max}$. Erst wenn U_e den Wert

$$U_{\text{ein}} \equiv \frac{R_e}{R_g} U_{\max} > 0$$

erreicht, springt U_a auf den Ausgangswert U_{\max} zurück. Für die Schalthysterese folgt somit

$$U_{\text{ein}} - U_{\text{aus}} = \frac{2R_e}{R_g} U_{\max} \approx \frac{2R_e}{R_g} U_s .$$

7.2.6 Differenzierer

Mit der Schaltung in Abb. 7.11 wird das Eingangssignal $U_e(t)$ differenziert. Zur Erläuterung setzen wir

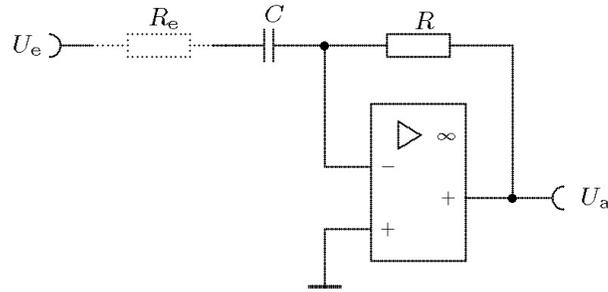


Abb. 7.11: Differenzierer

den Widerstand R_e zunächst auf null, da er von untergeordneter Bedeutung ist. Der invertierende Eingang des OPV liegt auf virtueller Masse und der Strom in diesen Eingang ist null (vgl. die Argumentation zum invertierenden Verstärker). Folglich muss der Strom CdU_e/dt auf die Kapazität C gleich dem Strom $-U_a/R$ im Rückkopplungszweig sein. Daraus folgt

$$U_a = -RC \frac{dU_e}{dt} . \quad (7.25)$$

Bei harmonischen Eingangsspannungen mit der Kreisfrequenz ω kann die Übertragungsfunktion U_a/U_e des Differenzierers leicht berechnet werden, indem für die Kapazität der komplexe Widerstand

$$R_C \equiv \frac{1}{j\omega C} \quad (7.26)$$

verwendet wird. Dann ist der Differenzierer wie der invertierende Verstärker in Abb. 7.6 zu behandeln, mit dem Eingangswiderstand $R_e + R_C$. In Analogie zu Gl. (7.19) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} U_a &= -\frac{R}{R_e + R_C} U_e \\ &= -\frac{j\omega RC}{1 + j\omega R_e C} U_e . \end{aligned} \quad (7.27)$$

Hieraus ergibt sich der Betrag der Übertragungsfunktion $|A|(\omega) \equiv |U_a/U_e|$ zu

$$\begin{aligned} |A|(\omega) &= \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R_e^2 C^2}} \\ &= \begin{cases} 0 & : \omega \rightarrow 0 \\ R/R_e & : \omega \rightarrow \infty . \end{cases} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Der Differenzierer kann also als Hochpass aufgefasst werden. Für die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangsspannung folgt aus (7.27)

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\pi - \arctan \frac{1}{\omega R_e C} \\ &= \begin{cases} -270^\circ & : R_e > 0, \omega \rightarrow 0 \\ -180^\circ & : R_e > 0, \omega \rightarrow \infty \\ -270^\circ & : R_e = 0, \omega \text{ beliebig.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.29)$$

Für die Stabilität der Schaltung ist es wichtig zu beachten, dass der Rückkopplungsfaktor hier komplex ist und somit i.a. eine Phasenverschiebung verursacht. In Analogie zu (7.21) erhalten wir hier

$$\begin{aligned} k &= \frac{R_e + R_C}{R_e + R_C + R} \\ &= \frac{1 + j\omega R_e C}{1 + j\omega(R_e + R)C} \\ &= |k| e^{j\varphi(\omega)} \text{ ,} \end{aligned}$$

mit der Phasenverschiebung

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\arctan \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R_e(R_e + R)C^2} \\ &= -\arctan \omega RC \quad \text{für } R_e = 0 \text{ .} \end{aligned} \tag{7.30}$$

Bei $R_e = 0$ und großen Frequenzen geht also $\varphi(\omega)$ gegen -90° . Zu dieser Verschiebung kommt noch die des internen Tiefpasses, welche bis hin zur Transitfrequenz ebenfalls nahezu -90° betragen kann. Insgesamt wird also die Ausgangsspannung bei hohen Frequenzen mit ca. -180° Phasenverschiebung auf den invertierenden Eingang gegeben, so dass sich die gewünschte Gegenkopplung in eine Mitkopplung verkehrt und die Schaltung instabil wird. Nach (7.30) verringert der ohmsche Widerstand $R_e > 0$ diese Phasenverschiebung und wirkt somit stabilisierend.

Die Zeitkonstante $R_e C > 0$ am Eingang der Schaltung in Abb. 7.11 bestimmt wesentlich die Frequenzen f der Eingangsspannung U_e , für welche die Beziehung (7.25) in „guter“ Näherung gilt, denn generell muss dazu

$$f \ll \frac{1}{2\pi R_e C}$$

erfüllt sein.

Abschließend sei jedoch angemerkt, dass die Differentiation von Signalen in der Regel mit großen Rechenfehlern verbunden ist, werden doch hierbei Störungen, die realen Signalen immer überlagert sind („Rauschen“), stark angehoben. In vielen Fällen (z. B. bei der Lösung von Differentialgleichungen) kann man aber auf Integratoren ausweichen, die einen Tiefpasscharakter haben und somit schaltungstechnisch besser beherrschbar sind.

7.2.7 Integrierer

Die Schaltung in Abb. 7.12 integriert das Eingangssignal $U_e(t)$, denn der Strom durch R muss vom Betrage gleich dem Strom auf C sein, also

$$\frac{U_e}{R} = -C \frac{dU_a}{dt} \text{ .}$$

Daraus folgt für die Ausgangsspannung

$$U_a(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_e(t^*) dt^* + U_a(0). \tag{7.31}$$

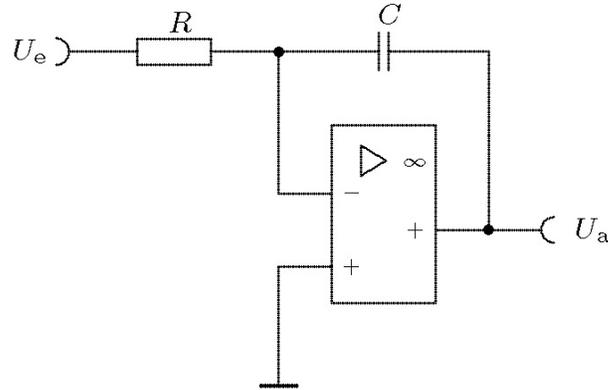


Abb. 7.12: Invertierender Integrierer

Für harmonische Eingangsspannungen mit der Kreisfrequenz ω erhalten wir unter Verwendung von (7.26) und (7.19) die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= -\frac{1}{j\omega RC} \\
 &= \frac{1}{\omega RC} e^{j\pi/2} .
 \end{aligned}
 \tag{7.32}$$

Der Integrierer hat somit Tiefpasscharakter, wobei die Ausgangsspannung U_a der Eingangsspannung U_e um 90° voreilt.

Stabilitätsprobleme, wie wir sie vom Differenzierer in Abb. 7.11 bereits kennen, gibt es beim Integrierer nicht, denn in Analogie zu (7.21) ergibt sich der Rückkopplungsfaktor hier wie folgt,

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{R}{R + R_C} \\
 &= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \\
 &= \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j \arctan \frac{1}{\omega RC}} .
 \end{aligned}$$

Für große Frequenzen geht die Phasenverschiebung gegen null, so dass die Ausgangsspannung dann voll gegengekoppelt wird, ebenso wie beim invertierenden Verstärker in Abb. 7.6.

Der Integrationsfehler wird groß einerseits für geringe Frequenzen $f < f_g$, infolge der endlichen Leerlaufverstärkung A_0 , (s. Abb. 7.3) und andererseits für große Frequenzen $f > 1/(2\pi\tau)$. Hierin ist

$$\tau \equiv RC
 \tag{7.33}$$

die Integrationszeitkonstante. Innerhalb des Frequenzbandes $f_g \dots (2\pi\tau)^{-1}$ liegt der relative Integrationsfehler bei

$$\begin{aligned}
 E &= |A|/|A_D| \\
 &= \frac{\sqrt{1 + (f/f_g)^2}}{2\pi f \tau A_0} \\
 &\approx (2\pi\tau A_0 f_g)^{-1} \quad \text{für } f_g \ll f < (2\pi\tau)^{-1} .
 \end{aligned}$$

Für $\tau = 100\mu\text{s}$, $A_0 = 10^5$ und $f_g = 10\text{Hz}$ erhält man z. B. $E \approx 0,16\%$.

Bei der praktischen Realisierung des Integrierers führen die Eingangsfehlspannung U_O und der Eingangsruhestrom I_b zu einer störenden Drift der Ausgangsspannung. Für $U_e = 0$ gilt

$$\frac{dU_a}{dt} = \frac{1}{C} \left(\frac{U_O}{R} + I_b \right) . \quad (7.34)$$

Bei OPV mit FET-Eingängen stört vor allem U_O . Wählen wir z. B. $C = 10\text{nF}$ und $R = 10\text{k}\Omega$, so erhalten wir die Zeitkonstante $RC = 100\mu\text{s}$. $U_O = 10\text{mV}$ liefert dann eine Drift von 100V/s . Hingegen folgt aus $I_b = 30\text{pA}$ die vernachlässigbar kleine Drift von $0,003\text{ V/s}$.⁹⁾

Verwendet man OPV mit bipolaren Eingängen, so ist der viel größere Eingangsruhestrom bedeutsam. Nach (7.34) kann aber sein Einfluss durch die Verwendung möglichst großer Kapazitäten C verringert werden. Die Integrationszeitkonstante (7.33) kann dabei konstant gehalten werden, indem gleichzeitig der Widerstand R verkleinert wird. Der Einfluss von U_O auf die Drift bleibt dabei aber unverändert groß. Darüber hinaus sind Kondensatoren mit großen Kapazitäten unhandlich und teuer. Setzt man Elektrolytkondensatoren ein, die auf kleinem Raum große Kapazitätswerte besitzen können, so stören die relativ großen Leckströme, welche im μA -Bereich liegen. Man sollte deshalb jedenfalls Folienkondensatoren verwenden.

7.2.8 Bandsperre

Durch die Beschaltung eines OPV mit RC- oder LRC-Netzwerken können aktive Filter konstruiert werden. Abbildung 7.13 zeigt das Beispiel einer Bandsperre. Um die Übertragungsfunktion $A(\omega) \equiv U_a/U_e$

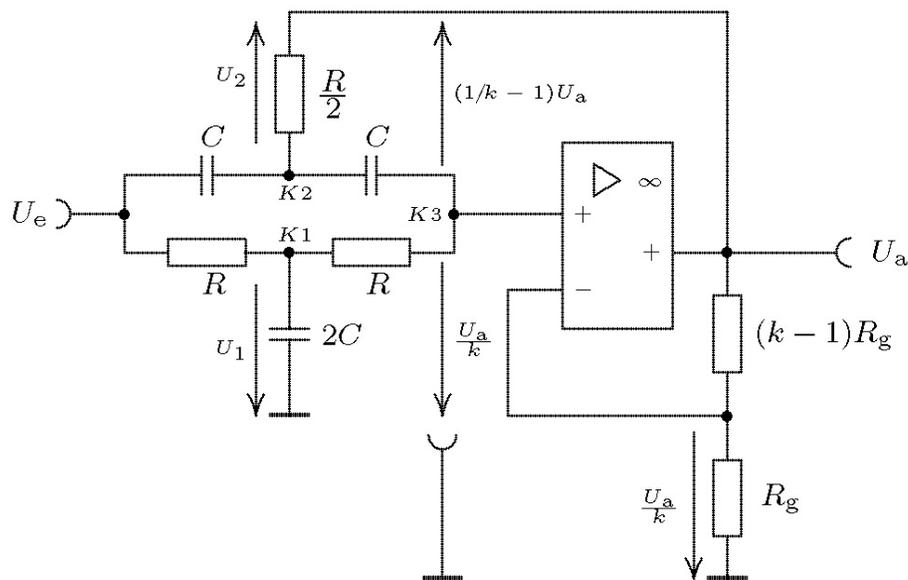


Abb. 7.13: Aktive Doppel-T-Bandsperre

zu bestimmen, wenden wir die Knotenregel auf die Knoten $K1$, $K2$ und $K3$ an und erhalten dann¹⁰⁾

⁹⁾Die verwendeten Zahlenwerte für die Eingangsfehlgrößen sind typisch für den OPV LF356N.

¹⁰⁾Wie üblich werden die Ein- und Ausgangsspannung U_e bzw. U_a positiv gerechnet, wenn die eingezeichnete Buchse gegenüber Masse positiv ist.

Knoten 1:

$$U_1 j\omega 2C = \frac{U_e - U_1}{R} + \frac{U_a/k - U_1}{R}$$

Knoten 2:

$$\frac{2U_2}{R} = (U_e - U_a - U_2)j\omega C + [(1/k - 1)U_a - U_2]j\omega C$$

Knoten 3:

$$[(1/k - 1)U_a - U_2]j\omega C = \frac{U_1 - U_a/k}{R} .$$

Eliminiert man hier die Hilfsspannungen U_1 und U_2 , so folgt mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega \equiv \omega RC$ die Übertragungsfunktion

$$A(\Omega) = \frac{k}{1 + \frac{2(2-k)\Omega}{1-\Omega^2} j} . \quad (7.35)$$

Der zugehörige Amplitudengang ist

$$|A|(\Omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{4(2-k)^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2}}} , \quad (7.36)$$

und für den Phasengang finden wir

$$\varphi(\Omega) = -\arctan \frac{2(2-k)\Omega}{1-\Omega^2} . \quad (7.37)$$

Beide Kurvenverläufe (7.36) und (7.37) sind in Abb. 7.14 dargestellt. Bei der Resonanzfrequenz $f_r = (2\pi RC)^{-1}$ wird $\Omega = 1$ und somit $|A|(1) = 0$. f_r wird also maximal unterdrückt. Die Phasenverschiebung φ zeigt an der Resonanzstelle einen Phasensprung um 180° .

Der Sperrbereich wird definiert als der Frequenzbereich $\Omega_{\min} \dots \Omega_{\max}$, in dem $|A|/k < 1/\sqrt{2} \approx 0,71$ gilt¹¹⁾. Die Differenz $B \equiv \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$ ist die *Bandbreite*, normiert bezüglich der Resonanzfrequenz. Der Kehrwert $Q \equiv B^{-1}$ heisst *Güte*. Sie ergibt sich aus (7.36) zu

$$Q = \frac{1}{2(2-k)} . \quad (7.38)$$

Offenbar wird die Güte für $k \approx 2$ besonders groß und bei $k = 2$ sogar unendlich.

7.2.9 Logarithmierer

Logarithmierer liefern eine Ausgangsspannung U_a , die bis auf eine Konstante dem Logarithmus der Eingangsspannung proportional ist, also $U_a = \log(\text{const.} \times U_e)$. Derartige Verknüpfungen werden z. B. bei der Multiplikation zweier Signale benötigt¹²⁾.

Eine Schaltungsvariante zum Logarithmieren ist in Abb. 7.15 zu sehen. Hier findet sich die Grundschaltung des invertierenden Verstärkers aus Abb. 7.6 wieder, nun allerdings mit dem nichtlinearen Kollektor-Emitter-Widerstand eines Bipolartransistors im Rückkopplungszweig¹³⁾.

¹¹⁾ Dies bedeutet einen Verstärkungsabfall um etwa -3 dB gegenüber der Gleichspannungsverstärkung $|A|(0) = k$.

¹²⁾ Bei einer Multiplikation wird die Beziehung $P = F_1 \times F_2 = \exp(\ln F_1 + \ln F_2)$ genutzt. Folglich ist neben dem Logarithmierer auch ein Exponierender nötig.

¹³⁾ Anstelle des Transistors könnte auch eine Diode verwandt werden. Allerdings stört dann der parasitäre ohmsche Serienwiderstand. Darüber hinaus zeigt die reale Diodenkennlinie merkliche Abweichungen von der gewünschten streng logarithmischen Charakteristik.

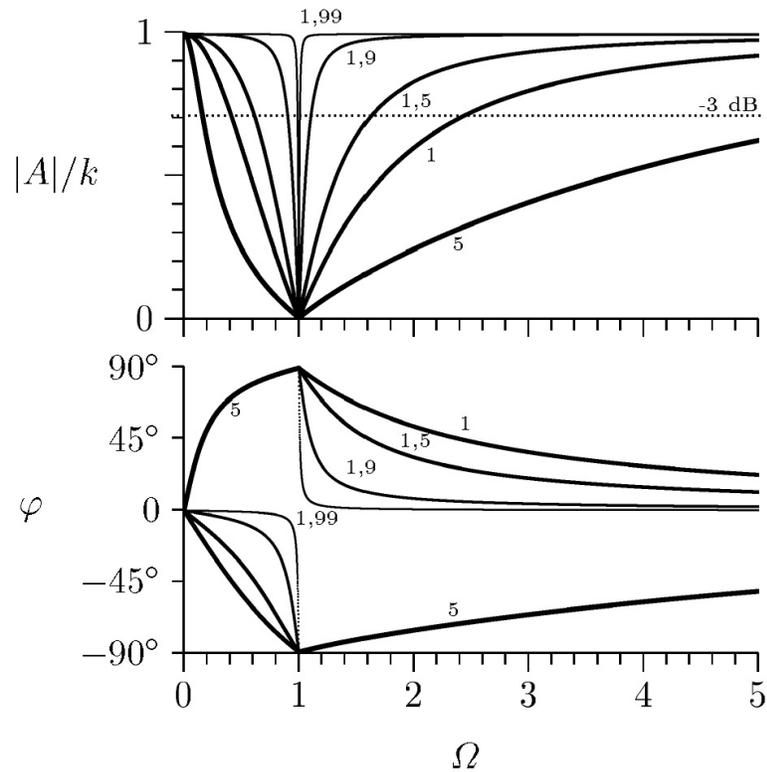
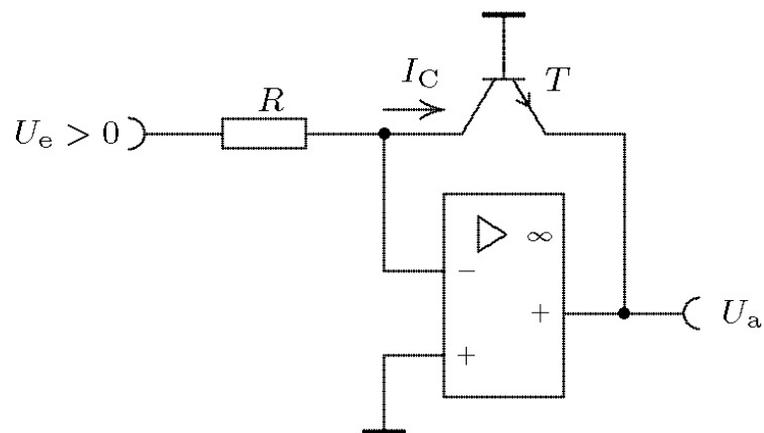
Abb. 7.14: Amplituden- und Phasenfrequenzgang der Doppel-T-Bandsperre für verschiedene Gegenkopplungsfaktoren k 

Abb. 7.15: Logarithmierer

Zur Ableitung der Übertragungscharakteristik $U_a(U_e)$ des Logarithmierers gehen wir von der Kennlinie

$$U_{BE} = U_T \ln \frac{I_C}{I_{CS}} \quad (7.39)$$

aus. Diese Beziehung gilt in guter Näherung, wenn der Kollektorstrom I_C groß gegenüber dem Sperr-

strom I_{CS} ist¹⁴). Für den Knoten am invertierenden Eingang gilt $U_e/R = I_C$. Weiterhin folgt aus dem Maschensatz $U_a = -U_{BE}$. Damit geht Gl. (7.39) in die gesuchte Beziehung über,

$$U_a(U_e) = -U_T \ln \frac{U_e}{RI_{CS}} \quad \text{für } U_e > 0 \quad . \quad (7.40)$$

Bei hochwertigen Siliziumtransistoren hat man einen Kollektorstrombereich von einigen pA bis zu mA zur Verfügung. Damit lassen sich Logarithmierer über 9 Dekaden der Eingangsspannung aufbauen.

Die Schaltung in Abb. 7.15 neigt zu Eigenschwingungen, weil die Schleifenverstärkung durch den Transistor erhöht wird. In Abb. 7.16 wurde deshalb ein Emittorwiderstand R_E zur Stromgegenkopplung verwandt, der die Spannungsverstärkung des Transistors auf den Wert R/R_E begrenzt. Darüber hinaus

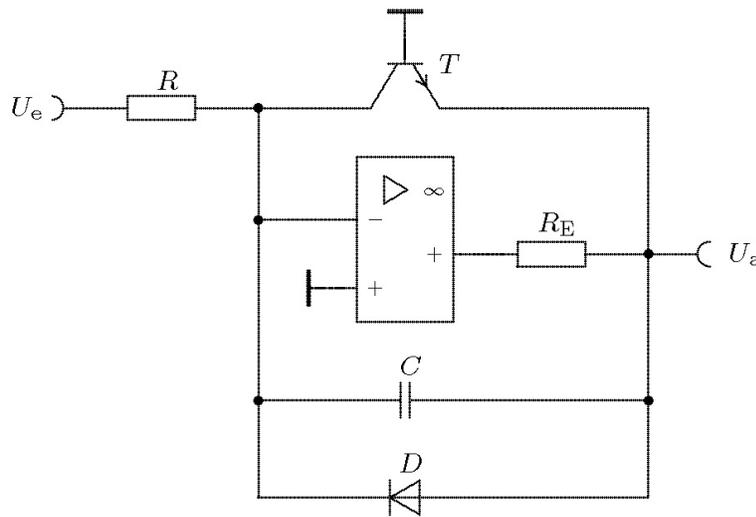


Abb. 7.16: Praktische Ausführung eines Logarithmierers

können mit einem Kondensator im Gegenkopplungszweig hohe Frequenzanteile unterdrückt werden, was die Schaltung stabilisiert.

Eine Diode, welche im Normalbetrieb ($U_a < 0$ für $U_e > 0$) in Sperrichtung geschaltet und somit unwirksam ist, verhindert bei negativen Eingangsspannungen eine Übersteuerung des OPV. Damit schützt sie den Transistor vor zu hohen Emitter-Basis-Spannungen und verkürzt die Erholzeit.

7.2.10 Exponierer

Ein Exponierer wird z. B. als Umkehrung des Logarithmierers beim Multiplizieren zweier Spannungen benötigt (s. Fußnote auf S. 152). Abbildung 7.17 zeigt hierfür eine einfache Schaltung.

Zur Bestimmung der Übertragungscharakteristik $U_a(U_e)$ wenden wir zunächst die Knotenregel auf den Knoten am invertierenden Eingang und erhalten $I_C = U_a/R$. Andererseits folgt aus (7.39)

$$I_C = I_{CS} e^{U_{BE}/U_T} \quad . \quad (7.41)$$

¹⁴Für Siliziumtransistoren gilt $I_{CS} \approx 10\text{pA}$. Darüber hinaus geht in die Kennlinienfunktion die Temperaturspannung $U_T = kT/e$ ein. Hier bezeichnet $k = 1,3810^{-23}$ Ws/K die Boltzmannkonstante und $e = 1,60210^{-19}$ C die Elementarladung. Bei Zimmertemperatur von $T = 296\text{K}$ erhalten wir $U_T \approx 25,5\text{mV}$.

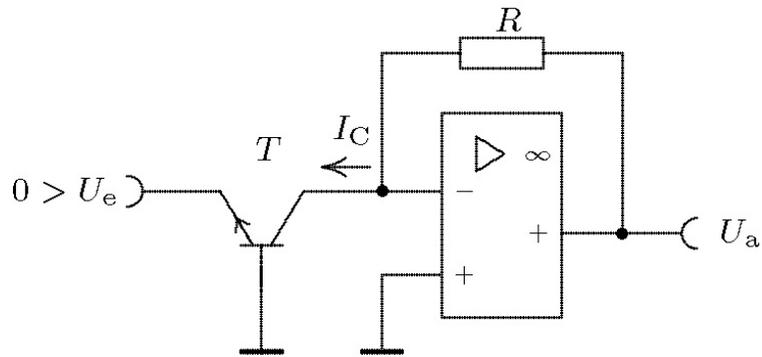


Abb. 7.17: Exponierer

Damit erhalten wir schließlich

$$U_a(U_e) = R I_{CS} e^{-U_e/U_T} \quad \text{für } U_e < 0 . \quad (7.42)$$

Abschließend sei bemerkt, dass die Schaltungen in Abb. 7.17 eine relativ starke Temperaturdrift zeigt. Diese kann jedoch durch zusätzlichen schaltungstechnischen Aufwand (Differenzverstärker) weitgehend kompensiert werden.

Kapitel 8

Digitale Schaltungen

Mit digitalen Schaltungen werden Verknüpfungen der zweiwertigen Logik elektronisch realisiert. Derartige Schaltungen bilden die Grundlage von Digitalrechnern, moderner Nachrichtenelektronik, Meßgeräten u. v. a. m. Für das Verständnis digitaler Schaltungen sind Kenntnisse der zweiwertigen Aussagenlogik erforderlich. Eine Darstellung relevanter Bestandteile der Aussagenlogik findet sich im Abschnitt 8.1. Logische Gatter sind die elementaren Bausteine logischer Schaltungen, Abschnitt 8.2.

Digitale Schaltungen lassen sich in zwei Gruppen einteilen, *kombinatorische* und *sequentielle* Schaltungen. Kombinatorische Schaltungen sind statische Zuordner, bei denen logische Ausgangswerte durch die momentanen Eingangsvariablen bestimmt sind (Abschnitt 8.3). Sequentielle Schaltungen enthalten interne Speicher. Bei ihnen hängen die Ausgangswerte neben den momentanen Eingangsvariablen auch vom aktuellen Zustand der Speicher ab (Abschnitt 8.4).

Als generelle Literaturempfehlungen wird auf die Bücher [16, 11, 14] verwiesen.

8.1 Aussagenlogik

8.1.1 Logische Funktionen

In der zweiwertigen Logik hat eine Variable x nur einen von zwei möglichen Werten, die mit „0“ und „1“ bezeichnet und als „falsch“ bzw. „wahr“ interpretiert werden.¹⁾ Eine Abbildung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.1)$$

die den logischen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n den logischen Wert $y \in \{0, 1\}$ zuordnet, heisst *logische Funktion* oder auch *logische Verknüpfung*. Eine solche Verknüpfung kann z. B. durch eine *Wertetabelle* (*Wahrheitstafel*) definiert werden. Weil eine jede unabhängige Variable x_i nur zwei mögliche Werte annehmen kann,

¹⁾Diese Interpretation und die Verwendung der Zeichen „0“ und „1“ ist für die digitale Schaltungstechnik eigentlich bedeutungslos. Dadurch vereinfacht aber zuweilen die Sprechweise, und bei einigen logischen Funktionen hat dieses Vorgehen mnemotechnische Bedeutung, was weiter unten noch erläutert wird.

Wesentlich ist vielmehr, dass mit Folgen von „0“ und „1“ Information gespeichert werden kann, und deren Umformung in andere Folgen von „0“ und „1“ ist eine Art der Informationsverarbeitung.

Anstelle der Zeichen „0“ und „1“ verwenden einige Autoren auch „L“ und „H“ (aus: „Low“ und „High“) oder „O“ und „I“. Wir werden ausschließlich 0 und 1 (ohne Anführungszeichen) verwenden. Verwechslungen dieser Ziffern mit den entsprechenden Zahlenwerten werden durch den Kontext ausgeschlossen.

hat diese Wertetabelle genau 2^n viele Zeilen, wenn in den $n + 1$ Spalten die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n sowie der Funktionswert y aufgetragen werden,

x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n	y
0	0	\dots	0	\dots	0	b_1
1	0	\dots	0	\dots	0	b_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_{1j}	a_{2j}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{nj}	b_j
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
1	1	\dots	1	\dots	1	b_{2^n}

(8.2)

Hier sind die Funktionswerte b_j wiederum entweder 0 oder 1. Folglich lassen sich mit n Eingangsvariablen genau 2^{2^n} viele verschiedene Funktionen realisieren.

Bei nur einer Eingangsvariablen x gibt es vier mögliche Funktionen. Wichtig ist für uns vor allem die

$$\text{Negation: } \bar{x} \equiv \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ 0 & : x = 1 \end{cases} . \tag{8.3}$$

Bei zwei Eingangsvariablen gibt es schon 16 mögliche Funktionen. Allerdings haben in der Schaltungstechnik vor allem nur die Folgenden Bedeutung:

Konjunktion:

$$x_1 \cdot x_2 \equiv \begin{cases} 1 & : x_1 = x_2 = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} , \tag{8.4}$$

Disjunktion:

$$x_1 + x_2 \equiv \begin{cases} 0 & : x_1 = x_2 = 0 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases} . \tag{8.5}$$

In der Schreibweise der Wahrheitstabellen lauten diese Funktionen

<i>Konjunktion</i>			<i>Disjunktion</i>		
x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Die Konjunktion heisst auch UND- und AND-*Verknüpfung*. Sie liefert den Wert „wahr“ nur dann, wenn beide Operanden x_1 und x_2 „wahr“ sind. Damit entspricht sie unserem aus der Alltagssprache vertrauten „und“. Der *Funktor* der konjunktiven Verknüpfung ist der Punkt „·“. Andere Schreibweisen sind

$$x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 x_2 \equiv x_1 \cdot x_2 .$$

Wir verwenden den Punkt, der wie bei der Multiplikation in der Zahlenarithmetik auch weggelassen werden kann. Diese Analogie ist aber noch weitreichender, kann man doch bei Verwendung der Zeichen 0 und 1 die Konjunktion $x_1 x_2$ wie in der Zahlenarithmetik bestimmen: *Ein Produkt wird 0, wenn zumindest ein Faktor 0 ist.*

Die Disjunktion heisst auch ODER- und OR-*Verknüpfung*. Sie liefert den Wert „falsch“ nur dann, wenn beide Operanden „falsch“ sind. Damit entspricht sie dem „oder“ der Umgangssprache. Der hier verwendete Funktor der disjunktiven Verknüpfung ist das Pluszeichen „+“. Eine andere Schreibweise ist

$$x_1 \vee x_2 \equiv x_1 + x_2.$$

Mit dem Plus-Zeichen wird wiederum eine gewisse Analogie zur Zahlenarithmetik erreicht: *Eine Summe von nicht negativen Summanden wird positiv, wenn zumindest ein Summand nicht 0 ist.* Die Analogie ist nur insofern nicht vollständig, als in der Zahlenarithmetik Summen größer als 1 werden können, wohingegen hier $1 + 1 = 1$ gilt.

Unsere Umgangssprache kennt noch die Formulierung *entweder ... oder ...*. Dieser entspricht in der Aussagenlogik die Operation

$$\text{Antivalenz : } x_1 \oplus x_2 \equiv \begin{cases} 0 & : x_1 = x_2 \\ 1 & : \text{sonst} . \end{cases} \quad (8.6)$$

Sie heisst auch *Exklusiv-Oder*.

Werden die Operationen Konjunktion und Negation hintereinander ausgeführt, so heisst die Funktion insgesamt *Shefferscher Strich* oder üblicher *NAND-Verknüpfung*. Eine Disjunktion mit anschließender Negation heisst *Nicodsche Funktion* oder üblicher *NOR-Verknüpfung*.

Die AND- sowie OR-Verknüpfung wird für mehr als zwei Variable definiert durch,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \equiv \begin{cases} 1 & : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 \\ 0 & : \text{sonst} , \end{cases}$$

beziehungsweise durch,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv \begin{cases} 0 & : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \\ 1 & : \text{sonst} . \end{cases}$$

8.1.2 Rechnen mit logischen Variablen

Alle logischen Funktionen, auch solche in mehr als zwei Variablen, lassen sich auf einige wenige zurückführen, z. B. allein auf die Negation und Konjunktion. Beispielsweise gilt für die Antivalenz:

$$\begin{aligned} x_1 \oplus x_2 &= x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 \\ &= \overline{x_1 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 x_2} . \end{aligned} \quad (8.7)$$

Beim Rechnen mit logischen Variablen gelten die folgenden Gesetze:

Kommutatives Gesetz:

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 \quad (8.8)$$

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \quad (8.9)$$

Assoziatives Gesetz:

$$(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3) \quad (8.10)$$

$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \quad (8.11)$$

Distributives Gesetz:

$$x_1 (x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 \quad (8.12)$$

$$(x_1 + x_2) (x_1 + x_3) = x_1 + x_2 x_3 \quad (8.13)$$

Weitere Regeln sind:

Absorptionsgesetz:

$$x_1(x_1 + x_2) = x_1 \quad (8.14)$$

$$x_1 + x_1x_2 = x_1 \quad (8.15)$$

Tautologie:

$$xx = x \quad (8.16)$$

$$x + x = x \quad (8.17)$$

Gesetz für die Negation:

$$x\bar{x} = 0 \quad (8.18)$$

$$x + \bar{x} = 1 \quad (8.19)$$

Negation der Negation:

$$\overline{(\bar{x})} = x \quad (8.20)$$

De Morgans Gesetze:

$$\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad (8.21)$$

$$\overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad (8.22)$$

Operationen mit 0 und 1:

$$1 \cdot x = x \quad (8.23)$$

$$0 + x = x \quad (8.24)$$

$$0 \cdot x = 0 \quad (8.25)$$

$$1 + x = 1 \quad (8.26)$$

$$\bar{0} = 1 \quad (8.27)$$

$$\bar{1} = 0 \quad (8.28)$$

Die aus der Zahlenalgebra bekannte Regel „Punkt– geht vor Strichrechnung“ lautet hier „UND– geht vor ODER–Verknüpfung“. Die Regeln (8.13), (8.14), (8.15), (8.16), (8.17) und (8.26) gelten in der Zahlenalgebra nicht, wohingegen alle anderen Regeln in der Zahlenalgebra ihr Analogon haben, vorausgesetzt, die Negation wird wie in (8.27) und (8.28) definiert.

Eine weitere nützliche Regel ist die von SHANNON,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, +, \cdot) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \cdot, +)}. \quad (8.29)$$

Sie besagt, dass der logische Wert einer Funktion von n logischen Variablen unverändert bleibt, wenn man jede Variable negiert, Konjunktionen in Disjunktionen überführt und umgekehrt sowie schließlich noch den gesamten Term negiert. Bei dieser Umformung muss allerdings die Kammersetzung beachtet werden, so dass die Disjunktionen im Term auf der rechten Seite von (8.29) Vorrang haben. Im Falle der

Antivalenz bedeutet das z. B.

$$\begin{aligned} x_1 \oplus x_2 &= \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} \\ &= \overline{(x_1 + x_2)} \cdot (\overline{x_1} + x_2) \\ &\neq \overline{x_1 + x_2} \cdot \overline{x_1} + x_2 = 0 . \end{aligned}$$

Die Gesetze von DE MORGAN (8.21) und (8.22) sind Spezialfälle der Regel (8.29) von SHANNON.

8.1.3 Normalformen

Hat man eine Wahrheitstabelle (8.2) gegeben, so ist dadurch eine logische Funktion eindeutig definiert. Für die schaltungstechnische Realisierung dieser Funktion ist aber häufig eine Darstellung (8.1) vorzuziehen, wohingegen für die Definition logischer Funktionen Wahrheitstabellen recht bequem sind. Folglich besteht die Aufgabe, aus einer gegebenen Tabelle die Funktionsdarstellung (8.1) zu entwickeln, und zwar unter Verwendung der „Standardoperationen“ Negation, Konjunktion und Disjunktion. Dafür gibt es die beiden folgenden Verfahren:

1. Konjunktive Normalform: Zur j -ten Zeile in der Wahrheitstabelle (8.2) bildet man den Term

$$z_j = \begin{cases} 1 & : b_j = 1 \\ (z_{1j} + \dots + z_{ij} + \dots + z_{nj}) & : b_j = 0, \end{cases}$$

mit

$$z_{ij} = \begin{cases} \overline{x_i} & : a_{ij} = 1 \\ x_i & : a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Die gesuchte Funktion ist dann

$$y = z_1 \cdot \dots \cdot z_j \cdot \dots \cdot z_{2^n}. \quad (8.30)$$

Wegen der Regel (8.23) kann man alle Terme mit $z_j = 1$ weglassen und erhält dann die sogenannte *konjunktive Normalform*.

2. Disjunktive Normalform: Zur j -ten Zeile in der Wahrheitstabelle (8.2) bildet man den Term

$$z_j = \begin{cases} 0 & : b_j = 0 \\ z_{1j} \cdot \dots \cdot z_{ij} \cdot \dots \cdot z_{nj} & : b_j = 1, \end{cases}$$

mit

$$z_{ij} = \begin{cases} \overline{x_i} & : a_{ij} = 0 \\ x_i & : a_{ij} = 1. \end{cases}$$

Die gesuchte Funktion ist dann

$$y = z_1 + \dots + z_j + \dots + z_{2^n}. \quad (8.31)$$

Bei Beachtung der Regel (8.24) fallen alle Terme mit $z_j = 0$ weg und man erhält dann die sogenannte *disjunktive Normalform*.

Als Beispiel wird hier die Antivalenz betrachtet (8.6). Deren Wahrheitstabelle lautet

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Aus der ersten und letzten Zeile erhält man die konjunktive Normalform

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2). \quad (8.32)$$

Die disjunktive Normalform ergibt sich aus der zweiten und dritten Zeile und entspricht der Darstellung in (8.7). Wendet man hier zweimal die Shannonsche Regel (8.29) an, so erhält man

$$\begin{aligned} x_1 \oplus x_2 &= x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 \\ &= \overline{(\bar{x}_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2)} \\ &= \overline{x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2} \\ &= (x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Die disjunktive und konjunktive Darstellung der Antivalenz (8.7) bzw. (8.32) sind also gleichwertig. Die Äquivalenz der entsprechenden Darstellungsformen trifft auch für beliebige andere Funktionen zu. Um bei der Aufstellung einer Normalform von vornherein möglichst wenig Terme zu bekommen, sollte man die konjunktive Form wählen, wenn in der Wahrheitstabelle mehr Zeilen mit Funktionswerten 0 auftreten und die disjunktive Form im umgekehrten Fall. In unserem Beispiel der Antivalenz war es freilich gleich. Hat man nun aus der Wahrheitstabelle die konjunktive oder disjunktive Normalform abgeleitet, so kann man in der Regel die Ausdrücke noch verkürzen. Unser Anliegen ist es im Allgemeinen, möglichst kleine Terme zu erhalten, wird doch dann ihre schaltungstechnische Umsetzung am billigsten. Bei dieser Kürzung sind die folgenden Regeln nützlich: Sind x und y zwei beliebige logische Variable, so gelten

$$\begin{aligned} xy + \bar{x}y &= (x + \bar{x}) \cdot y \\ &= 1 \cdot y \\ &= y \end{aligned} \quad (8.33)$$

und

$$\begin{aligned} (x + y)(\bar{x} + y) &= x\bar{x} + xy + \bar{x}y + yy \\ &= 0 + (x + \bar{x})y + y \\ &= y. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Die letztere Gleichung kann bei der Kürzung in einer konjunktiven Normalform (8.30) angewandt werden — kommen in (8.30) zwei Terme, z.B. z_1 und z_2 ,²⁾ derart vor, dass der eine in den anderen durch Negation einer Variable entsteht, so bleibt von $z_1 z_2$ nur der in beiden Termen gleichermaßen vorkommende Anteil übrig. Gilt z. B. $z_1 = (x_1 + x_2 + x_3)$ und $z_2 = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)$, so liefert die Kürzungsregel (8.34) $z_1 z_2 = x_1 + x_3$. Hingegen ist die Regel (8.33) bei der Kürzung in einer disjunktiven Normalform (8.31) hilfreich. Gilt z. B. $z_1 = x_1 x_2 x_3$ und $z_2 = x_1 \bar{x}_2 x_3$, so liefert sie $z_1 z_2 = x_1 x_3$.

²⁾Bei der Aufstellung geeigneter Termpaare $z_1 z_2$ kann von der Kommutativität (8.8) Gebrauch gemacht werden.

8.1.4 Karnaugh–Tafeln

Die sogenannten Karnaugh–Tafeln sind neben den Wahrheitstabellen (8.2) und den Normalformen eine dritte Möglichkeit der Darstellung einer logischen Funktion. Sie werden vor allem bei 3 oder 4 Eingangsvariablen angewandt, wengleich bis zu 6 Eingangsvariable mit ihnen behandelbar sind.³⁾

In einer Karnaugh–Tafel wird die Wahrheitstabelle nur anders geschrieben, indem die Funktionswerte in einer Matrix angeordnet werden, so dass sich bei Übergängen von einem Matrixfeld zu benachbarten jeweils nur *eine* Eingangsvariable verändert. Der Grund für diese Anordnung liegt in den Kürzungsregeln (8.33) bzw. (8.34). Aus solchen Tafeln kann man *sofort* gekürzte disjunktive oder konjunktive Normalformen ablesen. Grundsätzlich gibt es mehrere Möglichkeiten der Anordnung, die aber alle schließlich auf dieselbe logische Funktion führen.

Zur Erläuterung sei die Funktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit der Wahrheitstabelle und Karnaugh–Tafel in Abb. 8.1 betrachtet.

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1
3	1	1	0	0	1
4	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1
7	1	1	1	0	1
8	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4	00	1 1	1 1	1 0
00	1 1	*	*	*
01	1	*	*	1
11	*	*	*	*
10	0	1	1	1

Abb. 8.1: Wahrheitstabellen einer logischen Funktion y von vier booleschen Variablen x_1, \dots, x_4 und zugehörige Karnaugh–Tafel

Die Funktion ist nur für 10 der insgesamt 16 möglichen Variationen der unabhängigen Variablen x_1, \dots, x_4 definiert. An den nicht erklärten Stellen sind sogenannte „*don't-care-Felder*“ mit „*“ gekennzeichnet. Sie können bei den folgenden Ausführungen wahlweise mit 0 oder 1 belegt werden. Wichtig für die Anordnung ist, dass sich beim *horizontalen* Übergang von einer Spalte zur benachbarten und ebenso beim *vertikalen* Übergang von einer Zeile zur benachbarten immer nur eine Eingangsvariable ändert. Diagonale Übergänge sind nicht gestattet, allerdings solche von der 1. zur 4. Zeile innerhalb einer Spalte und von der 1. zur 4. Spalte innerhalb einer Zeile.

Zunächst wird aus der Tafel eine disjunktive Form abgeleitet. Dazu müssen nach den obigen Ausführungen alle Felder mit $y = 1$ betrachtet werden. Es wird hier mit den beiden Feldern „1. Spalte“, „1. und 2. Zeile“ begonnen. Sie liefern

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}. \quad (8.35)$$

Die beiden Terme auf der linken Seite würde man auch bei der Aufstellung der disjunktiven Normalform aus der 1. und 9. Zeile der Wahrheitstabelle erhalten. Der gekürzte Term auf der rechten Seite von

³⁾Bei mehr als 6 Variablen kommen in der Regel rechnergestützte Verfahren zur Anwendung.

(8.35) kann aber aus der Karnaugh-Tafel *sofort* abgelesen werden, weil sich von der 1. zur 2. Zeile nur x_4 ändert, so dass wir die Kürzungsregel (8.33) anwenden können. Analog könnte man mit anderen „Zweiern“ verfahren. Man nehme z. B. die 1 aus der 2. Spalte und 1. Zeile sowie das *-Feld darunter, welches 1 gesetzt werden kann. Dann erhält man sofort den Term $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$. Dieser kann nun wiederum mit der rechten Seite von (8.35) gekürzt werden, denn

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} = \overline{x_1} \overline{x_3}.$$

Aus den vier Feldern links oben in der Tafel bleibt also nur der 2er-Term $\overline{x_1} \overline{x_3}$ übrig, der alle Variablen enthält, welche sich in den vier Feldern links oben nicht ändern.

Noch günstiger wird es, wenn ein „Achter“ auftritt, der aus zwei vollständigen benachbarten Zeilen oder Spalten besteht, die nur Einsen und *-Felder enthalten. Dies trifft hier für die 2. und 3. Zeile zu. Sie liefern den Term x_4 . Einen weiteren „Achter“ bilden die 2. und 3. Spalte. Er liefert x_2 . Schließlich sei angemerkt, dass Felder auch mehrfach verwendet werden können. Insgesamt liest man aus der Karnaugh-Tafel,

$$y = \overline{x_1} \overline{x_3} + x_1 x_3 + x_2 + x_4. \tag{8.36}$$

Eine gekürzte konjunktive Normalform erhält man, indem man von den Nullen in der Karnaugh-Tafel ausgeht. Man findet dann links unter einen Zweier und recht oben einen Einer, so dass

$$y = (x_1 + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4)$$

folgt. Dieser Ausdruck lässt sich noch weiter vereinfachen.

8.2 Logisches Gatter

8.2.1 Grundlagen

Einen Grundbaustein zur schaltungstechnischen Realisierung logischer Verknüpfungen nennt man *Gatter*. Beim Rechnen mit logischen Variablen spielen die Konjunktion und Disjunktion zusammen mit der Negation eine besondere Rolle. Deshalb sind in der Regel das NAND- und das NOR-Gatter die sogenannten *Grundgatter*. Die entsprechenden Schaltungssymbole zeigt Abb. 8.2.

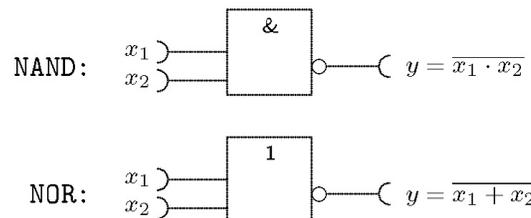


Abb. 8.2: Schaltungssymbole zum NAND- und NOR-Gatter

Die logischen Werte „wahr“ und „falsch“ werden durch gewisse Spannungen repräsentiert, dem H(igh)-Pegel U_H und dem L(ow)-Pegel $U_L < U_H$. Genauer müsste man von *Pegelbereichen* sprechen, die den logischen Werten zugeordnet sind, und U_H bzw. U_L als einen Repräsentanten dieser Bereiche ansehen.⁴⁾

⁴⁾ Grundsätzlich könnte man z.B. auch gewisse Strombereiche mit „wahr“ und „falsch“ identifizieren, was jedoch heutzutage unüblich ist.

Im sogenannten *positiven Logiksystem* werden U_H mit „wahr“ und U_L mit „falsch“ identifiziert, wohingegen im *negativen Logiksystem* die Verhältnisse umgekehrt sind. Alle folgenden Ausführungen beziehen sich auf das positive System.

Liegt beim NAND-Gatter zumindest an einem der Eingänge x_1 oder x_2 das Potential U_L , so liefert der Ausgang $y = U_H$. Nur wenn beide Eingänge „high“ sind, liefert der Ausgang „low“. Schaltet man beide Eingänge zusammen, also setzt man $x_1 = x_2$, so arbeitet das Gatter als logischer Negierer.

Das NOR-Gatter liefert am Ausgang nur dann „high“, wenn beide Eingänge „low“ sind. Würden wir vom positiven zum negativen Logiksystem übergehen, so würde das NOR- zum NAND-Gatter und umgekehrt. Prinzipiell lassen sich alle logischen Verknüpfungen, von einfachen logischen Funktionen angefangen, über Flip-Flops, Zähler, Schieberegister bis hin zu Mikrorechnern, mit einer Schaltung realisieren, die *allein* aus NAND-Gattern (oder *allein* aus NOR-Gatter) besteht. Bei umfangreicheren Verknüpfungen greift man allerdings auf spezielle Schaltkreise zurück.

8.2.2 Schaltkreisfamilien

Gatter wie auch andere integrierte Schaltkreise (IC: integrated circuit) werden mit verschiedenen technologischen Verfahren hergestellt. Die in einer bestimmten Technologie hergestellten IC bilden eine Schaltkreisfamilie.⁵⁾ Die Familien unterscheiden sich neben der Verlustleistung, dem zulässigen Betriebsspannungsbereich sowie den Herstellungskosten vor allem hinsichtlich der Schalt- bzw. Impulslaufzeit. Entsprechend dem Einsatzgebiet muss der Anwender eine geeignete Schaltkreisfamilie auswählen.

Die Definitionen der charakteristischen Zeiten eines Gatters kann der Abbildung 8.3 entnommen werden. U_a ist die Antwort des Gatters auf einen Eingangsimpuls U_e , der mit einer Schaltung der gleichen Schaltkreisfamilie erzeugt wird („systemeigene Flanken“). U_U ist die sogenannte *Umschaltspannung*, die sich einstellt, wenn Ein- und Ausgang des Gatters verbunden werden.⁶⁾ Das Umschalten am Ausgang erfolgt mit gewissen Verzögerungen gegenüber den Eingangsflanken. Als Laufzeit (mittlere Signalverzögerungszeit) des Gatters definiert man

$$\tau = \frac{\tau_{HL} + \tau_{LH}}{2}. \quad (8.37)$$

Bei den Schaltkreisfamilien wird zunächst zwischen *bipolaren* und *MOS-Familien* unterschieden, je nachdem, ob bipolare Transistoren oder MOSFET verwandt werden. Gegenüber der Bipolar- bringt die MOS-Technologie u.a. folgende Vorteile:

- geringerer Bedarf an Chipfläche (bis zu 10% einiger bipolarer IC),
- weniger technologische Herstellungsschritte,
- geringere Verlustleistung.

Besondere Bedeutung haben die nMOS-, pMOS- und CMOS-Familie, je nachdem ob nur n-Kanal-, nur p-Kanal-FET oder beide MOSFET verwendet werden. Die MOS-Technologie wird vor allem bei hochintegrierten IC angewandt.

Bipolare IC zeichnen sich durch höhere Schaltgeschwindigkeiten aus. Die drei wichtigsten Familien sind

⁵⁾Neben Gattern werden z. B. auch die folgenden Schaltungen integriert hergestellt: Flipflops, Schmitt-Trigger, Leitungstreiber, Interface-Schaltungen, Zähler und Schieberegister. Allein die sogenannte TTL-Familie umfasst mehr als 700 Schaltkreistypen.

⁶⁾In der Zeichnung werden die Verzögerungszeiten τ_{LH} bzw. τ_{HL} auf U_U bezogen. Zuweilen wird auch der maximal zulässige Low-Pegel bzw. der minimal zulässige High-Pegel als Bezugspunkt genommen.

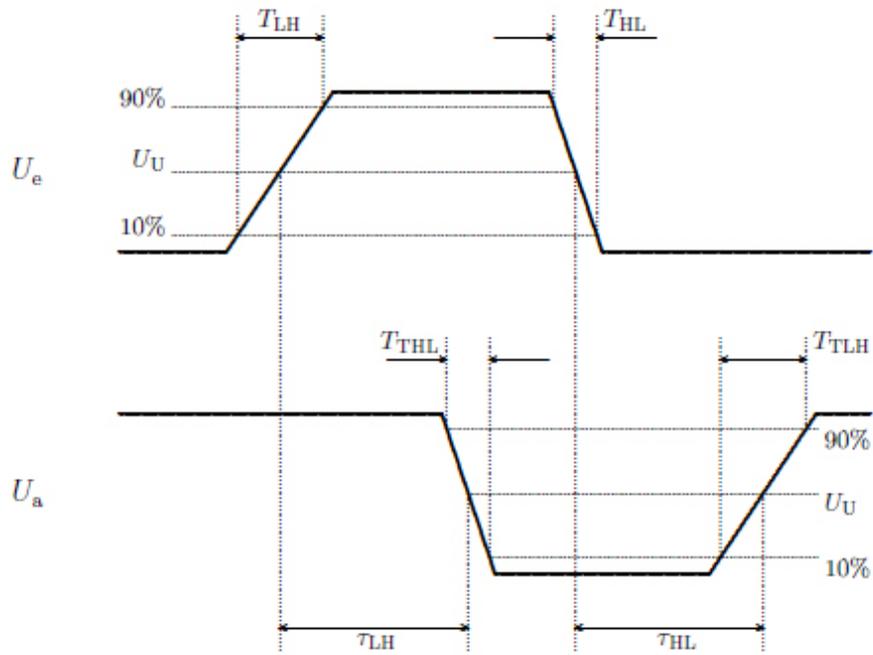


Abb. 8.3: Definition der Schaltzeiten der Ausgangsspannung U_a eines Gatters bei Ansteuerung mit einem systemeigenen Impuls U_e

- TTL (Transistor–Transistor–Logik)

- I²L (integrierte Injektions–Logik) und

- ECL (emittergekoppelte Logik).

Einige Parameter eines typischen Gatters wichtiger Schaltkreisfamilien stellt die folgende Tabelle gegenüber:

Familie	Betriebsspannung V	Verlustleistung P_V /mW	Laufzeit/ τ /ns	Laufzeit-Leistungs- Produkt/ $\tau \times P_V$ /pJ
TTL	5	1..19	1,5..10	4..100
I ² L	0,5..0,85	10 ⁻⁶ ..1	1..10 ⁶	0,05..1
ECL	-5,2..-4,5	30..70	0,6..2	18..70
CMOS	3..15	10 ⁻³ ..10 [*])	3..90	0,002..0,03

Familie	Signalhub $U_H - U_L$ V	Ausgangs- lastfaktor	Flächen- bedarf mm ²	statischer Störspannungs- abstand V
TTL	3,2	10	0,04	0,4
I ² L	0,5..0,85		0,003	
ECL	0,7	20	0,5	0,2
CMOS	3..15	10..100 [*])	0,03	1,2..6

^{*}) abhängig von der Schaltfrequenz

Mit ECL-Gattern werden derzeit die kleinsten Gatter-Laufzeiten (Schaltzeiten) erreicht, allerdings bei relativ großen Verlustleistungen von 30 .. 70mW. In ECL-Technologie werden z. B. Zentraleinheiten von Rechnern gefertigt.

In der Regel bedingen geringe Verlustleistungen große Schaltzeiten und umgekehrt. Deshalb werden beide Parameter im *Laufzeit-Leistungs-Produkt* $\tau \times P_V$ zusammengefasst. Dieses sollte möglichst klein sein.

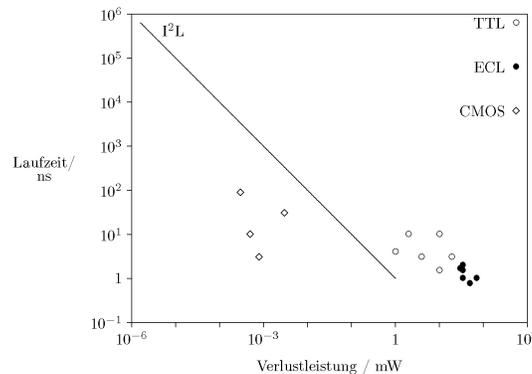


Abb. 8.4: Laufzeit und Verlustleistung einiger Schaltkreisfamilien

Abbildung 8.4 illustriert die gegenwärtige Situation. Zu einer Familie gibt es wiederum viele Unterfamilien, so dass in der Abbildung mehrere gleiche Zeichensymbole auftreten, die allerdings nicht das gesamte Sortiment umfassen. Bei den TTL-Familien ist neben der Standard-TTL mit $\tau \times P_V = 10\text{ns} \times 10\text{mW}$ vor allem die Low-Power-Schottky-TTL (LS-TTL) mit $\tau \times P_V = 10\text{ns} \times 2\text{mW}$ hervorzuheben.

Mit MOS-Logikschaltungen werden relativ große Störspannungsabstände erzielt, wenn man sie bei größeren Betriebsspannungen betreibt. Ihre geringe Verlustleistung und kleiner Chip-Flächenbedarf erlauben eine relativ kompakte Bauweise, was sie besonders geeignet macht für portable, batteriegespeiste Geräte. Die relativ junge I²L-Familie zeichnet sich durch ihren äußerst geringen Flächenbedarf aus. Darüber

hinaus kann man durch Veränderung des Injektionsstromes die Schaltzeit und die Leistungsaufnahme über mehr als 6 Größenordnungen steuern, und dies auch während des Betriebes der Schaltung. Man kann somit extrem geringe Verlustleistungen bis unter 1nW erreichen, wenn keine allzu großen Anforderungen hinsichtlich der Schaltgeschwindigkeit gestellt werden.

Der *Ausgangslastfaktor* (*fan-out factor*) gibt die maximale Anzahl gleichwertiger Gatter an, mit denen der Ausgang eines solchen Gatters belastet werden kann, so dass die Ausgangsspannung U_y den zulässigen L- bzw. H-Pegelbereich nicht verlässt, wenn $U_y = U_L$ bzw. $U_y = U_H$ gelten müsste. Bei kleineren Schaltgeschwindigkeiten erreicht man mit CMOS-Gattern ein fan-out von bis zu 100. Will man in einer komplexeren digitalen Schaltung mit einem Gatter eine Vielzahl anderer Komponenten ansteuern, so müssen spezielle Treiber verwendet werden, die auch bei größeren Ausgangsströmen noch steile Schaltflanken liefern. So gibt es z. B. in den Schaltkreisfamilien verschiedene Takt- und Leitungstreiber.

Die IC-Baureihe 74HCT*** ist eine schnelle TTL-kompatible Variante der CMOS-Familie. Ihr Laufzeit-Leistungsprodukt $\tau \times P_V$ beträgt etwa $10\text{ns} \times 10^{-1}\text{mW}$ bei Schaltfrequenzen um 100kHz. Dabei zeichnet sie sich durch folgende Eigenschaften aus:

- bis zu Schaltfrequenzen von ca. 5MHz wesentlich geringere Verlustleistung als Schaltkreise der LS-TTL
- Schaltgeschwindigkeit etwa 5mal so groß wie bei der Standard-CMOS (vergleichbar mit LS-TTL)
- garantierte Ausgangsströme ca. 10mal größer als bei der Standard-CMOS
- Pincompatibilität zur Standard-TTL (bis auf wenige Ausnahmen)

Damit können in digitalen Schaltungen Standard-TTL-Bausteine nahezu problemlos durch solche der HCT-Baureihe ersetzt werden.

8.2.3 TTL-NAND-Gatter

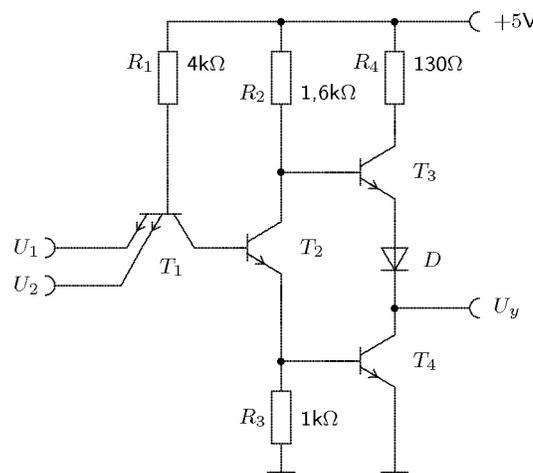


Abb. 8.5: Schaltung eines Standard-TTL-Grundgatters (logisches NAND)

Ein Grundgatter der Standard-TTL ist das NAND-Gatter. Seine innere Schaltung zeigt die Abbildung 8.5. Charakteristisch ist der Mehrfachemittertransistor am Eingang. Liegt zumindest ein Eingang

auf Low-Potential U_L von nahezu 0V (logisch: „falsch“), so gelangt T_1 in Sättigung bei einem Basisstrom von ca. 1mA. Liegen beide Eingänge auf Low-Potential, so teilt sich dieser Strom auf beide Eingänge auf. Der Kollektorstrom von T_1 ist hierbei nahezu null, so dass T_2 sperrt und an seinem Kollektor High-Potential U_H (logisch: „wahr“) liegt. Nur wenn alle Eingänge auf $U_H \gtrsim 3,6V$ liegen, sperrt die Basis-Emitter-Diode von T_1 . Die Basis-Kollektor-Strecke von T_1 leitet hierbei (Inversbetrieb) und sein Kollektorstrom fließt in die Basis von T_2 , so dass dieser ebenfalls leitet. Der Kollektor von T_2 liegt dann auf Low-Potential, das allerdings um den Spannungsabfall über R_3 angehoben ist.

Grundsätzlich könnte man für $R_3 \ll R_2$ schon am Kollektor von T_2 die gewünschte NAND-Verknüpfung der Eingangsvariablen abgreifen. Allerdings würde die Schaltung dann bei kapazitiver Last für die Low→High-Flanken am Ausgang keine kurzen Schaltzeiten liefern, müsste doch dann die Lastkapazität über den relativ großen Kollektorwiderstand $R_2 = 1,6k\Omega$ umgeladen werden. Mit der aus T_3 und T_4 gebildeten Gegentaktendstufe („Totem-pole“-Endstufe) wird der Ausgangswiderstand R_a des Gatters auch bei $U_y = U_H$ relativ niedrig. Für $U_y = U_H$ gilt dann $R_{a,H} \approx 70\Omega$. Leitet andererseits T_4 (T_3 sperrt dann), so erhält man $U_y = U_L$ mit dem noch geringeren Ausgangswiderstand $R_{a,L} = 10 \dots 15\Omega$.

Die Pegelbereiche eines solchen Gatters sind:

L-Pegelbereich $\rightarrow 0..0,4V$

H-Pegelbereich $\rightarrow 2,4..5V$.

Dazwischen liegt der „verbotene“ Bereich, der an den verschiedenen Punkten digitaler Schaltungen in der Regel nur für kurze Zeit, während der Schaltphasen, angenommen wird.

Es gibt auch Gatter, die mehr als 2 Eingänge haben, so z. B. 3, 4 oder 8 Eingänge. Bleibt ein Eingang eines solchen NAND-Gatters unbeschaltet, so liegt er virtuell auf H-Pegel und hat somit keinen Einfluss auf die logische Funktion. Generell sollte man aber im Interesse der Schaltsicherheit ungenutzte Eingänge eines NAND-Gatters auf H-Potential legen, bzw. beim NOR-Gatter auf L-Potential.

Darüber hinaus sei erwähnt, dass es in den verschiedenen Schaltkreisfamilien sogenannte *Leistungsgatter* gibt, die einen größeren Ausgangslastfaktor haben, als das jeweilige Standard-Gatter.

Im Baustein SN7400 sind vier NAND-Gatter auf einem Chip integriert.⁷⁾ Die Anschlussbelegung zeigt Abb. 8.6.

Eine beachtliche Verringerung der Verlustleistung von 10mW bei der Standard-TTL auf 2mW bei der LS-TTL wird erreicht, indem eine Schottky-Diode parallel zur Basis-Kollektor-Strecke der Transistoren geschaltet wird. Bei einem solchen „Schottky-Transistor“ kann die Kollektor-Emitter-Spannung nicht unter 0,3V sinken, so dass die Transistoren nicht in Sättigung gelangen. In einem solchen LS-TTL-Gatter werden die Widerstände R_1 , R_2 und R_3 etwa 5mal so groß wie beim Standard-TTL-Gatter in Abb. 8.5 gewählt. Die LS-TTL-Baureihe wird mit SN74LS** gekennzeichnet — z. B. enthält der IC SN74LS00 vier NAND-Gatter mit der Anschlussbelegung wie in Abb. 8.6.

⁷⁾Die Bezeichnung „SN“ verweist auf den Hersteller *Texas Instruments* bzw. *Motorola*. Einige äquivalente Typen sind D 100 (frühere DDR-Produktion), MC 846 (*Motorola Fast*), HD 100 (*Hitachi*) und N (*VALVO*).

Die ersten beiden Ziffern „74“ kennzeichnen den Temperaturbereich 0...70°C. Die Reihe 54 gilt für den Temperaturbereich -55...125°C und SN84 für -25...85°C.

Die letzten beiden Ziffern „00“ das 4-fach-NAND-Gatter. Das 4-fach-NOR-Gatter in dieser Reihe trägt die Bezeichnung SN7402.

Die Gehäuseform wird mit ein oder zwei Buchstaben am Ende angegeben. So bedeutet z. B. SN7400 N, dass es sich um „Plastic dual in line“ handelt.

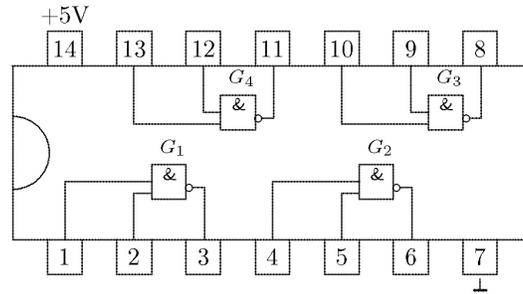


Abb. 8.6: Anschlußbelegung der integrierten Schaltung SN7400

8.2.4 Gatter mit offenem Kollektorausgang

Die Ausgänge von zwei Gattern, wie wir sie oben betrachtet haben (z. B. in Abbildung 8.5) dürfen nicht zusammengeschlossen werden, würden doch dann bei einander inversen Ausgangszuständen große Ströme fließen, die zum einen die Gatter thermisch zerstören und zum anderen nicht definierte logische Zustände hervorrufen könnten. Gatter mit offenem Kollektor bieten hier eine Alternative. Diese Gatter haben in der Ausgangsstufe einen npn-Transistor, dessen Emitter an Masse liegt und dessen intern unbeschalteter Kollektor als Gatterausgang fungiert. Die Ausgänge von solchen Gattern dürfen zusammengeschlossen und mit einem gemeinsamen Kollektorwiderstand R_C betrieben werden (Abbildung 8.7).

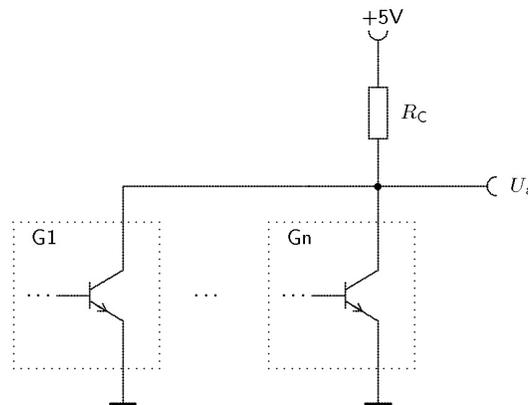


Abb. 8.7: Verschaltung von n Gattern $G_1 \dots G_n$ mit offenen Kollektorausgängen

Nur dann, wenn alle Gatter G_1 bis G_n am Ausgang logisch „High“ liefern, also ein jeder der Ausgangstransistoren sperrt, liegt am gemeinsamen Knoten auch „High“ an. Sobald ein oder mehrere Gatter „Low“ liefern, liegt am gemeinsamen Knoten auch „Low“ an. Damit wird also eine n -fache logische Konjunktion der einzelnen Gatterausgänge realisiert. Diese Art der Schaltung heisst auch *Wired-AND-Schaltung*, weil sie durch die äußere Verdrahtung realisiert ist. Der Ausgang eines Gatters mit offenem Kollektor ist nur im „Low“-Ausgangszustand niederohmig. Man nennt diesen Ausgang deshalb auch *Aktiv-Low-Ausgang*. Der IC SN7409 enthält 4 AND-Gatter mit je zwei Eingängen und einem offenen Kollektorausgang. Die Pin-Belegung ist wie beim IC SN7400 (Abbildung 8.6).

8.2.5 Gatter mit Tristate-Ausgängen

Die Gatter $G_1 \dots G_i \dots G_n$ mit offenem Kollektor seien wie in der Abbildung 8.7 zusammenschaltet. Alle Gatter mögen am Ausgang fest auf logisch „High“ liegen (Ausgangstransistor sperrt), und nur bei einem Gatter, G_i , lassen wir beide Zustände zu (Ausgangstransistor sperrt oder leitet). Dann ist der Ausgang U_{aus} offenbar allein durch den Zustand von G_i bestimmt. Das können wir ausnutzen, um den logischen Zustand einer Signalleitung wahlweise von verschiedenen Gattern zu bestimmen, die wir uns an der Buchse U_{aus} angeschlossen denken: Alle konstant hochohmigen Gatter sind wie „abgeschaltet“, und nur das verbliebene Gatter bestimmt dann den logischen Zustand der Signalleitung. Dies nennt man *Bus-System*.

Bei diesem Verfahren ist der relativ große Ausgangswiderstand R_C nachteilig, der wirksam ist, wenn „High“ auf der Signalleitung liegt. Deshalb gibt es spezielle Gatter mit *Tristate-Ausgängen*, die im Ausgang eine Gegentaktstufe haben und somit bei „High“ wie bei „Low“ einen niederohmigen Ausgang besitzen. Wesentlich ist, dass ihr Ausgang im Vergleich zu üblichen Gattern einen zusätzlichen dritten Ausgangszustand zulässt: den *hochohmigen* Ausgang. Dies wird über den zusätzlichen *Enable*-Eingang (EN-Eingang) gesteuert:

$$\overline{\text{EN}} = \begin{cases} 1 & : \text{Ausgang hochohmig} \\ 0 & : \text{Ausgang niederohmig} \end{cases}$$

Somit können Tristate-Gatter am Ausgang zusammenschaltet werden, sofern immer nur ein Gatter gleichzeitig am Ausgang niederohmig ($\overline{\text{EN}} = 0$) geschaltet wird. Gatter mit $\overline{\text{EN}} = 1$ sind vom Bus abgeschaltet und können so angesehen werden, als wären sie nicht vorhanden.

Tristate Ausgänge finden sich vor allem in komplexeren digitalen Schaltungen.⁸⁾

8.3 Kombinatorische Schaltungen

Kombinatorische Schaltungen sind statische Zuordner, bei denen N logische Ausgangswerte

$$\mathbf{y} = y_1, \dots, y_n, \dots, y_N$$

durch die M momentanen Eingangsvariablen

$$\mathbf{x} = x_1, \dots, x_m, \dots, x_M$$

bestimmt sind,

$$y_n = f_n(\mathbf{x}) .$$

Kombinatorische Schaltungen setzen somit logische Funktionen technisch um, wobei im Unterschied zu sequentiellen Schaltungen (s.u.) Variablenspeicher *keine* Rolle spielen. Der Funktionswert liegt nach dem Anlegen der Eingangsvariablen sofort (nach den Schaltzeiten) am Ausgang an. Frühere Schaltungszustände spielen keine Rolle, sie werden „vergessen“.

⁸⁾Tristate-Ausgänge hat z.B. der IC SN74173 (4 D-Flip-Flops).

8.3.1 Grundschaltungen

8.3.2 Test auf Gleichheit

Zwei Binärworte sind gleich, wenn Sie in einer jeden Binärstelle übereinstimmen. Ein Tester auf Gleichheit testet zunächst eine jede Binärstelle x_1 und x_2 des ersten bzw. zweiten Binärwortes auf Gleichheit. Die entsprechende logische Verknüpfung heisst *Äquivalenz*, mit der Wahrheitstabelle:

x_1	x_2	$x_1 \equiv x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Die zugehörige disjunktive Normalform lautet

$$\begin{aligned}
 y &= x_1 \equiv x_2 \\
 &= \overline{x_1} \overline{x_2} + x_1 x_2 \\
 &= \overline{\overline{\overline{x_1} \overline{x_2}} \cdot \overline{\overline{x_1} x_2}} .
 \end{aligned}$$

Die Äquivalenz-Operation kann auch als Negation der Antivalenz aufgefasst werden (vgl. Gl. (8.32) auf S. 162),

$$\begin{aligned}
 y &= x_1 \equiv x_2 \\
 &= \overline{x_1 \oplus x_2}
 \end{aligned}$$

Die Antivalenz kann mit 4 NAND-Gattern realisiert werden (Abb. 8.8).

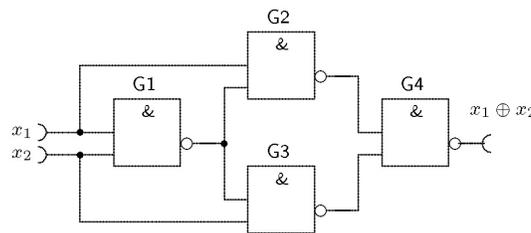


Abb. 8.8: Antivalenz mit 4 NAND-Gattern

8.3.3 Binäraddition

Zwei Binärzahlen werden arithmetisch addiert, indem zunächst die niederwertigsten Stellen x_1 und x_2 addiert werden und gegebenenfalls ein Übertrag u auf die höherwertige Stelle erfolgt, ebenso, wie es bei der Addition im Dezimalsystem üblich ist. Dazu sind letztlich zwei logische Funktionen zu realisieren:

x_1	x_2	Summe s	Übertrag u
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

Somit stellt sich die Operation der arithmetrischen Summation zweier Binärziffern x_1 und x_2 dar durch die beiden logischen Operationen Antivalenz — für die Summe s — und Konjunktion — für den Übertrag u ,

$$\begin{aligned} s &= x_1 \oplus x_2 \\ u &= x_1 \cdot x_2 . \end{aligned}$$

Dabei werden die Ziffern „0“ und „1“ des binären Zahlensystems mit den logischen Zuständen „falsch = 0“ bzw. „wahr = 1“ der Booleschen Algebra identifiziert.

Eine logische Schaltung, welche die obige Wahrheitstabelle realisiert, heisst *Halbaddierer* oder auch *Halbadder*. Das entsprechende Schaltungssymbol zeigt die Abbildung 8.9.

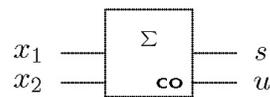


Abb. 8.9: Schaltsymbol eines Halbadder

Eine schaltungstechnische Realisierung des Halbadders mit NAND-Gattern kann man wie folgt erreichen: Die Summe s erzeugt die Antivalenz-Schaltung in Abbildung 8.8, und der Übertrag u entsteht durch Negation des Ausgangs vom Gatter G1 dieser Schaltung.

Ein Halbadder hat also zwei Eingänge für die Operanden x_1 und x_2 sowie zwei Ausgänge für die Summe s und den Übertrag u . Dies wird bei der Addition der niederwertigsten Binärstelle einer Binärzahl benötigt. Für alle weiteren Binärstellen benötigen wir ein *Volladder*, welches gegenüber dem Halbadder einen zusätzlichen Eingang u_e für den Übertrag von der vorherigen Stelle besitzt. Die Wahrheitstabelle des Volladders lautet:

x_1	x_2	u_e	Summe s	Übertrag u
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Das Schaltungssymbol des Volladders zeigt die Abbildung 8.10.

Man kann das Volladder im wesentlichen aus zwei Halbaddern aufbauen, wie es die Abbildung 8.11 zeigt.⁹⁾

⁹⁾Volladder sind auch monolithisch integriert verfügbar, so bilden zum Beispiel die ICs SN7480 ein 1-Bit-Volladder und SN7483 ein 4-Bit-Volladder.

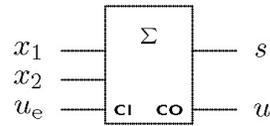


Abb. 8.10: Schaltsymbol eines Volladders. CI steht für *carry in* und CO für *carry out*

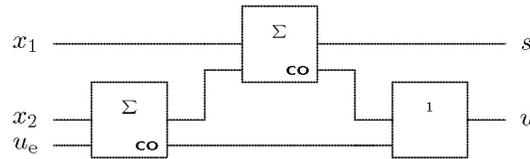


Abb. 8.11: Volladder aus zwei Halbaddern und OR-Gatter

8.3.4 Codeumsetzer — Siebensegmentanzeige

In den verschiedensten Geräten (z. B. Multimetern, Digitaluhren und Taschenrechnern) zeigt man häufig eine dual codierte Dezimalzahl mit einem Anzeigeelement aus sieben Segmenten an, wie es die Abbildung 8.12 zeigt.

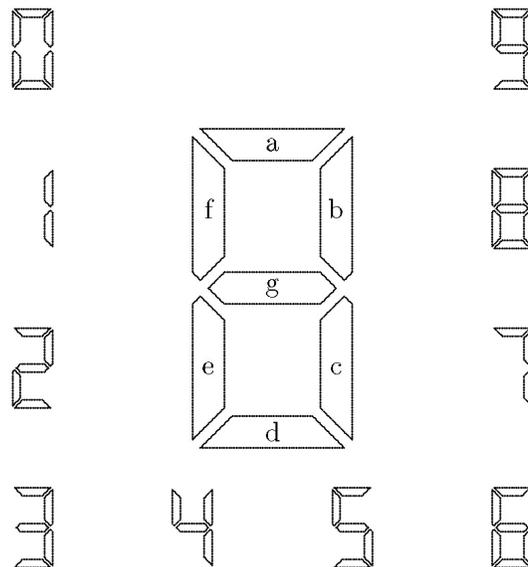


Abb. 8.12: Siebensegment-Anzeigeelement

Für eine solche Anzeige müssen sieben logische Funktionen in vier Variablen realisiert werden. Für das a-Segment ist die Wahrheitstabelle in der Abb. 8.1 (Seite 163) bereits angegeben. Dieses Segment leuchtet nicht (d.h., $y \equiv a = 0$) nur bei den Ziffern „1“ und „4“.¹⁰⁾ Da es sich bei dieser Anzeige um eine Standardaufgabe handelt, gibt es für eine derartige Decodierung spezielle IC, z. B. SN 7446, wenngleich

¹⁰⁾Zuweilen stellt man die „6“ auch *ohne* leuchtendem a-Segment dar.

man auch diese logischen Verknüpfungen allein mit NAND-Gattern realisieren kann.

8.4 Sequentielle Schaltungen

Sequentielle Schaltungen enthalten interne Speicher

$$\mathbf{s} = s_1, \dots, s_k, \dots, s_K \ .$$

Bei ihnen hängen die Ausgangswerte y_n neben den momentanen Eingangsvariablen \mathbf{x} auch vom aktuellen Zustand der Speicher ab,

$$y_n = f_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \ .$$

Die systematische Entwicklung sequentieller Schaltungen ist deshalb im allgemeinen bedeutend komplizierter als die von kombinatorischen.

Die Vielfalt sequentieller Schaltungen reicht von simplen Schaltungen zur Impulsbildung und -formung über verschiedene Flipflops, Schieberegister und Zähler bis hin zu Rechenschaltungen und letztlich solch komplexen Schaltungen wie Mikroprozessoren, die z.T. aus mehreren Millionen Transistoren bestehen. Hier können jedoch nur einige elementare Grundschaltungen behandelt werden.

8.4.1 Schmitt-Trigger

Komplexere digitale Schaltungen werden häufig getaktet, wobei die Taktimpulse extrem kurz werden können. Je rascher eine digitale Schaltung getaktet werden kann, desto schneller erfolgt die Informationsverarbeitung, was z. B. in komplexen Rechenanlagen äußerst wichtig ist. Grundsätzlich kann die Taktperiode ungefähr bis zur Gatterlaufzeit verringert werden. Bei der Standard-TTL liegt sie bei 10ns, so dass die Taktfrequenz nahezu 100MHz betragen kann. Hinzu kommt, dass ideale Taktimpulse möglichst rechteckförmig sein sollen, d.h., die Impulse sollen möglichst steile Flanken aufweisen. Bei der Taktfrequenz von 10MHz (= Grundfrequenz) müssen dazu harmonische Oberwellen von mehreren 10MHz von der Schaltung noch verarbeitet werden können.

In realen Schaltungen werden durch die verschiedensten parasitären Tiefpässe die Flanken der Rechteckimpulse abgeflacht, so dass besonders in zeitkritischen (hochfrequenten) Fällen die Rechteckimpulse regeneriert werden müssen. Dazu dienen Schmitt-Trigger, die zum Teil im IC integriert sind.¹¹⁾ Eine einfache Möglichkeit zur Flankenversteilerung mit zwei Gattern bietet der Schmitt-Trigger in Abbildung 8.13.

8.4.2 Astabiler Multivibrator

Eine einfache Möglichkeit zur Erzeugung hochfrequenter Rechteckimpulse zeigt die Abbildung 8.14. Die Funktion der Schaltung ist ähnlich jener mit Bipolartransistoren im Schalterbetrieb anstelle der Gatter (früherer Praktikumsversuch). Die Dioden dienen dem Schutz der Schaltkreise, sie unterdrücken die sonst

¹¹⁾Der IC SN7414 beinhaltet sechs Negatoren mit Schmitt-Trigger-Eingängen. Der IC SN74132 hat vier NAND-Gatter mit je zwei Schmitt-Trigger-Eingängen. Der IC SN74540 enthält 8 invertierende Bus-Leistungstreiber mit Schmitt-Trigger-Eingängen. Der IC CDC208N ist ein Taktreiber der Taktimpulse auf TTL-Pegeln mit einer Flankendauer von ca. 0,5ns erzeugt bei Ausgangsströmen von $4 \times 40\text{mA}$.

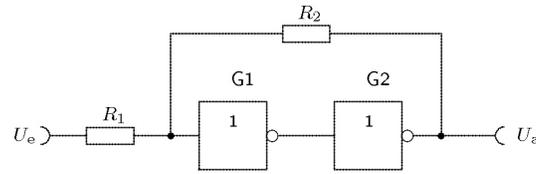


Abb. 8.13: Schmitt-Trigger mit Gattern (Negatoren)

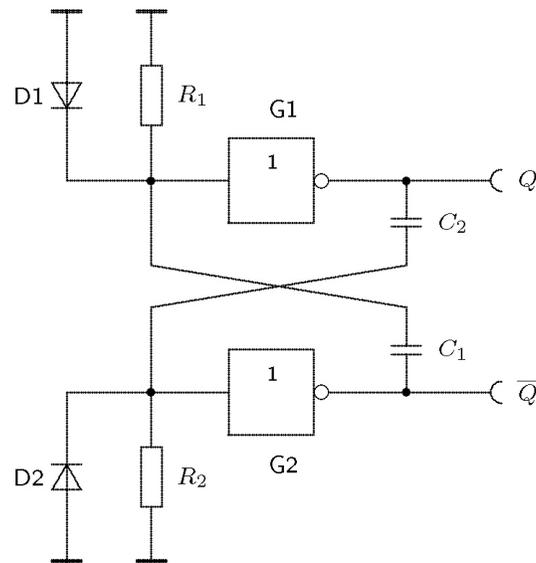


Abb. 8.14: Astabiler Multivibrator mit Gattern (Negatoren)

beim Umschalten auftretenden negativen Spannungsspitzen. Werden Standard-TTL-Gatter verwendet, so arbeitet der Multivibrator mit der Frequenz

$$f \approx \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}. \tag{8.38}$$

In hochwertigen digitalen Systemen werden quarzstabilisierte Taktgeneratoren verwendet.

8.4.3 Monostabiler Multivibrator (Univibrator)

Die Schaltung des astabilen Multivibrators in Abbildung 8.14 kann leicht in die eines monostabilen Multivibrators übergeführt werden, indem ein RC-Glied durch eine galvanische Kopplung ersetzt wird, wie es die Abbildung 8.15 zeigt.

Solange der Eingang x auf 1 liegt, gilt für den Ausgang $Q = 0$ und entsprechend $\bar{Q} = 1$. Springt nun x auf 0, so schaltet das Gatters G1 auf $Q = 1$. Der positive Spannungssprung gelangt über die Kapazität C auf den Eingang des Negators G2. Mit der Zeitkonstanten

$$\tau = RC$$

wird diese Spannung über R abgebaut bis sie die Schaltschwelle von G2 erreicht, bei der \bar{Q} von 0 auf 1 springt.

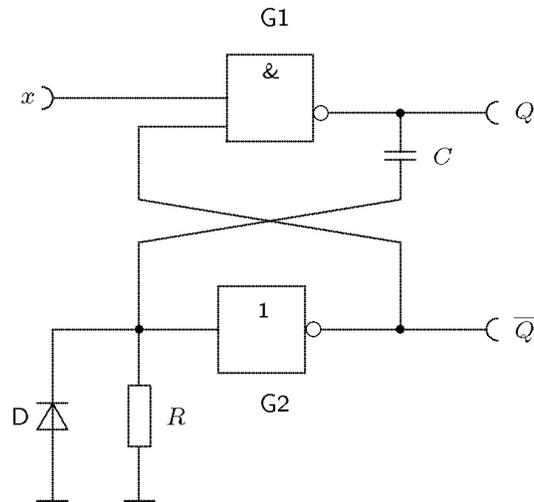


Abb. 8.15: Monostabiler Multivibrator mit zwei Gattern, NAND G1 und Negator G2

Solange $\bar{Q} = 0$ gilt, ist $Q = 1$, unabhängig davon, welche Zustände am Eingang x liegen. Erst nach dem Rückkippen des Ausgangs \bar{Q} von 0 nach 1 gewinnt der Eingang wieder an Einfluss: Gilt unmittelbar nach dem Rückkippen $x = 0$, so bleibt $Q = 1$, und bei $x = 1$ würde Q von 1 auf 0 springen.

Univibratoren werden zur Impulsformung oder als Verzögerungsglied verwendet.

8.4.4 Bistabiler Multivibrator (Flipflop)

Werden beim astabilen Multivibrator in Abbildung 8.14 beide Rückkopplungen galvanisch ausgelegt, so entsteht der bistabile Multivibrator in Abbildung 8.16.

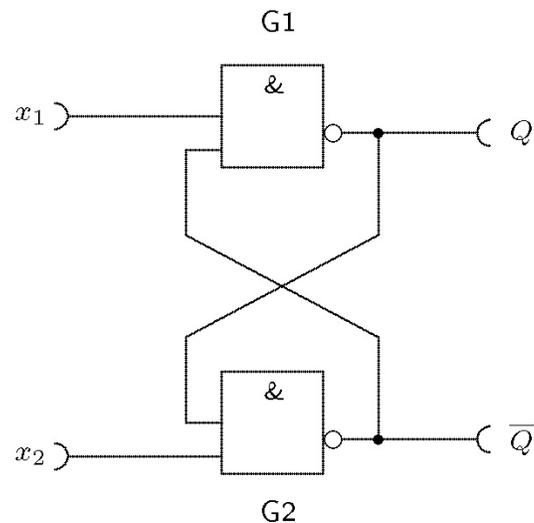


Abb. 8.16: Bistabiler Multivibrator (Basis-Flip-Flop)

Er bildet das Basis-Flipflop (Basis-FF) für komplexere sequentielle Schaltungen. Die Wahrheitstabelle des FF lautet:

x_1	x_2	Q	\bar{Q}
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	?	?

Die Ausgänge Q und \bar{Q} sind mit Ausnahme von $x_1 = x_2 = 0$ einander invers. Für $x_1 = x_2 = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten: entweder gilt $Q = 0$ und somit $\bar{Q} = 1$ oder umgekehrt. Dieser undefinierte Zustand wird vermieden, wenn das FF invers angesteuert wird, wenn also $x_2 = \bar{x}_1$ gilt.

8.4.5 Entpreller

Mechanische Schalter prellen in Abhängigkeit von ihrer Bauart mehr oder weniger häufig. Steuert man mit ihnen ein Gatter wie in Abbildung 8.17 (oben) an, so hat man in den Schaltphasen keine definierten Eingangszustände, und wegen der hohen Schaltgeschwindigkeit der TTL-Gatter auch keine definierten Ausgangszustände. Mit Hilfe eines FF kann eine einfache Schaltung zur Entprellung aufgebaut werden (Abbildung 8.17 (unten)).

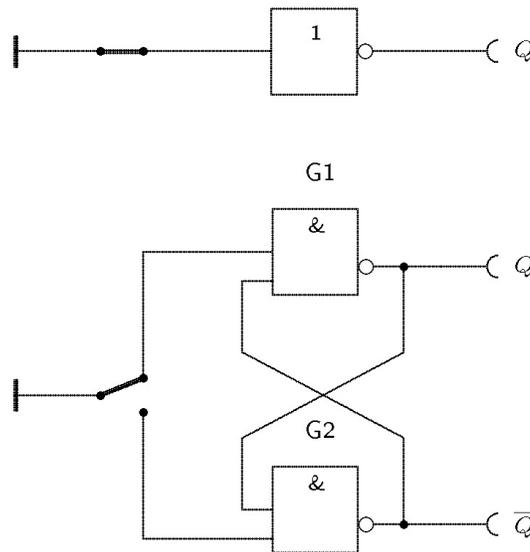


Abb. 8.17: Direkte Ansteuerung eines Gatters mit mechanischem Schalter (oben) und entprellte Variante (unten)

8.4.6 RS-Flipflop

Das Basis-FF in Abbildung 8.16 kann als binärer 1-Bit-Speicher aufgefasst werden, der die einkommende Information ($x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ oder umgekehrt) sofort übernimmt. In umfangreicheren Schaltungen

möchte man aber die Informationsübernahme steuern. Man benötigt also ein „Tor“, das mit einem Synchronisationsimpuls wahlweise geöffnet werden kann. Ist das Tor geschlossen, so soll die Information gespeichert werden, d.h., der Eingangspegel soll dann irrelevant für den Ausgangszustand Q sein.

Das sogenannte RS-Flipflop („Reset-Set-Flipflop“ (RS-FF)) in Abbildung 8.18 zeigt hierfür eine Möglichkeit auf. Die Gatter G1 und G2 dienen als Tor, das über den Eingang CP (Takt, „clock pulse“) geöffnet

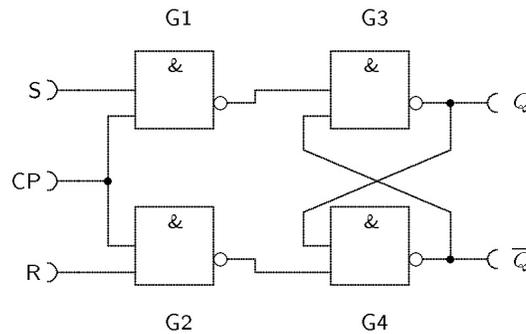


Abb. 8.18: RS-Flip-Flop

(CP = 1) oder geschlossen (CP = 0) werden kann. Die Zustandstabelle des RS-FF lautet wie folgt:

S_n	R_n	Q_{n+1}
0	0	Q_n
1	0	1
0	1	0
1	1	unzulässig

Wir denken uns den Takteingang CP durch Taktimpulse (kurze High-Impulse) angesteuert. Dann bezeichnet S_n und R_n die Zustände am Setz- bzw. Rücksetzeingang des RS-FF während des $(n + 1)$ -ten Taktes, und Q_n sei der Ausgangszustand nach dem n -ten Takt. Für $S_n = R_n = 0$ liegen die Ausgänge der Tore G1 und G2 auf 1, unabhängig von CP. Folglich bleibt mit der Taktung der Ausgang unverändert: $Q_{n+1} = Q_n$. Für $S_n = \overline{R_n}$ übernimmt das RS-FF mit der Taktung die Eingangsinformation: $Q_{n+1} = S_n$. Der Zustand $S_n = R_n = 1$ ist unzulässig, weil sich dann nach der Taktung am Ausgang Q ein unbestimmter Zustand einstellt, über den zufällige Asymmetrien der Schaltung entscheiden.

Das Schaltsymbol des RS-FF zeigt Abbildung 8.19.

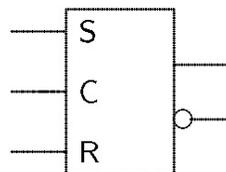


Abb. 8.19: Schaltsymbol des RS-Flip-Flop

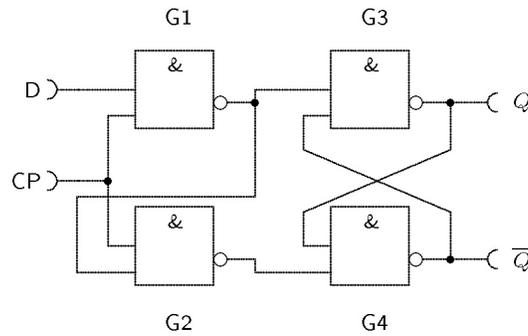


Abb. 8.20: D-Flip-Flop

8.4.7 D-Flipflop

Beim RS-FF haben wir gesehen, dass die asymmetrische Ansteuerung ($S_n = \overline{R_n}$) von besonderem Interesse ist, denn nur dann kann das FF Information übernehmen. Das D-Flipflop („Delay-Flipflop“) in Abbildung 8.20 entsteht durch leichte Modifikation des RS-FF, indem der Ausgang von G1 auf den R-Eingang geführt wird. Damit werden bei der Taktung ($CP = 1$) die Tor-Gatter G1 und G2 immer invers angesteuert. Der unzulässige Fall $S_n = R_n = 1$ beim RS-FF kann somit beim D-FF niemals auftreten. Hier gilt

$$Q_{n+1} = D_n ,$$

das D-FF übernimmt also mit der Taktung die Information D_n . Das Tor ist hier solange geöffnet, wie $CP = 1$ gilt. Man nennt dieses zustandsgesteuerte D-FF auch *Latch*.

Dagegen gibt es auch *einflankengesteuerte (einflankengetriggerte)* D-FF. Hier wird die Eingangs-Information an D mit der Vorderflanke (Low-High-Flanke) des Taktes an CP übernommen. Gilt $CP = 1$ für längere Zeit, also mehr als einige 10ns (etwa TTL-Flankendauer), so ist das Tor wieder geschlossen. Damit unterscheidet sich das *einflankengesteuerte* vom Latch in Abbildung 8.20. Die entsprechenden Schaltsymbole sind in der Abbildung 8.21 dargestellt. Der IC SN7474 enthält zwei einflankengesteuerte D-FF und der

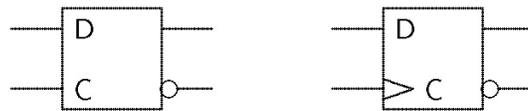


Abb. 8.21: Schaltsymbol des D-Latches (links) und des einflankengesteuerten D-FF (rechts)

IC SN7475 vier D-Latches, wovon jeweils zwei ein gemeinsames Pin für den Takt haben.

Die D-FF im IC SN7474 sind mit zwei zusätzlichen Eingängen ausgestattet: dem Preset- und Clear-Eingängen. Sind diese unbeschaltet oder auf High-Potential, so sind sie bedeutungslos. Mit $Clear = 0$ ($Preset = 1$) wird der Ausgang zurückgesetzt, auf $Q = 0$, und mit $Preset = 0$ ($Clear = 1$) wird der Ausgang gesetzt, auf $Q = 1$. Solange $Clear = 0$ und $Preset = 1$ gilt, folgt $Q = 0$, unabhängig von der Belegung des D-Einganges und des Taktes CP. Entsprechend gilt $Q = 1$ solange $Preset = 0$ und $Clear = 1$, unabhängig von D und CP. Das Schaltsymbol dieses D-FF sowie die Pin-Belegung beim IC SN7474 zeigt die Abbildung 8.22.

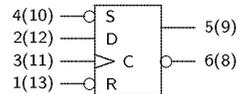


Abb. 8.22: Schaltsymbol eines einflankengetriggerten D-FF mit low-aktivem Setz- und Rücksetzeingang. Die Zahlen geben die Pin-Nummern beim IC SN7474 für das erste (zweite) D-FF an. Die Betriebsspannung liegt zwischen Pin 7 (Masse) und Pin 14 (+5V)

8.4.8 JK-Flipflop

Das JK-Flipflop (JK-FF) enthält zwei RS-FF, den sogenannten Master und den Slave. Der Master übernimmt die Eingangsinformation mit der Vorderflanke (0-1-Flanke) des Taktes und übergibt sie dem Slave mit seiner Rückflanke (1-0-Flanke). Nur die Ausgänge des Slave sind nach außen geführt. Abbildung 8.23 zeigt die Schaltung des JK-FF.

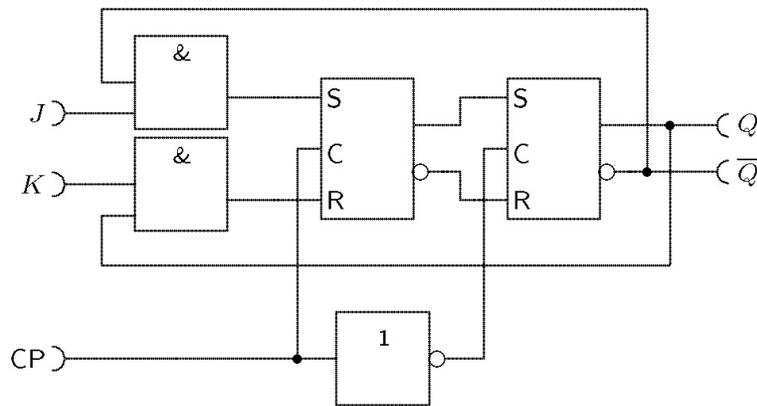


Abb. 8.23: JK-Flip-Flop aus zwei RS-FF und drei Gatter

Die Wahrheitstabelle des JK-FF lautet

J	K	Q_{n+1}
0	0	Q_n
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q_n}$

Das Schaltsymbol des JK-FF zeigt Abbildung 8.24.

Im Unterschied zum RS-FF brauchen die beiden Eingänge des JK-FF nicht notwendig invers angesteuert werden. Für $J = K = 1$ wird mit jedem Taktimpuls des Ausgang negiert. Schaltet man mehrere JK-FF im Modus $J = K = 1$ hintereinander, indem man den Q -Ausgang des einen auf den Clock-Eingang des nächsten führt, so erreicht man mit einem jeden JK-FF eine Halbierung der Taktfrequenz. Interpretiert man die Q -Ausgänge als Binärzahl, so erhält man auf diese Weise einen Zähler für die Taktimpulse am Takt-Eingang des ersten JK-FF. Der schaltungstechnische Aufwand kann dabei gering gehalten werden, indem anstelle einzelner NAND-Gattern integrierte JK-FF verwendet werden. Der IC SN7476 enthält zwei JK-FF mit low-aktiven Setz- und Rücksetzeingängen.

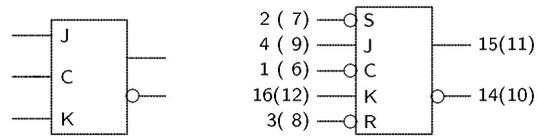


Abb. 8.24: Schaltsymbol des JK-Flip-Flop (links) und eines JK-Flip-Flop mit low-aktivem Setz- und Rücksetzeingang (rechts). Die Zahlen geben die Pin-Nummern beim IC SN7476 für das erste (zweite) JK-FF an. Die Betriebsspannung liegt zwischen Pin 13 (Masse) und Pin 5 (+5V)

Kapitel 9

Analog–Digital–Wandlung

9.1 Abtasttheorem

Eine digitale Signalverarbeitung setzt neben einer Quantisierung der Amplitude auch eine Diskretisierung der Zeit voraus. Hier wird angenommen, dass ein ursprünglich zeit–kontinuierliches Signal $x(t)$ in äquidistanten Zeitabständen T_s abgetastet wird (s steht für „sampling“).

Bei der praktischen Realisierung der Abtastung mit einem getakteten Schalter schwankt die Zeit zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Abtastungen infolge verschiedener Störungen. Dieses Schwanken um eine mittlere Abtastperiode wird *Zeit–Jitter*¹⁾ genannt. Derartige Effekte werden hier jedoch nicht betrachtet, so dass wir im Folgenden von einer konstanten Abtastperiode T_s ausgehen.

Durch die Abtastung des Signals $x(t)$ wird eine Folge von Abtastwerten erzeugt,

$$\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \rightarrow \{x(t_0 + mT_s)\}_m \equiv \{x_m\}_{m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots} \quad (9.1)$$

Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_0 = 0$ gesetzt. Will man die zeitlichen Änderungen des abgetasteten Signals möglichst genau durch die Folge der Abtastwerte widerspiegeln, so ist schon intuitiv verständlich, dass hierzu die Abtastperiode T_s hinreichend klein gewählt werden muss. Andererseits sollte aber T_s nicht zu klein sein, würde doch dann unnötig viel Platz zur Speicherung der Abtastwerte eines bestimmten Zeitabschnittes des Ausgangssignals benötigt. Darüber hinaus ist eine größere *Abtastfrequenz* $f_s \equiv T_s^{-1}$ in der Regel mit einem höherem gerätetechnischen Aufwand verbunden. Somit steht die Frage nach einer „maximalen“ Abtastperiode bzw. „minimalen“ Abtastfrequenz, so dass aus den Abtastwerten noch eindeutig auf die Werte des Ausgangssignals zwischen den Abtastzeitpunkten geschlossen werden kann. Hierzu macht das Abtasttheorem eine Aussage.

Für die Formulierung des Abtasttheorems wird zunächst der Begriff der *Nyquist–Frequenz* eines Signals $x(t)$ eingeführt als die kleinste (Kreis–)Frequenz ω_N , ab welcher das Spektrum $X(j\omega)$ verschwindet, d.h., $|X(j\omega)| = 0$ für $\omega \geq \omega_N$ und $|X(j\omega)| \neq 0$ für ein $\omega \in [\omega_N - \varepsilon, \omega_N)$, $\varepsilon > 0$, beliebig klein.^{2) 3)}

¹⁾Allgemein versteht man unter dem Begriff *Jitter* unerwünschte, kleine, schnelle Schwankungen in der Zeit oder der Amplitude eines Signals.

²⁾Den Begriff der Nyquist–Frequenz hat CLAUDE ELWOOD SHANNON 1948 eingeführt, in Erinnerung an den schwedischen Signaltheoretiker HARRY NYQUIST (1889–1976). Dieser hatte bereit 1927 die zentrale Aussage des später insbesondere von KOTELNIKOV und RAABE präziser formulierten Abtasttheorems erkannt.

³⁾In der Literatur (z.B. [8]) wird die Größe $2 \cdot \omega_N$ Nyquist–Rate genannt. Manche Autoren verwenden hierfür jedoch auch den Begriff Nyquist–Frequenz, so dass immer aus dem Kontext die richtige Interpretation gefunden werden muss.

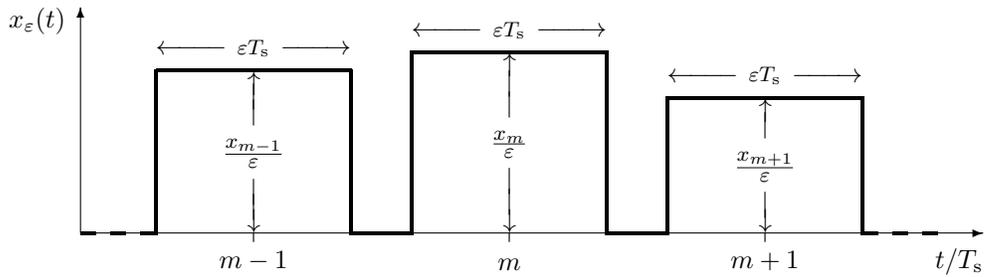


Abb. 9.1: Signal der Abtastimpulse

Ist die Nyquist-Frequenz endlich, so bedeutet dies im Falle periodischer Signale $x(t)$, dass es eine natürliche Zahl N gibt, mit der Eigenschaft, dass die Fourier-Komponenten die Bedingungen $X(j(N-1)\omega_0) \neq 0$ und $X(jn\omega_0) = 0$ für alle $n \geq N$ erfüllt, wobei $\omega_0/2\pi$ die triviale Periode von $x(t)$ ist. Die Nyquist-Kreisfrequenz von $x(t)$ ist dann $N\omega_0$.

Für nichtperiodische Signale $x(t)$ ist f_N durch die Eigenschaft bestimmt, dass es für ein beliebiges $\delta f > 0$ im Frequenzintervall $[f_N - \delta f, f_N]$ eine Frequenz f gibt, so dass die Spektraldichte $X(j2\pi f) \neq 0$, wohingegen $X(j2\pi f) = 0$ für alle $f > f_N$. Es gilt dann das folgende

Abtasttheorem (Probensatz, Sampling Theorem): Ist $x(t)$ ein zeit-kontinuierliches Signal mit der endlichen Nyquist-Frequenz $f_N < \infty$, so kann aus den Abtastwerten $x(mT_s) \equiv x_m$ eindeutig $x(t)$ für alle Zeitpunkte t bestimmt werden, sofern die Abtastfrequenz $f_s \equiv T_s^{-1}$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\boxed{f_s > 2f_N} \tag{9.2}$$

Die Interpolationsformel lautet

$$\boxed{x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot \frac{\sin[\pi(t/T_s - m)]}{\pi(t/T_s - m)}} \tag{9.3}$$

Formel (9.3) stellt eine unendliche Reihe dar, deren direkte numerische Bestimmung im Allgemeinen recht aufwändig ist. Darüber hinaus müsste zur vollständigen Rekonstruktion die Reihe für einen jeden Zeitpunkt t des Kontinuums bestimmt werden, was offenbar praktisch nicht realisierbar ist. Eine Lösung dieses Problems ergibt sich aus der folgenden Überlegung.

9.1.1 Begründung des Abtasttheorems

Zunächst wird aus den Abtastwerten x_m zu einem beliebigen $\varepsilon \in [0, 1]$ das zeit-kontinuierliche Signal gebildet,

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{x_m}{\varepsilon} & : m - \varepsilon/2 \leq t/T_s < m + \varepsilon/2 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \tag{9.4}$$

In der Abbildung 9.1 ist diese Folge von Rechteckimpulsen der Pulsdauer εT_s schematisch dargestellt.

Wird nun diese Pulsdauer verkleinert und gleichzeitig die Impulshöhe $x_m/(\varepsilon T_s)$ derart vergrößert, dass die Fläche unter dem m -ten Impuls konstant $x_m T_s$ ist, so erhält man im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ für $x_\varepsilon(t)$ eine Folge von Dirac-Impulsen,

$$x_0(t) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot T_s \cdot \delta(t - mT_s) . \quad (9.5)$$

Wird nun $x_0(t)$ nach Gleichung (5.20) fourier-transformiert, so folgt,

$$\begin{aligned} X_0(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[x_m \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{m\omega}{\omega_s}\right) . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Offenbar gilt $X_0(j\omega) = X_0(j(\omega + n \cdot \omega_s))$ für ganzzahlige Werte von n , das heißt, die Spektraldichte von $x_0(t)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode ω_s .

Um $X_0(j\omega)$ genauer zu bestimmen, wird zunächst $x_0(t)$ umgeformt. Unter Beachtung der Eigenschaften des Dirac-Impulses, kann (9.5) wie folgt geschrieben werden,

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot T_s \cdot \delta(t - mT_s) \\ &= T_s \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s) \cdot \delta(t - mT_s) \\ &= T_s \cdot x(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) \\ &= T_s \cdot x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) , \end{aligned} \quad (9.7)$$

mit der T_s -periodischen Diracschen δ -Funktion (Distribution)

$$\delta_{T_s}(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) . \quad (9.8)$$

Die Fourier-Komponenten von $\delta_{T_s}(t)$ sind nach (5.10) alle gleich T_s^{-1} , denn mit $T_0 = T_s$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\delta_{T_s}(t)\right) &= T_s^{-1} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_{T_s}(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= T_s^{-1} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= T_s^{-1} , \quad \text{für alle } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Demzufolge hat δ_{T_s} die Fourier-Reihe-Darstellung (5.9)

$$\delta_{T_s}(t) = T_s^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t}. \quad (9.9)$$

Für $x_0(t)$ in (9.7) folgt somit die Darstellung

$$x_0(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t}. \quad (9.10)$$

Wird $x_0(t)$ nun nach (5.20) fourier-transformiert, so erhält man die Spektraldichte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_0(t)] \equiv X_0(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j(n\omega_s - \omega)t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[j(n\omega_s - \omega)]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Die Spektraldichte der Abtastimpulsfolge $x_0(t)$ entsteht also, indem man die Spektraldichte $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$ des abgetasteten Signals $x(t)$ nimmt, um alle ganzzahligen Vielfache der Abtast-Kreisfrequenz ω_s auf der Frequenzachse verschiebt und dann aufsummiert.

Für den Fall, dass die Nyquist-Frequenz $f_N \equiv \omega_N/2\pi$ von $x(t)$ die Abtastbedingung (9.2) erfüllt, sind die Beträge der Spektraldichten $X(j\omega)$ und $\mathcal{F}[x_0(t)] \equiv X_0(j\omega)$ in Abb. 9.2a) und b) schematisch dargestellt. Für die Rekonstruktion des ursprünglichen Signals $x(t)$ aus der Folge von Abtastwerten x_m ist es wesentlich, dass die Spektraldichten $X(j\omega)$ und $X_0(j\omega)$ im Intervall $[-\omega_N, \omega_N]$ übereinstimmen. Zur Rekonstruktion müßte dann das Signal $x_0(t)$ auf einen „idealen“ Tiefpaß gegeben werden, der durch die Übertragungsfunktion

$$H_{T,\omega_N}(j\omega) = \begin{cases} 1 & : -\omega_N \leq \omega \leq \omega_N \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.12)$$

charakterisiert ist. Offenbar gilt dann

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_{T,\omega_N}(j\omega) \cdot X_0(j\omega)] \quad (9.13)$$

Falls aber die Bedingung (9.2) infolge einer zu niedrig gewählten Abtastfrequenz verletzt wird, führt dies zu „Überlappungen“ der Frequenzbänder $X[j(n\omega_s - \omega)]$ in Gleichung (9.11), wie es in Abb. 9.2c) und d) schematisch dargestellt ist. Man nennt dies *aliasing* (gesprochen wie „eiliesing“). Hierbei weichen die Spektraldichten $X(j\omega)$ und $X_0(j\omega)$ im Intervall $[-\omega_N, \omega_N]$ voneinander ab, und eine eindeutige Rekonstruktion von $x(t)$ aus den Abtastwerten ist prinzipiell nicht mehr möglich.

Wird die Abtastbedingung (9.2) nur geringfügig verletzt, gilt z.B. $\omega_N > \omega_s/2$ mit $(\omega_N - \omega_s/2)/\omega_N \ll 1$, so kann es in der Praxis noch sinnvoll sein, aus den „unterabgetasteten“ Werten x_m das ursprüngliche Signal $x(t)$ zu approximieren, indem für den Rekonstruktionstiefpaß in (9.13) anstelle der Grenzfrequenz $\omega_N/2\pi$ nun $(\omega_s - \omega_N)/2\pi$ gewählt wird. Das so erhaltene Signal $x^*(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[H_{T,\omega_s - \omega_N}(j\omega) \cdot X_0(j\omega)]$ unterscheidet sich dann von $x(t)$ nur in der Spektraldichte an den Stellen $|\omega| > \omega_s - \omega_N$.

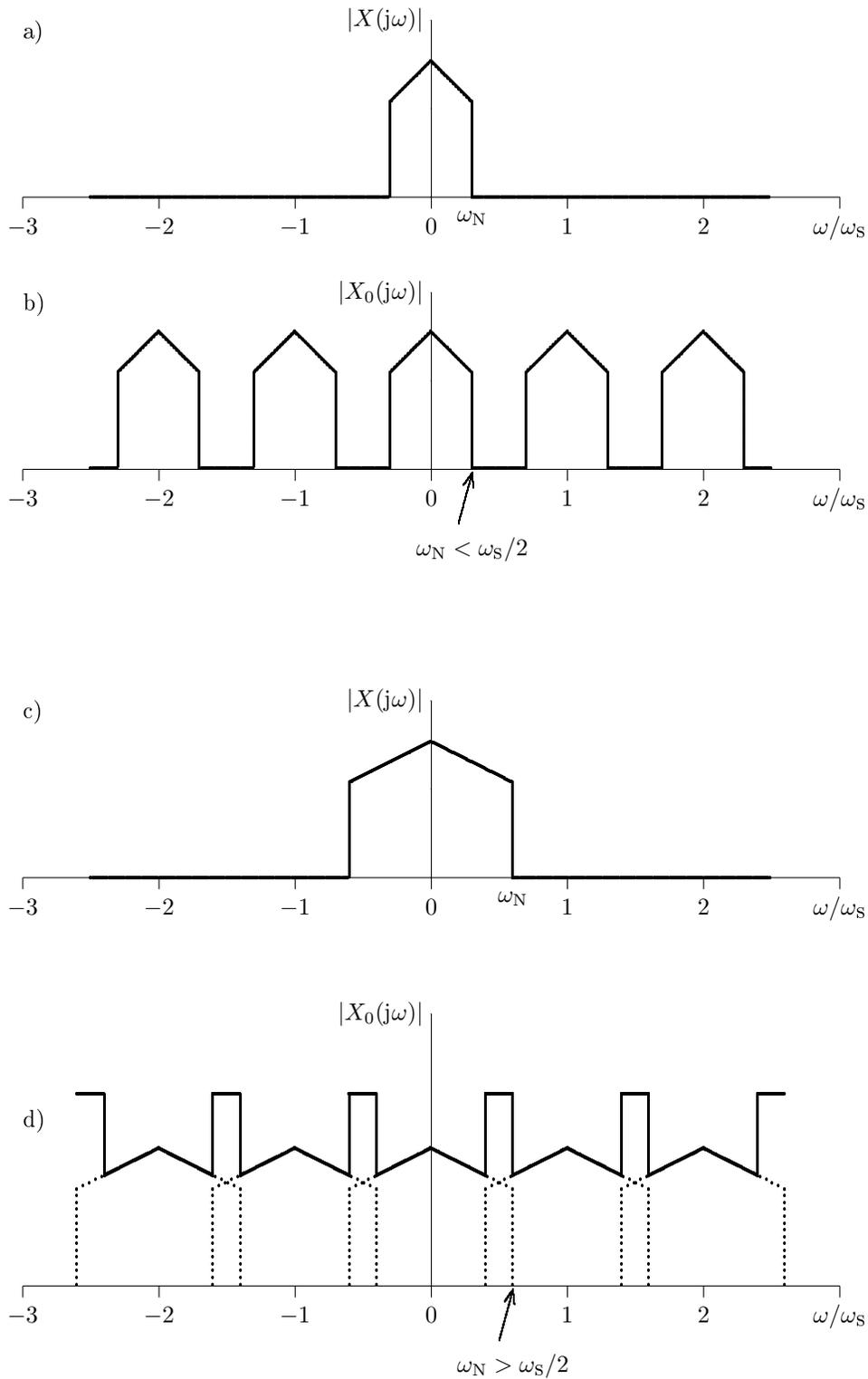


Abb. 9.2: Schematische Darstellung der Spektraldichten der Signale $x(t)$ und $x_0(t)$ im Falle der Erfüllung der Abtastbedingung (a bzw. b) und ihrer Verletzung (c bzw. d). In d) sind die Beträge der Summanden der Reihe in Gl. (9.11) dargestellt. Im Überlappungsbereich $\omega = \omega_s - \omega_N \dots \omega_N$ kann aus dem Abtastsignal $x_0(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ (gepunkteter Bereich) nicht eindeutig rekonstruiert werden

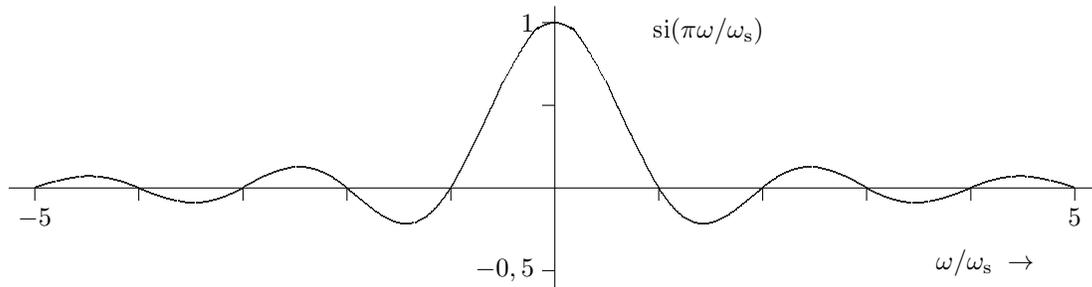


Abb. 9.3: Graph der Spaltfunktion $si(\pi\omega/\omega_s) \equiv \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}$

Zusammenfassend lautet die Vorschrift zur Rückgewinnung des Analogsignals $x(t)$ aus den Abtastwerten x_m also wie folgt: Aus den Abtastwerten x_m wird das zeit-kontinuierliche Signal $x_0(t)$ von Dirac-Delta-Impulsen gebildet und auf einen „idealen“ Tiefpaß gegeben, mit der Nyquist-Frequenz von $x(t)$ als Grenzfrequenz des Tiefpasses. Das rekonstruierte Signal $x(t)$ kann am Ausgang des Tiefpasses abgegriffen werden.

9.1.2 Praktische Rekonstruktion

Bei der praktischen Rückgewinnung des originalen Signals aus Abtastwerten treten jedoch verschiedene Probleme auf. So kann man z.B. mit elektronischen Schaltungen keine Dirac-Impulse erzeugen. Ein reales Impulssignal gleicht eher der in der Abbildung 9.1 dargestellten Funktion $x_\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon > 0$. Die Fourier-Transformierte hiervon lautet

$$X_\varepsilon(j\omega) = \frac{\sin(\pi\varepsilon\omega/\omega_s)}{\pi\varepsilon\omega/\omega_s} \cdot X_0(j\omega) \quad (9.14)$$

Die Spektraldichten $X_{\varepsilon>0}(j\omega)$ und $X_0(j\omega)$ unterscheiden sich also nur in einer Gewichtsfunktion, welche die *Spaltfunktion*

$$si(\pi\varepsilon\omega/\omega_s) \equiv \frac{\sin(\pi\varepsilon\omega/\omega_s)}{\pi\varepsilon\omega/\omega_s} \quad (9.15)$$

darstellt (s. Abbildung 9.3).⁴⁾ Im Fall $\varepsilon = 1$ stellt $x_\varepsilon(t)$ eine Treppenfunktion dar, mit den Abtastwerten x_m als Stufenhöhe. Dies ist besonders unter praktischen Gesichtspunkten interessant, denn $x_1(t)$ kann relativ einfach schaltungstechnisch realisiert werden. Die zugehörige Spektraldichte lautet

$$X_1(j\omega) = si\left(\pi\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot X_0(j\omega) \quad (9.16)$$

Die Gewichtsfunktion schwächt besonders höhere Frequenzen ab. Bei der halben Abtastfrequenz ist sie beispielsweise $si(\pi/2) = 2/\pi = 0,636\dots$

Der Einfluß der Gewichtsfunktion hinsichtlich der Abweichung zwischen den Spektraldichten $X_1(j\omega)$ und $X_0(j\omega)$ wird umso geringer, je höher das Signal $x(t)$ überabgetastet wird. Gilt z.B. $\omega_s = 10\omega_N$, was mit Blick auf die Abtastbedingung (9.2) eine 5-fache Überabtastung bedeutet, so wird $si(\pi\omega_N/\omega_s) = si(\pi/10) = 0,983\dots$ Im relevanten Frequenzintervall $[-\omega_N, \omega_N]$ ist also der relative Fehler, den man macht, wenn anstelle der Dirac-Impulsfolge $x_0(t)$ die Treppenfunktion $x_1(t)$ auf den Rekonstruktionstiefpaß

⁴⁾ Statt *si* schreibt man zuweilen auch *sinc* für *sinus cardinalis*. Im Englischen heißt die Spaltfunktion auch *interpolation function*, *filtering function* oder *first spherical Bessel function*.

gegeben wird, kleiner als 2%. Bei vielen Anwendungen, z.B. in der Musikelektronik, ist dieser Fehler vernachlässigbar.

Sollte eine Überabtastung nicht möglich sein, oder ist eine besonders präzise Rekonstruktion des Analogsignals erforderlich, so kann die Abschwächung höherer Frequenzen ausgeglichen werden, indem anstelle eines einfachen Rekonstruktionstiefpasses sogenannte Formfilter (FF) verwendet werden. Diese haben ebenfalls eine Tiefpaß-Charakteristik, gleichen aber für niedrige Frequenzen ($< \omega_N$) den Einfluß der Gewichtsfunktion aus. Offenbar muß dazu die zugehörige Übertragungsfunktion $H_{FF}(j\omega)$ für Frequenzen $\omega < \omega_N$ die Übertragungsfunktion $|H_{FF}(j\omega)| = [\text{si}(\pi\omega/\omega_s)]^{-1}$ haben.

In der Praxis ist häufig die Sampling-Frequenz durch die Apparatur zur Datenerfassung fest vorgegeben oder nur in engen Grenzen wählbar. Soll nun ein Analogsignal $x(t)$ abgetastet werden, dessen Nyquist-Frequenz größer als die halbe Sampling-Frequenz ist, so ist dies zwar formal möglich, allerdings würde der Tiefpaß zur Rekonstruktion des Analogsignals anstelle von $x(t)$ ein davon verschiedenes Signal $x^*(t)$ liefern. Um zumindest im Frequenzband $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen dem originalen Signal und den Abtastwerten zu haben, muß $x(t)$ vor der Abtastung mit einem Tiefpaß gefiltert werden, dessen Grenzfrequenz kleiner als $f_s/2$ ist. Entsprechend der Steilheit der Filtercharakteristik und gemäß den konkreten Anforderungen an die Unterdrückung von Frequenzen, die größer als $f_s/2$ sind, kann dabei die Grenzfrequenz mehr oder weniger dicht bei $f_s/2$ liegen. Diesen Tiefpaß nennt man *Anti-Aliasing-Filter*. Wird ein Signal zunächst unterabtastet ($f_s < 2f_N$), so ist eine spätere Filterung mit dem Ziel, eine Übereinstimmung zwischen originalem Signal und den zeit-diskreten Werten im Frequenzband $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ zu erzielen, prinzipiell nicht mehr möglich!

Abbildung 9.4 fast diese in einem allgemeinen Schema der Datenaufnahme und Rekonstruktion zusammen. Bei einer digitalen Weiterverarbeitung der Daten würde die Rekonstruktion durch Interpolationsalgorithmen realisiert.

9.2 Diskrete Fourier-Transformation

Hat man ein Signal $x(t)$ mit der Abtastperiode T_s unter Einhaltung der Abtastbedingung (9.2) zeitlich diskretisiert, so gibt es nach dem Abtasttheorem eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Abtastwerten x_m und dem originalen zeit-kontinuierlichen Signal $x(t)$. Will man nun von $x(t)$ das Spektrum (5.10) bzw. nach (5.20) die Spektraldichte $X(j\omega)$ bestimmen, so stellt sich die Frage, wie man dies direkt aus den Abtastwerten erreichen kann. Eine Antwort gibt Formel (9.6). Wird hier durch T_s dividiert, so erhält man die *Zeit-Diskrete Fourier-Transformation* der Abtastfolge $\{x_m\}$,⁵⁾

$$\mathcal{F}_D[x_m](\omega) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{m\omega}{\omega_s}\right). \quad (9.17)$$

Wie schon oben bemerkt, ist $\mathcal{F}_D[x_m](\omega)$ periodisch in ω , mit der Periode ω_s , und im Intervall $[0, \omega_s]$ gilt $X(j\omega) = T_s \cdot \mathcal{F}_D[x_m](\omega)$. Man betrachtet deshalb die Frequenz ω nur im Intervall $[0, \omega_s]$. Wird darüber hinaus ω für ganzzahlige Vielfache von ω_s/N berechnet, also für

$$\omega = (n/N) \cdot \omega_s, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

⁵⁾Bemerkenswert ist die Dualität zu den kontinuierlichen periodischen Zeitsignalen, deren Spektren diskret sind, wohingegen hier die diskreten Zeitsignale kontinuierliche periodische Spektren haben.

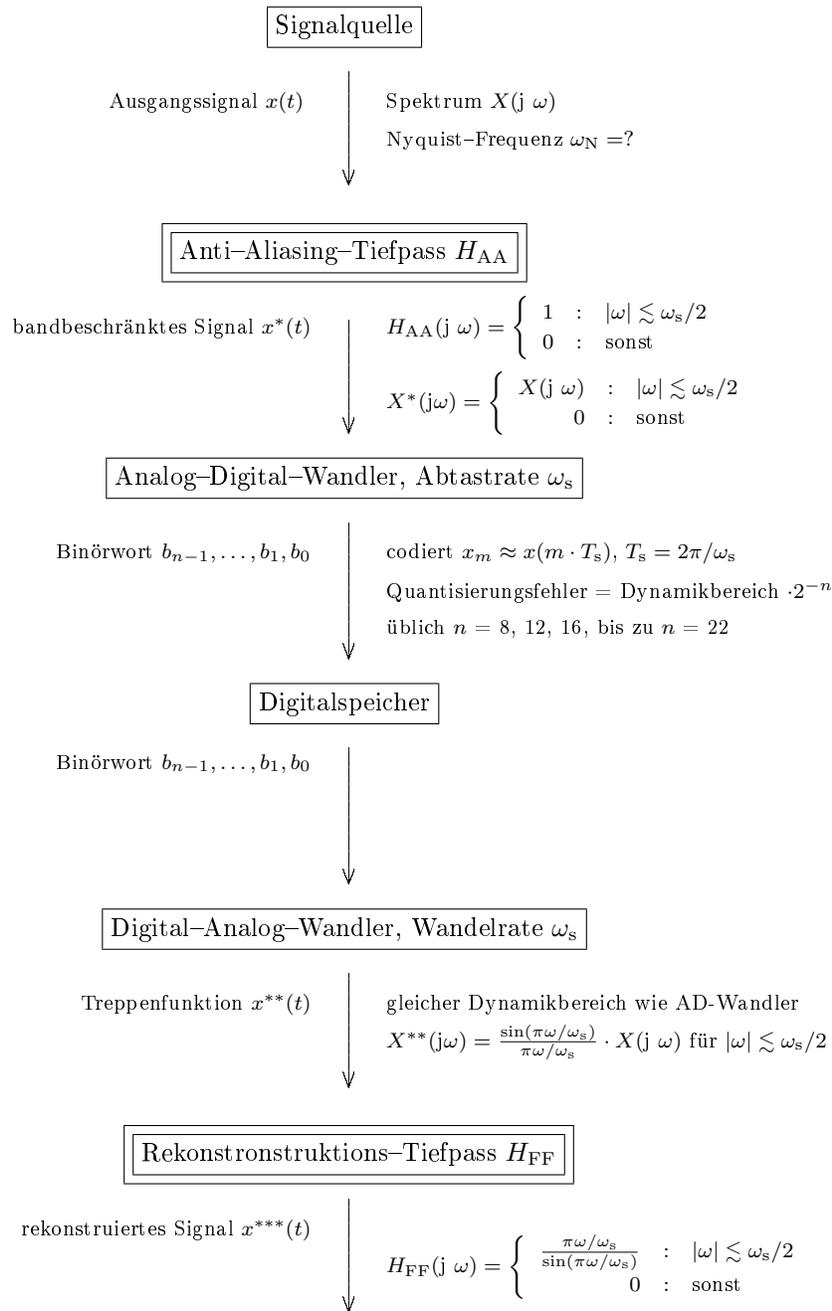


Abb. 9.4: Allgemeine Anordnung zur Aufnahme und Rekonstruktion zeitkontinuierlicher Signale $x(t)$. Abweichungen des rekonstruierten Signals vom $x^{***}(t)$ von $x(t)$ entstehen infolge von (i) Bandbeschränkungen nach Anti-Aliasing-Filterung und (ii) Quantisierungsrauschen. Ist letzteres vernachlässigbar, so stimmen $x^{***}(t)$ und $x(t)$ zumindest im Frequenzband $0 \dots \omega_s/2$ überein

so folgt

$$T_s^{-1} \cdot X\left(j\frac{n}{N} \cdot \omega_s\right) = \mathcal{F}_D[x_m]\left(\frac{n}{N} \cdot \omega_s\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{mn}{N}\right)$$

Diese Gleichung liefert noch immer keine praktikable Vorschrift zur numerischen Bestimmung des Spektrums eines Signals aus seinen Abtastwerten, können doch unendliche Reihen im Allgemeinen nicht bestimmt bzw. nur mit großen Aufwand geschätzt werden. Ist das Signal jedoch stationär oder zumindest quasistationär, so kann anstelle der unendlichen Reihe eine Summation über nur endlich viele ($N < \infty$) Glieder der Reihe betrachtet werden.

Dies führt schließlich auf die sogenannte *Diskrete Fourier-Transformation* (DFT),

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{mn}{N}\right) \quad (9.18)$$

Die Summation über der Zeit (Index m) läuft hier nur in einem endlichen Bereich, was dem Zeitbereich $0 \dots (N-1) \cdot T_s$ entspricht. Dies ist streng genommen nur dann zulässig, wenn $x_m = x(m \cdot T_s) = 0$ für alle $m < 0$ und $m \geq N$. Das ist aber das gleiche, als würden wir nicht das Signal $x(t)$ abtasten und transformieren, sondern das Produkt aus $x(t)$ mit der Fensterfunktion (Rechteckfenster) $h(t) = 1$ für $t \in [0, N \cdot T_s)$ und $h(t) = 0$ sonst,

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot h(t) \ .$$

Nach (5.26) hat dieses Signal das Spektrum

$$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = \frac{1}{2\pi} \cdot [X(j\omega) * H(j\omega)] \ .$$

Man berechnet also letztlich die Faltung der gesuchten Spektraldichte $X(j\omega)$ mit der Spektraldichte der Fensterfunktion (vgl. Rechnung auf S. 199),

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = NT_s \cdot \frac{\sin(\omega NT_s/2)}{\omega NT_s/2} \cdot e^{-j\omega NT_s/2}$$

Es gilt dann

$$X_n = f_s \cdot \tilde{X}\left(j\frac{n}{N} \cdot \omega_s\right) \ .$$

Der Betrag der n -ten Fourier-Komponente $|X_n|$ ist also ein Maß für die Amplitude der harmonischen Komponente von $x(t)$ mit der Kreisfrequenz $(n/N)\omega_s$.

Die zugehörige *Inverse Diskrete Fourier-Transformation* (IDFT) lautet

$$x_m = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot \exp\left(j2\pi\frac{mn}{N}\right) \quad (9.19)$$

9.2.1 Allgemeine Eigenschaften der DFT

1. Ist x_m für jedes $m = 0, 1, \dots, N-1$ rein reell, so ist die DFT symmetrisch,

$$X_n = X_{N-n}^* \quad \text{für } n = 1, \dots, N/2 - 1$$

Darin ist X_{N-n}^* die konjugiert komplexe Zahl von X_{N-n} und N gerade vorausgesetzt. X_0 repräsentiert den Gleichanteil (auch genannt Mittelwert oder Offset des Signals).

2. Wird der Normierungsfaktor $1/N$ bei der Rücktransformation (9.19) symmetrisch auf die Hin- und Rücktransformierte aufgeteilt (jeweils Faktor $1/\sqrt{N}$) dann ist die DFT eine unitäre Transformation von $\{x_m\}_{m=0}^{N-1}$.

9.2.2 Bandpassfilterung mittels DFT

Will man das Signal $\{x_m\}_{m=0}^{N-1}$ bandpassfiltern, etwa im Frequenzbereich $B \equiv [f_u, f_o]$ mit

$$f_u = (n_u/N) \cdot f_s, \quad f_o = (n_o/N) \cdot f_s, \quad n_u \leq n_o \leq N/2, \quad ,$$

so kann man wie folgt vorgehen:

1. **Hintransformation:** nach Gl. (9.18),

$$\{x_m\}_{m=0}^{N-1} \rightarrow \{X_n\}_{n=0}^{N-1}$$

2. **Filterung im Frequenzbereich:**

$$Y_n = \begin{cases} X_n & : n = n_u \dots n_o \\ X_n & : n = N - n_o \dots N - n_u \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

3. **Rücktransformation:** nach Gl. (9.19),

$$\{Y_n\}_{n=0}^{N-1} \rightarrow \{y_m\}_{m=0}^{N-1}$$

Dann repräsentiert $\{y_m\}_{m=0}^{N-1}$ den Signalanteil von $\{x_m\}_{m=0}^{N-1}$ im Frequenzbereich B . Sei beispielsweise ein Nutzsinal mit breitbandigem Rauschen additiv überlagert. Das Nutzsinal möge nur im Frequenzbereich B wesentliche Anteile haben. Dann wird mit der beschriebenen Filterung eine Glättung des Signal erreicht. Für $n_u = n_o$ würde $\{y_m\}_{m=0}^{N-1}$ eine harmonische Schwingung darstellen.

9.2.3 Hinweise zur Berechnung der DFT

Die DFT hat in der digitalen Signalverarbeitung eine außerordentlich große Bedeutung, insbesondere, weil für $N = 2^k$ mit $k = 3, 4, 5, \dots$ ein schneller numerischer Algorithmus zur Ausführung der DFT existiert, die sogenannte *Schnelle Fourier-Transformation* (*fast fourier transformation*: FFT).

Die direkte Berechnung nach

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \exp(-j2\pi \frac{1 \cdot 1}{N}) & \dots & \exp(-j2\pi \frac{(N-1) \cdot 1}{N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \exp(-j2\pi \frac{1 \cdot (N-1)}{N}) & \dots & \exp(-j2\pi \frac{(N-1) \cdot (N-1)}{N}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

benötigt $2 \cdot N^2$ Multiplikationen mit reelwertigen Faktoren. Ist jedoch die Blocklänge N keine Primzahl, so kann der Rechenaufwand erheblich verringert werden, insbesondere dann, wenn N als ganzzahlige Potenz von 2 gewählt wird, beispielsweise $N = 256; 512; 1024; 2048$. Der schnelle Algorithmus nutzt den Umstand aus, dass dann gewisse Multiplikationen, die bei der direkten Implementierung mehrfach

ausgeführt würden, nur einmal realisiert werden. Im Falle $N = 8$ ist dies aus der folgenden Darstellung der Transformationsmatrix \mathcal{U} leicht einzusehen ist (es werden nur die Produkte $mn \bmod N$, der Elemente $\exp(-j2\pi \frac{m \cdot n}{N})$ der Transformationsmatrix in (9.18) dargestellt)

$$\mathcal{U}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zwei gleiche Zahlen in der Spalte bedeutet, das bei der direkten Implementierung eine Multiplikation unnötigerweise zweimal ausgeführt wird. Beispielsweise würde hier nach (9.20) der Abtastwert x_2 zweimal mit dem Faktor $\exp(-j2\pi \frac{2 \cdot 1}{8}) = \exp(-j2\pi \frac{2 \cdot 5}{8})$ multipliziert werden, um X_1 bzw. X_5 zu berechnen.

Man findet nun im Allgemeinen, dass die Anzahl der Multiplikationen für große Blocklängen N von der Größenordnung $N \log_2 N$ ist. Das bedeutet gegenüber N^2 bei der direkten Implementierung eine erhebliche Reduzierung der algorithmischen Komplexität. Beispielsweise reduziert sich der Rechenaufwand für $N = 2^{10}$ auf den Bruchteil $(N \log_2 N)/N^2 = \log_2 N/N = 10/1024$, also auf etwa 1% einer direkten Berechnung.

Ein PASCAL-Code zur FFT findet sich im Anhang (Seite ??).

9.2.4 Zwei-dimensionale DFT

Die 2-dimensionale DFT ist beispielsweise wichtig für Probleme der Bildverarbeitung und -codierung von großer Bedeutung.

Überdecken wir ein Bild mit $M \times N$ vielen gleich großen Boxen (Quadraten) B_{mn} und ordnen ihnen die Amplitude x_{mn} zu, welche eine Intensität oder Helligkeit darstellen könnte, oder einen mittleren Grauwert der Box B_{mn} . Der Datensatz

$$\{x_{mn}\}_{m,n=1}^{M,N}$$

kann auch *digitales $M \times N$ Bild* genannt werden. Die *Zwei-dimensionale diskrete Fourier-Transformation* (2D-DFT) eines $N \times M$ -Bildes ist dann definiert durch

$$X_{kl} \equiv \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{mn} \exp \left[-j2\pi \left(\frac{ln}{N} + \frac{km}{M} \right) \right]$$

für $k = 0, 1, \dots, M-1$, $l = 0, 1, \dots, N-1$. Und die *zwei-dimensionale inverse diskrete Fourier-Transformation* (2D-IDFT) ist gegeben durch

$$x_{mn} = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_{kl} \exp \left[+j2\pi \left(\frac{ln}{N} + \frac{km}{M} \right) \right]$$

Eine geringfügige Umformung liefert

$$X_{kl} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(-j2\pi \frac{km}{M}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_{mn} \exp\left(-j2\pi \frac{ln}{N}\right) \right] .$$

Der in eckigen Klammern stehende Term kann als 1D-FFT einer Bildspalte bei festgehaltener Bildzeile m interpretiert werden. Die Summation über m ist letztlich eine weitere 1D-FFT. Zur effektiven Berechnung kann dazu in der Praxis jeweils der schnelle Algorithmus, also die 1D-FFT angewandt werden.

9.2.5 Kurzzeit–Fourieranalyse

Bei Signalen interessiert man sich häufig für Änderungen des Signalcharakters im Zeitablauf. Typische Beispiele hierfür stellen Sprachsignale dar. Die fortlaufende Änderung der Geometrie der Artikulationsstraktes (Stellung der Unterkiefer, der Zunge usw.) sowie die Änderung der Erregungsbedingungen (Schwingung der Stimmritze im Kehlkopf, Turbulenzen an Engstellen im Artikulationstrakt u.v.a.m.) machen erst natürliche Sprache aus.

Um langsam veränderliche Parameter von Signalen zu erfassen, schneidet man aus dem Signal einen gewissen Abschnitt, ein sogenannten *Datenfenster* heraus und analysiert zunächst nur dieses. Dann wird ein weiteres Fenster ausgeschnitten und analysiert usw. Formal kann man dafür wie folgt schreiben: Zum Signal

$$\{x_m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$$

erhalten wir das Fenster

$$\tilde{x}_n^{(m)} \equiv h_n x_{m+n}, \quad n = -\infty \dots +\infty .$$

$\{h_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ nennt man Fensterfunktion. Einige häufig angewandte Fensterfunktionen sind:

Rechteck–Fenster der Länge N :

$$h_n = \begin{cases} 1 & : 0 \leq n < N \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Hamming–Fenster der Länge N :

$$h_n = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos \frac{2\pi n}{N-1} & : 0 \leq n < N \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Trägt man nun den Betrag des Fourier–Spektrums grau codiert vertikal für die Daten–Fenster zu den verschiedenen Zeitpunkten auf, dann erhält man das sogenannte *Periodogramm* des Signals.

9.2.6 Periodogramme von Sprachsignalen

Abbildung 9.5 zeigt Periodogramme für verschiedene stimmhafte Sprachsignale, *Vokale*. Dies sind annähernd periodische Signale, deren Grundfrequenz auch *Pitchfrequenz* genannt wird. Sie spiegelt die Sprachmelodie (Grundfrequenz der Schwingung der Stimmbänder) wieder und liegt bei männlichen Sprechern etwa zwischen 50 und 150 Hz, bei Frauen bis über 250 Hz. Zusammen mit den Oberwellen erzeugt sie die horizontal verlaufende Streifenstruktur. Überlagert werden die Muster von breiteren dunklen Streifen, deren Mittenfrequenzen die sogenannten *Formantfrequenzen* bilden. Diese sind von Vokal zu Vokal

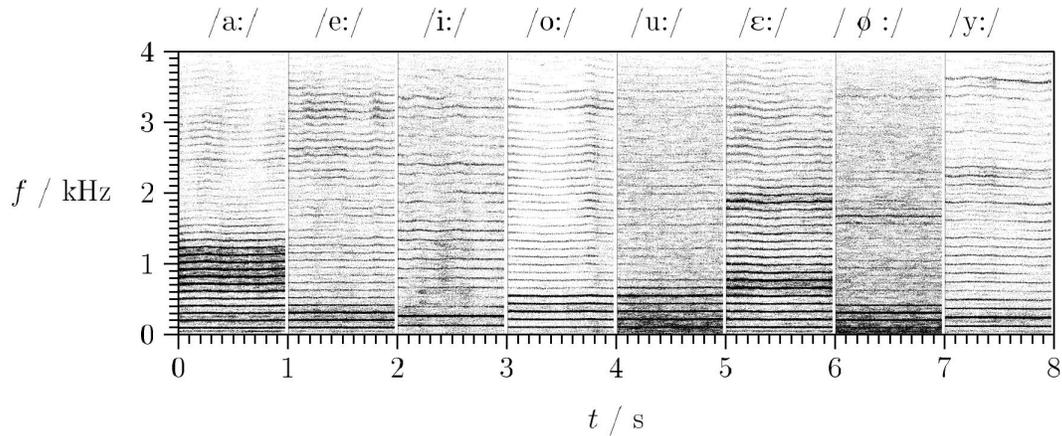


Abb. 9.5: Spektrogramm von isoliert gesprochenen Vokalen (männlicher Sprecher im Brustregister)

unterschiedlich und spiegeln die unterschiedliche Geometrie von Rachen- und Mundraum bei der Sprachherzeugung wider. Mittels der Formantfrequenzen kann deshalb eine Spracherkennung erfolgen.

Abbildung 9.6 das Periodogramm einer Probe fließender Sprachprobe. Hier ist eine größere Variabilität der Sprachmelodie zu erkennen, beispielsweise steigt die Grundfrequenz bei $t \approx 27000T_s$ deutlich an (Stimme wird höher). Auch die Formantfrequenzen ändern sich zeitlich, was jedoch der Darstellung nicht mehr so deutlich zu entnehmen ist. In der On-line Sprachverarbeitung werden deshalb ausgefeiltere Methoden zur Spracherkennung verwendet.

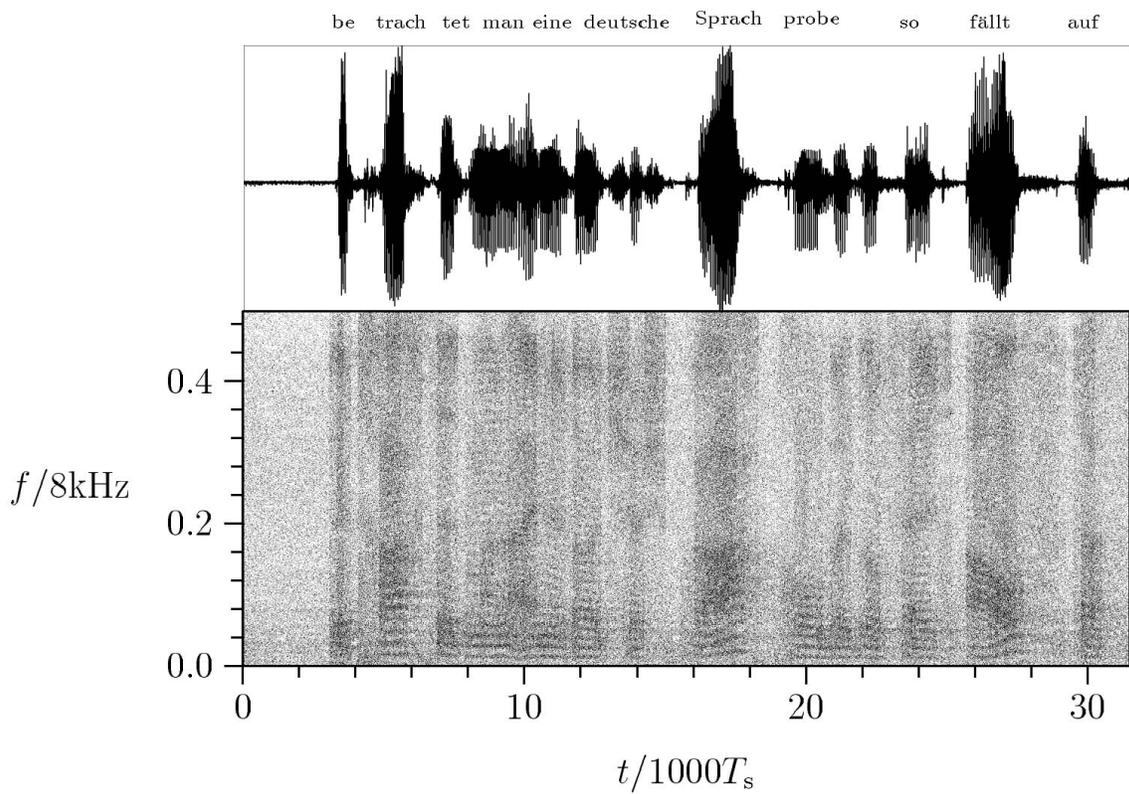


Abb. 9.6: Oben: Sprachsignal eines männlichen Sprechers im modalen Register (Abtastperiode $T_s = 125\mu\text{s}$). Unten: zugehöriges Periodogramm

Anhang A

Fourier–Transformation

A.1 Fourier–Entwicklungen

A.2 Reihenentwicklung einer symmetrischen Rechteckimpulsfolge

Die Rechteckimpulsfolge mit der (trivialen) Periode T_0 ist definiert durch (Abb.A.1)

$$x_R(t) = \begin{cases} A & : (k \cdot T_0 - \frac{T_0}{4}) \leq t < (k \cdot T_0 + \frac{T_0}{4}), \quad k \text{ ganzzahlig} \\ -A & : \text{sonst} \end{cases}$$

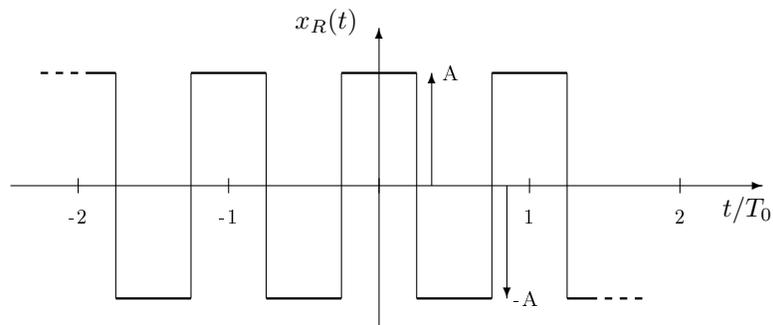


Abb. A.1: Symmetrisches Rechtecksignal

Die Reihenentwicklung nach (5.6) und (5.7) liefert

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_R(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \\
 &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \\
 &= \begin{cases} \frac{4A}{\pi} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \frac{1}{n} & : n \text{ ungerade} \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases}
 \end{aligned}$$

Für Ordnungen n gerade gilt $a_n = 0$. Die Fourierkomponenten der symmetrischen Rechtecksschwingung fallen mit der Ordnung n linear. Die Entwicklungsterme b_n verschwinden, so dass wir nach (5.8) die folgende Darstellung erhalten,

$$X_R(jn\omega_0) = \frac{a_n}{2} = \begin{cases} \frac{2A}{n\pi} \cdot (-1)^{(n-1)/2} & : n \text{ ungerade} \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases}$$

A.3 Reihenentwicklung eines symmetrischen Dreiecksignals

Die Dreieckimpulsfolge mit der (trivialen) Periode T_0 ist definiert durch (Abb.A.2)

$$x_D(t) = \begin{cases} A \left[1 - \frac{4(t-kT_0)}{T_0} \right] & : kT_0 \leq t < (k + \frac{1}{2})T_0, \, k \text{ ganzzahlig} \\ A \left[-3 + \frac{4(t-kT_0)}{T_0} \right] & : (k + \frac{1}{2})T_0 \leq t < (k + 1)T_0 \end{cases}$$

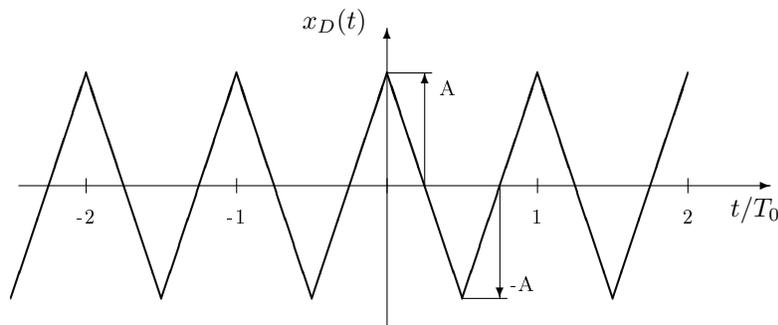


Abb. A.2: Symmetrisches Dreiecksignal

Die Reihenentwicklung nach (5.6) und (5.7) liefert

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_D(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \\
 &= \frac{2}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^0 A(4t/T_0 + 1) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^{T_0/2} A(-4t/T_0 + 1) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \right] \\
 &= \frac{2}{T_0} \cdot \frac{4A}{T_0} \cdot \left[\int_{-T_0/2}^0 t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt - \int_0^{T_0/2} t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \right]
 \end{aligned}$$

Der Integrand ist schiefsymmetrisch und folglich

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{2}{T_0} \cdot \frac{4A}{T_0} \cdot 2 \cdot \int_0^{T_0/2} t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \\
 &= -\frac{16A}{T_0^2} \left[\frac{\cos n\omega_0 t}{n^2\omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \right]_0^{T_0/2} \\
 &= -\frac{16A}{T_0^2} \cdot \frac{1}{n^2\omega_0^2} [\cos(n\pi) - 1]
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir schließlich,

$$a_n = \begin{cases} \frac{8A}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} & : n \text{ ungerade} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fourierkomponenten der symmetrischen Dreiecksschwingung fallen mit der Ordnung n quadratisch. Die Entwicklungsterme b_n verschwinden.

A.4 Spektraldichte eines Rechteckfensters

Wir betrachten den Rechteckimpuls der Dauer T , symmetrisch um $T = 0$ gelegen, also $x_P(t) = 1$ für $|t| < T/2$ und $x_P(t) = 0$ für $|t| > T/2$. Die zugehörige Spektraldichte (5.20) ist dann,

$$\begin{aligned}
 X_P &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_P(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \\
 &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} \, dt \\
 &= \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} .
 \end{aligned}$$

Wegen $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$ folgt weiter,

$$X_P(j\omega) = \frac{2 \cdot \sin(\omega T/2)}{\omega} = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}.$$

Dies ist im wesentlichen die Spaltfunktion (Abb.9.3 und Gl. 9.15), hier mit Nulldurchgängen bei $\omega = 2\pi \cdot n/T$, für alle ganzzahligen Werte von n . Die Spektraldichte ist rein reell und folglich das Phasenspektrum, das ist die Phase von $X_P(j\omega)$, Null.

A.5 Zeitfunktion eines spektralen Rechteckfensters

Wir betrachten den spektralen Rechteckimpuls der Breite $2\omega_N$, symmetrisch um $\omega = 0$ gelegen, also $X(j\omega) = 1$ für $|\omega| < \omega_N$ und $X(j\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_N$. Die zugehörige Zeitfunktion erhält man nach (5.22),

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_N}^{\omega_N} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\omega_N t} - e^{-j\omega_N t}}{jt}. \end{aligned}$$

Wegen $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$ folgt weiter,

$$x(t) = \frac{\omega_N}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_N t}{\omega_N t}.$$

Dies ist, bis auf den Vorfaktor $\frac{\omega_N}{\pi}$, die Spaltfunktion (Abb.9.3 und Gl. 9.15), hier mit Nulldurchgängen bei $t = \pi \cdot n/\omega_N$, für alle ganzzahligen Werte von n .

A.6 Programm: Fast-Fourier-Transformation

```
type
  T_FFTdata = real;
  TA_FFT = array of T_FFTdata;

procedure FFT(var ar, ai : TA_FFT;
              const m      : integer;
              const Hin    : Boolean);
// fast fourier tranformation
// Eingaben:
// ar[t], ai[t], t = 1..2^m, Real- bzw. Imaginärteil der Daten
// m = dualer Logarithmus der Blocklaenge 2^m;
// Ausgabe
```

```
// ar[t], ai[t], t = 1..2^m, Real- bzw. Imaginärteil der Transformierten
// ar[1] = Gleichanteil, ai[1] irrelevant
// Normierung:
// Division durch Blocklaenge bei Hintransformation (Hin = true)
var
  j,n,i,nv2,nm1,k,l,le,le1,ip : Integer;
  tr,ti,ur,urr,ui,wr,wi      : extended;
begin
  n:=1;
  for i:=1 to m do n:=2*n;
  if Hin then for i:=1 to n do ai[i]:=-ai[i];
  nv2:=n div 2;
  nm1:=n-1;
  j:=1;
  for i:=1 to nm1 do begin
    if i<j then begin
      tr:=ar[j];
      ti:=ai[j];
      ar[j]:=ar[i];
      ai[j]:=ai[i];
      ar[i]:=tr;
      ai[i]:=ti;
    end; // if i<j ..
    k:=nv2;
    while k<j do
      begin
        j:=j-k;
        k:=k div 2;
      end;
    j:=j+k;
  end; // for i ..
  for l:=1 to m do begin
    le:=1;
    for i:=1 to l do le:=2*le;
    le1:=le div 2;
    ur:=1;
    ui:=0;
    wr:=cos(pi/le1);
    wi:=sin(pi/le1);
    for j:=1 to le1 do
      begin
        i:=j;
        while i<=n do
```

```
begin
  ip:=i+le1;
  tr:=ar[ip]*ur-ai[ip]*ui;
  ti:=ar[ip]*ui+ai[ip]*ur;
  ar[ip]:=ar[i]-tr;
  ai[ip]:=ai[i]-ti;
  ar[i]:=ar[i]+tr;
  ai[i]:=ai[i]+ti;
  i:=i+le;
end; (*schleife i*)
urr:=ur*wr-ui*wi;
ui:=ur*wi+ui*wr;
ur:=urr;
end;
end; // for l ..
if Hin then for i:=1 to n do begin
  ar[i]:=ar[i]/n;
  ai[i]:=-ai[i]/n;
end;
end;
```

A.7 Programm: Interpolation

```
type
  TA_series      = array of real;
  TAA_IntFilter  = array of array of extended;
  TA_IntFilter   = array of extended;

function Fak(const n : Extended) : Extended;
begin
  If n > 1 then Fak := n * Fak(n-1) else Fak := 1;
end;

procedure Get_L0(const k, n : integer; var L : TAA_IntFilter);
var p, h : extended; i, ll, j : integer;
begin
  SetLength(L,k+1,n+1);
  for i := 0 to n do begin
    if i = (n-1) div 2 then L[0,i] := 1 else L[0,i] := 0;
    if i = (n+1) div 2 then L[k,i] := 1 else L[k,i] := 0;
    for j := 1 to k-1 do begin
      h := 0.5 * (n - 1) + j / k;
      p := 1;
      for ll := 0 to n do
        if not(ll = i) then p := p * (h - ll) / (i - ll);
      L[j,i] := p;
```

```

    end; // j
  end; // i
end;

function Get_a(const n, k, i, j, u, m : integer): extended;
var tau, sum : extended; l : integer;
begin
  tau := 0.5 * (n - 1) + j / k;
  sum := 0;
  for l := 0 to n do if l <> i then sum := sum + power(tau-l,m-u-1);
  sum := sum * Fak(u) / Fak(m);
  if odd(u-m) then Get_a := - sum else Get_a := sum;
end;

procedure Get_b(const n, k, i, j, u : integer; var b : TA_IntFilter);
var m1, m2 : integer;
begin
  SetLength(b,u+1);
  b[0] := 1;
  for m1 := 1 to u do begin
    b[m1] := 0;
    for m2 := 0 to m1-1 do b[m1] := b[m1] + Get_a(n, k, i, j, m1-1, m2) * b[m2];
  end;
end;

Function LnFak(CONST n : Extended) : Extended;
Begin
  If n > 1 then LnFak := Ln(n) + LnFak(n-1)
  else LnFak := 0;
End;

function Get_InterpolDiff_Error(
  const u, n : integer; const pixf_N_div_f_s : extended): extended;
var i : integer; sum : extended;
begin
  sum := u * ln(n+1)
    + (n+2) * ln(2 * pixf_N_div_f_s)
    - ln(pi * sqrt(n + n + 3))
    - LnFak(n+1);
  for i := 0 to (n-1) div 2 do sum := sum + 2 * ln(0.5+i);
  Get_InterpolDiff_Error := exp(sum);
end;

procedure Get_LAGRANGE_Factors(const u, k, n      : integer;
                              const pixf_N_div_f_s : extended;
                              var L              : TAA_IntFilter);
// L : FIR Filter for interpolation and differentiation
var i, j : integer; fac : extended; b : TA_IntFilter;
begin
  Get_L0(k,n,L);
  if u > 0 then begin
    fac := exp(u*ln(0.5 / pixf_N_div_f_s));
    for j := 1 to k-1 do
      for i := 0 to n do begin
        Get_b(n, k, i, j, u, b);

```

```

        L[j,i] := L[j,i] * b[u] * fac;
    end;
end; // u > 0
end;

procedure Interpol_LAGRANGE(
    const x          : TA_series;
    const TT, u, k, n : integer;
    const pixf_N_div_f_s : extended;
    var  x_int       : U_SP00.TA_series;
    var  TT_int      : integer);
// LAGRANGE-Interpolation
// x : original series
// TT : number data in x
// u : differentiation u times
// for u > 8 there are remarkable rounding errors
// k : upsampling factor
// n : degree of interpolation/differentiation polynom
// x_int : interpolated series
// TT_int : number data in x_int
var t, j, m, nh : integer;
    sum          : extended;
    L            : TAA_IntFilter;
begin
    Get_LAGRANGE_Factors(u,k,n,pixf_N_div_f_s,L);
    TT_int := 1 + (TT-1) * k;
    SetLength(x_int,TT_int);
    nh := (n-1) div 2;
// at the left no interpolation/differentiation
    for t := 0 to nh - 1 do begin
        x_int[t*k] := x[t];
        for j := 1 to k-1 do x_int[t*k + j] := x_int[t*k + j - 1];
    end;
// interpolation/differentiation polynomial degree n
    for t := nh to TT - 2 - nh do begin
        x_int[t*k] := x[t];
        for j := 1 to k-1 do begin
            sum := 0;
            for m := 0 to n do sum := sum + L[j,m] * x[t-nh+m];
            x_int[t*k + j] := sum;
        end;
    end;
// at the right no interpolation/differentiation
    for t := TT - 1 - nh to TT - 2 do begin
        x_int[t*k] := x[t];
        for j := 1 to k-1 do x_int[t*k + j] := x_int[t*k + j - 1];
    end;
    x_int[(TT-1) * k] := x[TT-1];

// zero at very left and right
// linear interpolation at sample points
    if (u > 0) then begin
        for t := 0 to k * nh - 1 do x_int[t] := 0;
        for t := k * nh to TT_int - 1 - k * nh do

```

```
    if t mod k = 0 then x_int[t] := 0.5 *(x_int[t-1] + x_int[t+1]);  
    for t := TT_int - k * nh to TT_int - 1 do x_int[t] := 0;  
end;  
  
end;
```


Anhang B

Datenblätter

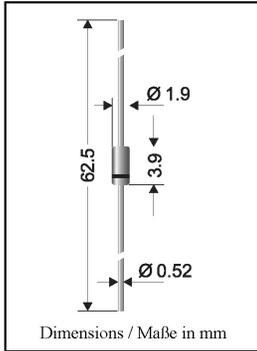
B.1 Kleinsignaldiode 1N4148



1N 4148, 1N 4150, 1N 4151, 1N 4448

Silicon Planar Diodes

Silizium-Planar-Dioden



Nominal current Nennstrom	150...300 mA
Repetitive peak reverse voltage Periodische Spitzensperrspannung	50...100 V
Glass case Glasgehäuse	DO-35 SOD-27
Weight approx. Gewicht ca.	0.13 g
Standard packaging taped in ammo pack Standard Lieferform gegurtet in Ammo-Pack	see page 16 siehe Seite 16

Maximum ratings

Grenzwerte

Type Typ	Reverse voltage Sperrspannung V_{RM} [V]	Reverse Breakdown Voltage Abbruchspannung V_{RRM} [V] ¹⁾
1N 4148	75	100
1N 4150	50	50
1N 4151	50	75
1N 4448	75	100

		1N 4148 1N 4448	1N 4150	1N 4151
Max. average forward rectified current, R-load Dauergrenzstrom in Einwegschaltung mit R-Last	I_{FAV}	150 mA ²⁾	300 mA ²⁾	200 mA ²⁾
Repetitive peak forward current Periodischer Spitzenstrom	I_{FRM}	500 mA ²⁾	600 mA ²⁾	500 mA ²⁾
Non-repetitive peak fwd. current Stoßstrom Grenzwert	$t_p = 1 \mu s$ $T_j = 25^\circ C$ I_{FSM}	2000 mA	4000 mA	2000 mA
Max. power dissipation Max. Verlustleistung	$T_A = 25^\circ C$ P_{tot}		500 mW ²⁾	
Operating junction temp. – Sperrschichttemp.	T_j		- 50...+ 200°C	
Storage temperature – Lagerungstemperatur	T_s		- 50...+ 200°C	

¹⁾ Tested with 100 μA pulses – Gemessen mit 100 μA -Impulsen

²⁾ Valid, if leads are kept at $T_A = 25^\circ C$ at a distance of 5 mm from case
Gültig, wenn die Anschlußdrähte in 5 mm Abstand von Gehäuse auf $T_A = 25^\circ C$ gehalten werden

1N 4148, 1N 4150, 1N 4151, 1N 4448



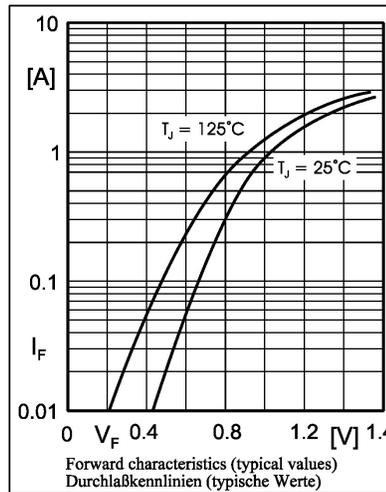
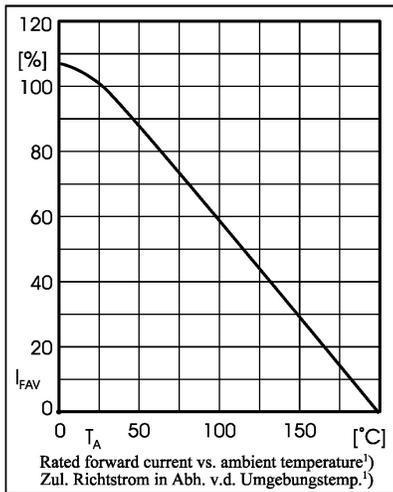
Characteristics, $T_j = 25^\circ\text{C}$

Kennwerte, $T_j = 25^\circ\text{C}$

Type Typ	Forward voltage Durchlaßspannung		Leakage current Sperrstrom		Rev. recovery time ¹⁾ Sperrverzugszeit ¹⁾
	V_F [V]	I_F [mA]	I_R [nA]	V_R [V]	
1N 4148	< 1	10	< 25 < 5.000 < 50.000	20 75 20 ($T_j = 150^\circ\text{C}$)	< 4
1N 4150	0.54...0.62 0.66...0.74 0.76...0.86 0.82...0.92 0.87...1.00	1 10 50 100 200	< 100 < 100.000	50 50 ($T_j = 150^\circ\text{C}$)	< 4
1N 4151	< 1	50	< 50 < 50.000	50 50 ($T_j = 150^\circ\text{C}$)	< 2
1N 4448	0.62...0.72 < 1	5 100	< 20 < 5.000 < 50.000	25 75 20 ($T_j = 150^\circ\text{C}$)	< 4

Thermal resistance junction to ambient air
Wärmewiderstand Sperrschicht – umgebende Luft

$R_{thA} < 0.3 \text{ K/mW}^2$



¹⁾ $I_F = 10 \text{ mA}$ über / through $I_R = 10 \text{ mA}$ bis / to $I_R = 1 \text{ mA}$, $U_R = 6 \text{ V}$, $R_L = 100 \Omega$

²⁾ Valid, if leads are kept at $T_A = 25^\circ\text{C}$ at a distance of 5 mm from case
Gültig, wenn die Anschlußdrähte in 5 mm Abstand von Gehäuse auf $T_A = 25^\circ\text{C}$ gehalten werden

01.10.2002

35

B.2 Gleichrichterdiode 1N4001

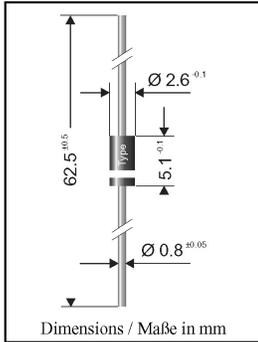


1N4001 ... 1N4007, 1N4007-1300
EM513, EM516, EM518

Silicon Rectifiers

Silizium Gleichrichter

Version 2004-10-01



Nominal current Nennstrom	1 A
Repetitive peak reverse voltage Periodische Spitzenspannung	50...2000 V
Plastic case Kunststoffgehäuse	DO-41 DO-204AL
Weight approx. – Gewicht ca.	0.4 g
Plastic material has UL classification 94V-0 Gehäusematerial UL94V-0 klassifiziert	
Standard packaging taped in ammo pack Standard Lieferform gegurtet in Ammo-Pack	

Maximum ratings

Grenzwerte

Type Typ	Repetitive peak reverse voltage Periodische Spitzenspannung V_{RRM} [V]	Surge peak reverse voltage Stoßspitzenspannung V_{RSM} [V]
1N4001	50	50
1N4002	100	100
1N4003	200	200
1N4004	400	400
1N4005	600	600
1N4006	800	800
1N4007	1000	1000
1N4007-1300	1300	1300
EM513	1600	1600
EM516	1800	1800
EM518	2000	2000

Max. average forward rectified current, R-load Dauerstrom in Einwegschaltung mit R-Last	$T_A = 75^\circ\text{C}$ $T_A = 100^\circ\text{C}$	I_{FAV} I_{FAV}	1 A ¹⁾ 0.8 A ¹⁾
Repetitive peak forward current Periodischer Spitzenstrom	$f > 15$ Hz	I_{FRM}	10 A ¹⁾
Peak forward surge current, 50 Hz half sine-wave Stoßstrom für eine 50 Hz Sinus-Halbwellen	$T_A = 25^\circ\text{C}$	I_{FSM}	50 A
Rating for fusing – Grenzlastintegral, $t < 10$ ms	$T_A = 25^\circ\text{C}$	i^2t	12.5 A ² s

¹⁾ Valid, if leads are kept at ambient temperature at a distance of 10 mm from case
Gültig, wenn die Anschlußdrähte in 10 mm Abstand von Gehäuse auf Umgebungstemperatur gehalten werden

1N4001 ... 1N4007, 1N4007-1300
EM513, EM516, EM518



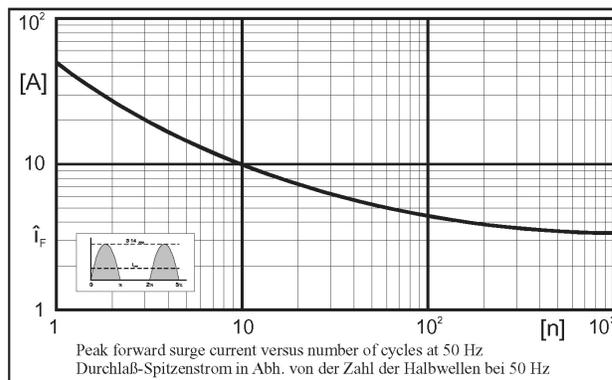
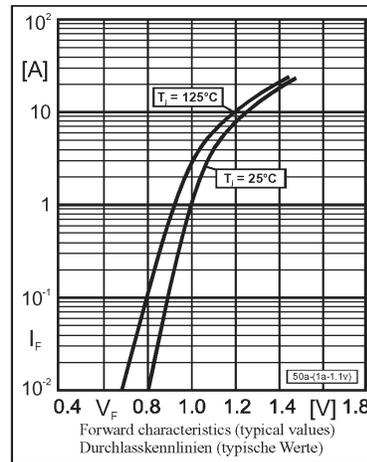
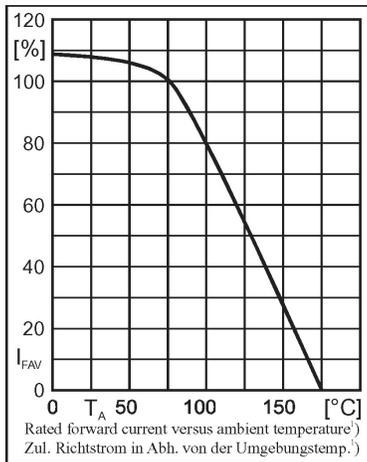
Operating junction temperature – Sperrschichttemperatur
Storage temperature – Lagerungstemperatur

T_j –50...+175°C
 T_s –50...+175°C

Characteristics

Kennwerte

Forward voltage – Durchlaßspannung	$T_j = 25^\circ\text{C}$	$I_F = 1\text{ A}$	V_F	< 1.1 V
Leakage current – Sperrstrom	$T_j = 25^\circ\text{C}$	$V_R = V_{RRM}$	I_R	< 5 μA
	$T_j = 100^\circ\text{C}$	$V_R = V_{RRM}$	I_R	< 50 μA
Thermal resistance junction to ambient air Wärmewiderstand Sperrschicht – umgebende Luft			R_{thA}	< 45 K/W ¹⁾



¹⁾ Valid, if leads are kept at ambient temperature at a distance of 10 mm from case
Gültig, wenn die Anschlußdrähte in 10 mm Abstand von Gehäuse auf Umgebungstemperatur gehalten werden

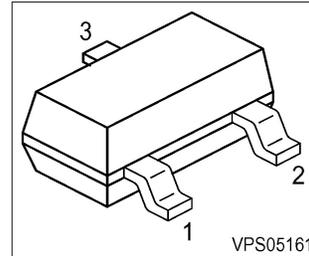
B.3 Schottkydiode BAS40



BAS40...

Silicon Schottky Diodes

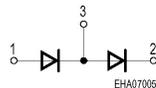
- General-purpose diode for high-speed switching
- Circuit protection
- Voltage clamping
- High-level detecting and mixing



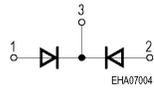
BAS40



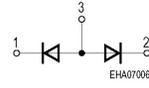
BAS40-04



BAS40-05



BAS40-06



Type	Marking	Pin Configuration			Package
BAS40	43s	1 = A	2 n.c.	3=C	SOT23
BAS40-04	44s	1 = A1	2 = C2	3=C1/A2	SOT23
BAS40-05	45s	1 = A1	2 = A2	3=C1/2	SOT23
BAS40-06	46s	1 = C1	2 = C2	3=A1/2	SOT23

Maximum Ratings

Parameter	Symbol	Value	Unit
Diode reverse voltage	V_R	40	V
Forward current	I_F	120	mA
Surge forward current, $t \leq 10$ ms	I_{FSM}	200	
Total power dissipation	P_{tot}		mW
$T_S \leq 81^\circ\text{C}$, BAS40		250	
$T_S \leq 56^\circ\text{C}$, BAS40-04; BAS40-06		250	
$T_S \leq 31^\circ\text{C}$, BAS40-05		250	
Junction temperature	T_j	150	$^\circ\text{C}$
Operating temperature range	T_{op}	-55 ... 150	
Storage temperature	T_{stg}	-55 ... 150	

Thermal Resistance

Parameter	Symbol	Value	Unit
Junction - soldering point ¹⁾	R_{thJS}		K/W
BAS40		≤ 275	
BAS40-04; BAS40-06		≤ 375	
BAS40-05		≤ 475	

¹⁾For calculation of R_{thJA} please refer to Application Note Thermal Resistance



BAS40...

Electrical Characteristics at $T_A = 25^\circ\text{C}$, unless otherwise specified

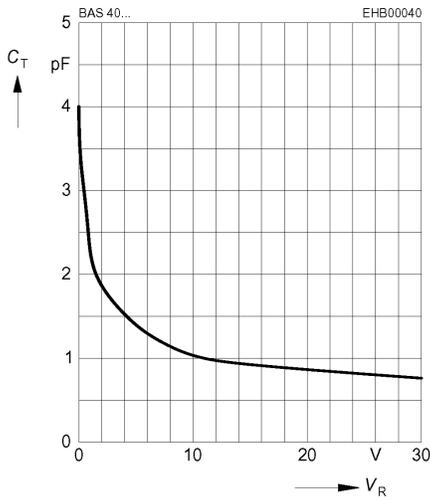
Parameter	Symbol	Values			Unit
		min.	typ.	max.	
DC Characteristics					
Breakdown voltage $I_{(BR)} = 10 \mu\text{A}$	$V_{(BR)}$	40	-	-	V
Reverse current $V_R = 30 \text{ V}$ $V_R = 40 \text{ V}$	I_R	-	-	1 10	μA
Forward voltage $I_F = 1 \text{ mA}$ $I_F = 10 \text{ mA}$ $I_F = 40 \text{ mA}$	V_F	-	310 450 720	380 500 1000	mV
AC Characteristics					
Diode capacitance- $V_R = 0 \text{ V}, f = 1 \text{ MHz}$	C_T	-	3	5	pF
Differential forward resistance $I_F = 10 \text{ mA}, f = 10 \text{ kHz}$	R_F	-	10	-	Ω
Charge carrier life time $I_F = 25 \text{ mA}$	τ_{rr}	-	-	100	ps



BAS40...

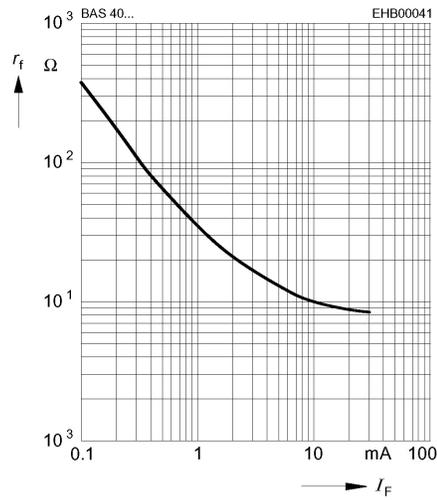
Diode capacitance $C_T = f(V_R)$

$f = 1\text{MHz}$



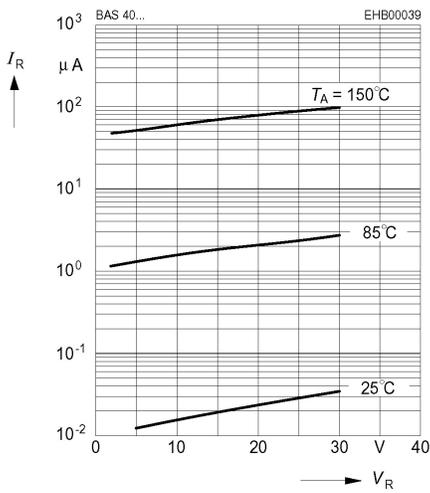
Differential forward resistance $R_f = f(I_F)$

$f = 10\text{kHz}$



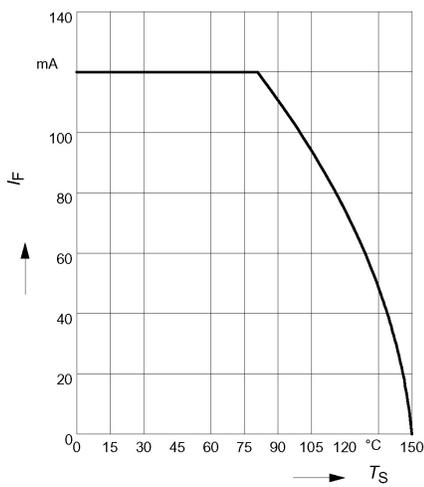
Reverse current $I_R = f(V_R)$

$T_A = \text{Parameter}$



Forward current $I_F = f(T_S)$

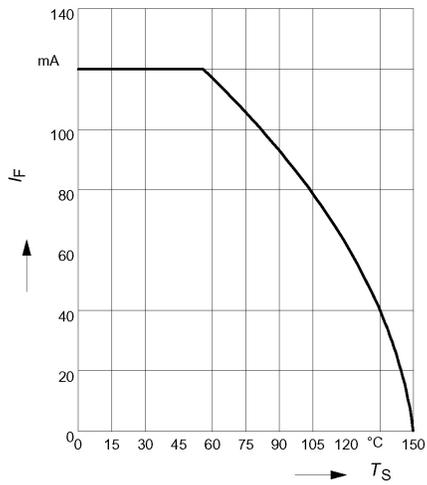
BAS40



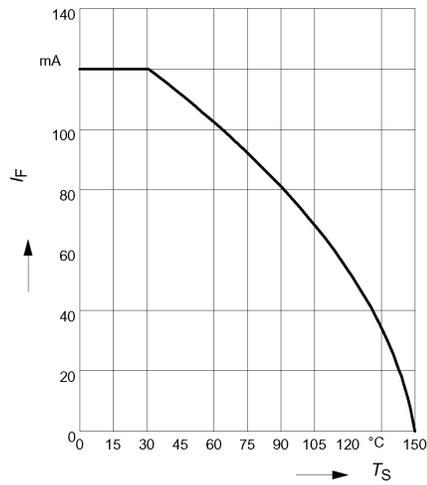


BAS40...

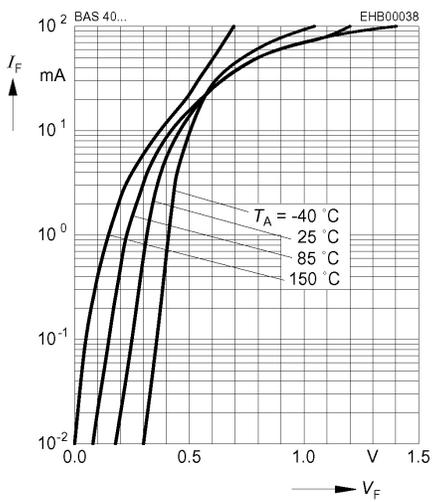
Forward current $I_F = f(T_S)$
BAS40-04, BAS40-06



Forward current $I_F = f(T_S)$
BAS40-05



Forward current $I_F = f(V_F)$
 $T_A = 25^\circ\text{C}$



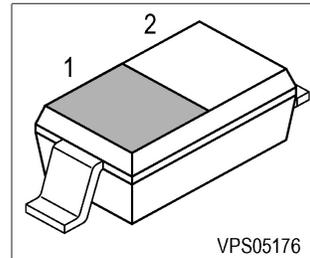
B.4 Schottkydiode BAT15-03W



BAT15-03W

Silicon Schottky Diode

- DBS mixer applications up to 12 GHz
- Low noise figure
- Low barrier type



ESD: Electrostatic discharge sensitive device, observe handling precaution!

Type	Marking	Pin Configuration		Package
BAT15-03W	P/white	1 = C	2 = A	SOD323

Maximum Ratings

Parameter	Symbol	Value	Unit
Diode reverse voltage	V_R	4	V
Forward current	I_F	100	mA
Total power dissipation, $T_S = 70\text{ °C}$	P_{tot}	100	mW
Junction temperature	T_j	150	°C
Operating temperature range	T_{op}	-55 ... 150	°C
Storage temperature	T_{stg}	-55 ... 150	°C

Thermal Resistance

Junction - soldering point ¹⁾	R_{thJS}	≤690	K/W
--	------------	------	-----

¹⁾For calculation of R_{thJA} please refer to Application Note Thermal Resistance



BAT15-03W

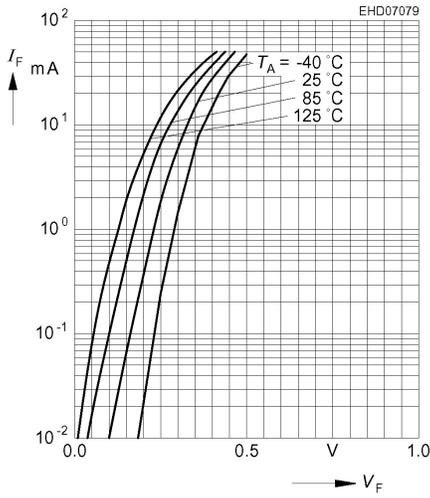
Electrical Characteristics at $T_A = 25\text{ }^\circ\text{C}$, unless otherwise specified.

Parameter	Symbol	Values			Unit
		min.	typ.	max.	
DC characteristics (per diode)					
Breakdown voltage $I_{(BR)} = 5\text{ }\mu\text{A}$	$V_{(BR)}$	4	-	-	V
Forward voltage $I_F = 1\text{ mA}$	V_F	-	0.23	0.32	
$I_F = 10\text{ mA}$		-	0.32	0.41	
AC characteristics (per diode)					
Diode capacitance $V_R = 0\text{ V}, f = 1\text{ MHz}$	C_T	-	-	0.35	pF
Forward resistance $I_F = 10\text{ mA} / 50\text{ mA}$	R_F	-	5.5	-	Ω



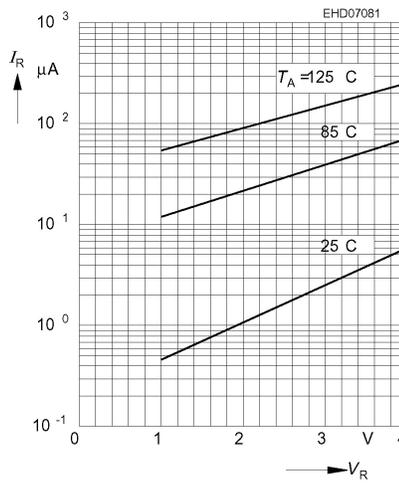
Forward current $I_F = f(V_F)$

$T_A = \text{Parameter}$



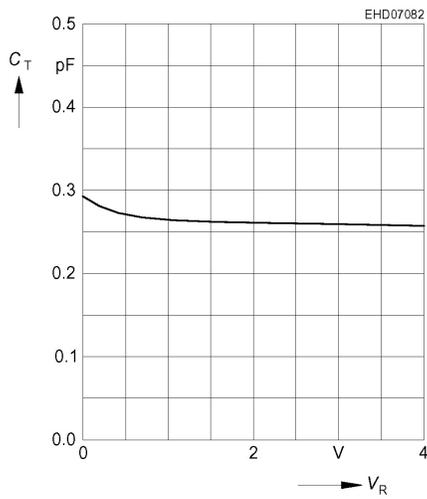
Reverse current $I_R = f(V_R)$

$T_A = \text{Parameter}$



Diode capacitance $C_T = f(V_R)$

$f = 1\text{MHz}$



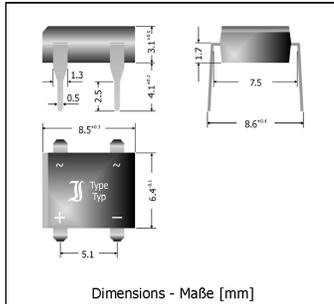
B.5 Brückengleichrichter B40D .. B500D



B40D ... B500D

B40D ... B500D
Silicon-Bridge-Rectifiers
Silizium-Brückengleichrichter

Version 2009-01-02



Nominal current Nennstrom	1 A
Alternating input voltage Eingangswchelsspannung	40...500 V
Plastic case DIL Kunststoffgehäuse DIL	8.3 x 6.4 x 3.1 [mm]
Weight approx. – Gewicht ca.	0.4 g
Plastic material has UL classification 94V-0 Gehäusematerial UL94V-0 klassifiziert	
Standard packaging: plastic tubes Standard Lieferform: Plastik-Schienen	



Recognized Product – Underwriters Laboratories Inc.® File E175067
 Anerkanntes Produkt – Underwriters Laboratories Inc.® Nr. E175067

Maximum ratings	Grenzwerte	
Type Typ	Max. alternating input voltage Max. Eingangswchelsspannung V_{VRMS} [V]	Repetitive peak reverse voltage Periodische Spitzenspersspannung V_{RRM} [V] ¹⁾
B40D	40	80
B80D	80	160
B125D	125	250
B250D	250	600
B380D	380	800
B500D	500	1000

Repetitive peak forward current Periodischer Spitzenstrom	$f > 15$ Hz	I_{FRM}	10 A ²⁾
Peak forward surge current, 50/60 Hz half sine-wave Stoßstrom für eine 50/60 Hz Sinus-Halbwell	$T_A = 25^\circ\text{C}$	I_{FSM}	40/44 A
Rating for fusing, $t < 10$ ms Grenzlastintegral, $t < 10$ ms	$T_A = 25^\circ\text{C}$	i^2t	8 A ² s
Operating junction temperature – Sperrschichttemperatur		T_j	-50...+150°C
Storage temperature – Lagerungstemperatur		T_s	-50...+150°C

¹ Valid per diode – Gültig pro Diode

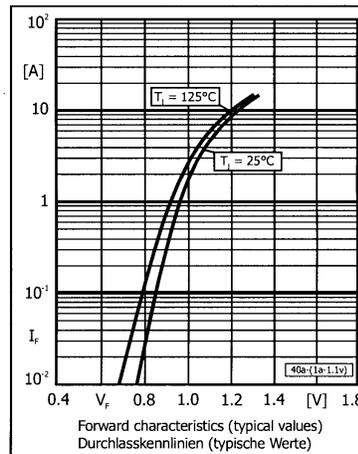
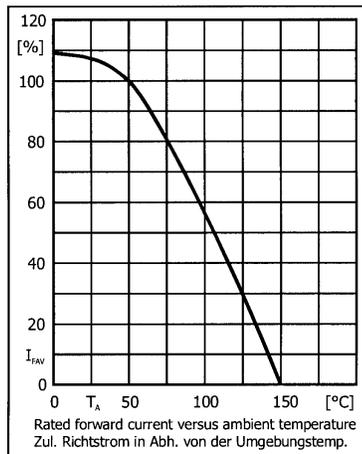
² Max. temperature of the terminals $T_T = 100^\circ\text{C}$ – Max. Temperatur der Anschlüsse $T_T = 100^\circ\text{C}$



B40D ... B500D

Characteristics		Kennwerte		
Max. average forward rectified current Dauergrenzstrom	$T_A = 50^\circ\text{C}$	R-load C-load	I_{FAV} I_{FAV}	1.0 A ¹⁾ 0.8 A ¹⁾
Forward voltage – Durchlass-Spannung	$T_j = 25^\circ\text{C}$	$I_F = 1\text{ A}$	V_F	< 1.1 V ²⁾
Leakage current – Sperrstrom	$T_j = 25^\circ\text{C}$	$V_R = V_{RRM}$	I_R	< 10 μA
Thermal resistance junction to ambient air Wärmewiderstand Sperrschicht – umgebende Luft			R_{thA}	< 60 K/W ³⁾

Type Typ	Max. admissible load capacitor Max. zulässiger Ladekondensator CL [μF]	Min. required protective resistor Min. erforderl. Schutzwiderstand Rt [Ω]
B40D	2500	2.0
B80D	1250	4.0
B125D	800	6.3
B250D	333	15.0
B380D	250	20.0
B500D	200	25.0



- 1 Mounted on P.C. Board with 25 mm² copper pads at each terminal
Montage auf Leiterplatte mit 25 mm² Kupferbelag (Lötpad) an jedem Anschluss
- 2 Valid per diode – Gültig pro Diode

B.6 Bipolartransistor BFY50

Philips Semiconductors

Product specification

NPN medium power transistors

BFY50; BFY51; BFY52

FEATURES

- High current (max. 1 A)
- Low voltage (max. 35 V).

APPLICATIONS

- General purpose industrial applications.

DESCRIPTION

NPN medium power transistor in a TO-39 metal package.

PINNING

PIN	DESCRIPTION
1	emitter
2	base
3	collector, connected to case

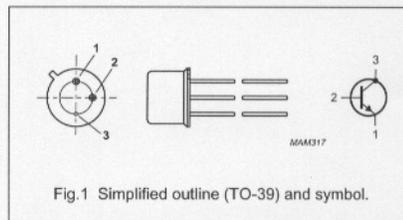


Fig.1 Simplified outline (TO-39) and symbol.

QUICK REFERENCE DATA

SYMBOL	PARAMETER	CONDITIONS	MIN.	TYP.	MAX.	UNIT
V_{CB0}	collector-base voltage	open emitter	-	-	80	V
	BFY50		-	-	60	V
	BFY51		-	-	40	V
V_{CE0}	collector-emitter voltage	open base	-	-	35	V
	BFY50		-	-	30	V
	BFY52		-	-	20	V
I_{CM}	peak collector current		-	-	1	A
P_{tot}	total power dissipation	$T_{amb} \leq 25\text{ }^{\circ}\text{C}$	-	-	800	mW
		$T_{case} \leq 100\text{ }^{\circ}\text{C}$	-	-	2.86	W
h_{FE}	DC current gain	$I_C = 150\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$				
	BFY50		30	112	-	
	BFY51		40	123	-	
f_T	transition frequency	$I_C = 50\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}; f = 100\text{ MHz}$				
			BFY50	60	-	-
	BFY51; BFY52		50	-	-	MHz

1997 Apr 22

2

NPN medium power transistors

BFY50; BFY51; BFY52

LIMITING VALUES

In accordance with the Absolute Maximum Rating System (IEC 134).

SYMBOL	PARAMETER	CONDITIONS	MIN.	MAX.	UNIT
V _{CBO}	collector-base voltage	open emitter			
	BFY50		-	80	V
	BFY51		-	60	V
	BFY52		-	40	V
V _{CEO}	collector-emitter voltage	open base			
	BFY50		-	35	V
	BFY51		-	30	V
	BFY52		-	20	V
V _{EBO}	emitter-base voltage	open collector	-	6	V
I _C	collector current (DC)		-	1	A
I _{CM}	peak collector current		-	1	A
I _{BM}	peak base current		-	100	mA
P _{tot}	total power dissipation	T _{amb} ≤ 25 °C	-	800	mW
		T _{case} ≤ 25 °C	-	5	W
		25 °C < T _{case} < 100 °C	-	2.86	W
T _{stg}	storage temperature		-65	+150	°C
T _j	junction temperature		-	200	°C
T _{amb}	operating ambient temperature		-65	+150	°C

THERMAL CHARACTERISTICS

SYMBOL	PARAMETER	CONDITIONS	VALUE	UNIT
R _{th j-a}	thermal resistance from junction to ambient	in free air	220	K/W
R _{th j-c}	thermal resistance from junction to case		35	K/W

NPN medium power transistors

BFY50; BFY51; BFY52

CHARACTERISTICS

 $T_j = 25\text{ }^\circ\text{C}$ unless otherwise specified.

SYMBOL	PARAMETER	CONDITIONS	MIN.	TYP.	MAX.	UNIT
I_{CBO}	collector cut-off current BFY50	$I_E = 0; V_{CB} = 60\text{ V}$	–	–	50	nA
		$I_E = 0; V_{CB} = 60\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	2.5	μA
		$I_E = 0; V_{CB} = 80\text{ V}$	–	–	500	nA
		$I_E = 0; V_{CB} = 80\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	30	μA
I_{CBO}	collector cut-off current BFY51	$I_E = 0; V_{CB} = 40\text{ V}$	–	–	50	nA
		$I_E = 0; V_{CB} = 40\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	2.5	μA
		$I_E = 0; V_{CB} = 60\text{ V}$	–	–	500	nA
		$I_E = 0; V_{CB} = 60\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	30	μA
I_{CBO}	collector cut-off current BFY52	$I_E = 0; V_{CB} = 30\text{ V}$	–	–	50	nA
		$I_E = 0; V_{CB} = 30\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	2.5	μA
		$I_E = 0; V_{CB} = 40\text{ V}$	–	–	500	nA
		$I_E = 0; V_{CB} = 40\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	30	μA
I_{EBO}	emitter cut-off current	$I_C = 0; V_{EB} = 5\text{ V}$	–	–	50	nA
		$I_C = 0; V_{EB} = 5\text{ V}; T_j = 100\text{ }^\circ\text{C}$	–	–	2.5	μA
		$I_C = 0; V_{EB} = 6\text{ V}$	–	–	500	nA
h_{FE}	DC current gain BFY50	$I_C = 10\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	20	–	–	
		$I_C = 150\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	30	–	–	
		$I_C = 500\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	20	–	–	
		$I_C = 1\text{ A}; V_{CE} = 10\text{ V}$	15	–	–	
h_{FE}	DC current gain BFY51	$I_C = 10\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	30	–	–	
		$I_C = 150\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	40	–	–	
		$I_C = 500\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	25	–	–	
		$I_C = 1\text{ A}; V_{CE} = 10\text{ V}$	15	–	–	
h_{FE}	DC current gain BFY52	$I_C = 10\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	30	–	–	
		$I_C = 150\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	60	–	–	
		$I_C = 500\text{ mA}; V_{CE} = 10\text{ V}$	30	–	–	
		$I_C = 1\text{ A}; V_{CE} = 10\text{ V}$	15	–	–	

NPN medium power transistors

BFY50; BFY51; BFY52

SYMBOL	PARAMETER	CONDITIONS	MIN.	TYP.	MAX.	UNIT
V _{CEsat}	collector-emitter saturation voltage BFY50	I _C = 10 mA; I _B = 1 mA	-	-	200	mV
		I _C = 150 mA; I _B = 15 mA	-	-	200	mV
		I _C = 500 mA; I _B = 50 mA	-	-	700	mV
		I _C = 1 A; I _B = 100 mA	-	-	1	V
V _{CEsat}	collector-emitter saturation voltage BFY51; BFY52	I _C = 10 mA; I _B = 1 mA	-	-	200	mV
		I _C = 150 mA; I _B = 15 mA	-	-	350	mV
		I _C = 500 mA; I _B = 50 mA	-	-	1	V
		I _C = 1 A; I _B = 100 mA	-	-	1.6	V
V _{BEsat}	base-emitter saturation voltage	I _C = 10 mA; I _B = 1 mA	-	-	1.2	V
		I _C = 150 mA; I _B = 15 mA	-	-	1.3	V
		I _C = 500 mA; I _B = 50 mA	-	-	1.5	V
		I _C = 1 A; I _B = 100 mA	-	-	2	V
C _c	collector capacitance	I _E = I _B = 0; V _{CB} = 10 V; f = 1 MHz	-	7	12	pF
f _T	transition frequency BFY50 BFY51; BFY52	I _C = 50 mA; V _{CE} = 10 V; f = 100 MHz; T _{amb} = 25 °C	60	140	-	MHz
			50	-	-	MHz
Switching times (between 10% and 90% levels)						
t _{on}	turn-on time	I _{Con} = 150 mA; I _{Bon} = 15 mA; I _{Boff} = -15 mA	-	55	-	ns
t _d	delay time		-	15	-	ns
t _r	rise time		-	40	-	ns
t _{off}	turn-off time		-	360	-	ns
t _s	storage time		-	300	-	ns
t _f	fall time		-	60	-	ns

Anhang C

Miszellen

C.1 Wörterbuch

Englisch	Deutsch	Beispiele Vorkommen/Kontext
bias	Hilfs- oder Störgröße	allg.
bias current	Eigenstromverbrauch	Spannungsregler
breakdown	Durchbruch	Diode, Transistor
bulk	Halbleitert Träger	Feldeffekttransistor
case	Gehäuse	Bipolartransistor
continuous current	Dauerstrom	allg.
drain	Stromsenke	Feldeffekttransistor
gain-bandwidth-product	Verstärkungs-Bandweite- Produkt	Verstärker
gate	Tor, Steueranschluss	Feldeffekttransistor
input offset current	Eingangsfehlstrom	Operationsverstärker
input offset voltage	Eingangsfehlspannung	Operationsverstärker
open loop gain	Leerlaufverstärkung	Operationsverstärker
peak current	Spitzenstrom	allg.
safe operating area (SOA)	zulässiger Betriebsbereich	Bipolartransistor
shorted	kurzgeschlossen	allg.
slew rate	Anstiegsgeschwindigkeit	Operationsverstärker
soldering point	Lötpunkt	allg.
source	Quelle, aus welcher der gesteuerte Strom fließt	Feldeffekttransistor
threshold voltage	Schwellenspannung	allg.

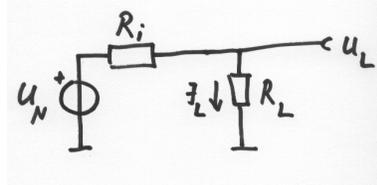
Anhang D

Übungsaufgaben

D.1 Aufgabenblatt 1 — Reale Spannungsquelle unter Last

(Maximale Punktzahl: 2)

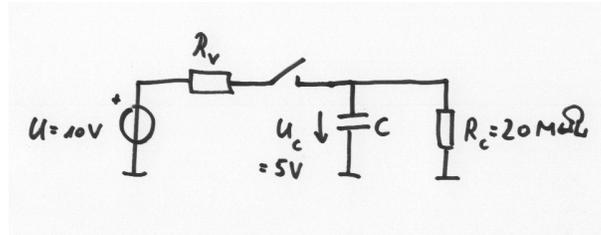
Eine Gleichspannungsquelle mit der Nennspannung $U_N = 12\text{ V}$ und dem Innenwiderstand R_i wird mit Widerständen R_L belastet, so dass Ströme im Bereich bis zu 10 A fließen. Wie groß darf R_i höchstens sein, damit die über R_L anliegende Klemmspannung U_L um weniger als 1% von der Nennspannung U_N abweicht?



D.2 Aufgabenblatt 2 — Umladung eines realen Kondensators

(Maximale Punktzahl: 3)

Ein realer Kondensator sei zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Spannung $U_C(t = 0) = 5 \text{ V}$ geladenen. Der Kondensator habe den Isolationswiderstand (parasitärer ohmscher Widerstand zwischen den Platten) von $R_C = 20 \text{ M}\Omega$. Über einen Vorwiderstand R_V wird an den Kondensator zum Zeitpunkt Null die Gleichspannung $U = 10 \text{ V}$ gelegt. Wie groß muss R_V sein, damit die Spannung über dem Kondensator konstant $U_C(t = 0)$ bleibt?



D.3 Aufgabenblatt 3 — Kondensator bei Ansteuerung mit harmonischer Wechselspannung

(Maximale Punktzahl: 4)

Die Differentialgleichung (2.38) (s.S. 34) zur Umladung eines Kondensators lautet,

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_0 - U(t)}{RC}$$

Umgeschrieben mit $\dot{U} \equiv \frac{dU(t)}{dt}$ folgt

$$RC\dot{U} + U = U_0$$

Zeigen Sie, dass die Lösung für harmonische Eingangssignale $U_0(t) = A \cos \omega t$ wie folgt lautet,

$$U(t) = A \cdot G(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi) ,$$

mit dem Betrag der Übertragungsfunktion,

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$$

und der Phasenverschiebung

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\Omega) .$$

Darin wurde $\Omega \equiv \omega RC$ gesetzt.

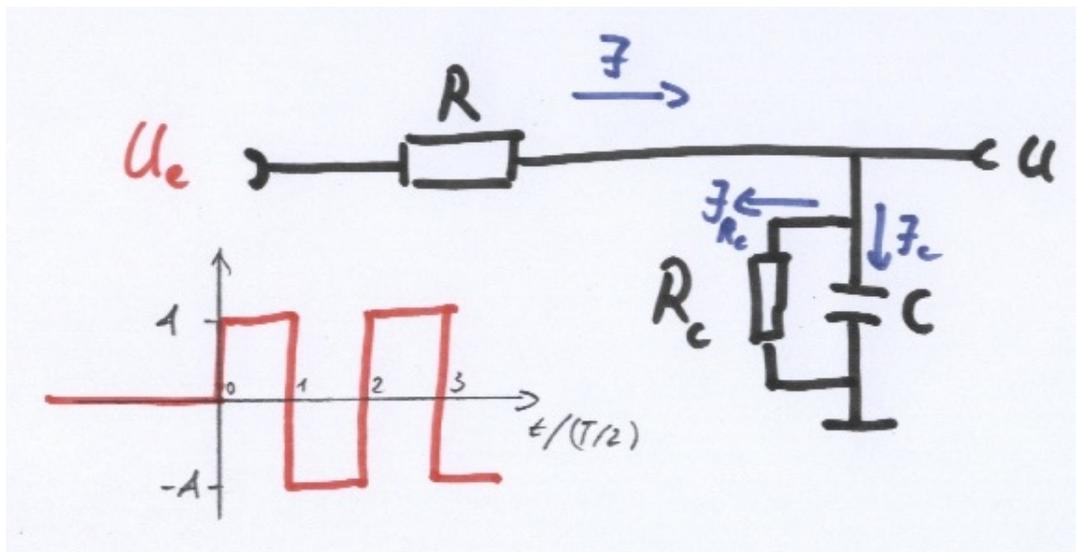
D.4 Aufgabenblatt 4 — Kondensator bei Ansteuerung mit Rechteckspannung

(Maximale Punktzahl: 7)

Ein realer Kondensator habe die Kapazität $C = 1\mu\text{F}$ und den Isolationswiderstand $R_C = 20\text{M}\Omega$. Er sei zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen, $U_0 \equiv U(t = 0) = 0$. Über einen Vorwiderstand $R = 1\text{k}\Omega$ wird an den Kondensator ein Rechtecksignal $U_e(t)$ mit der Amplitude $A = 5\text{V}$ und der Periode $T = 10^{-3}\text{s}$ gelegt,

$$U_e(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ A & : 2n \cdot (T/2) < t < (2n + 1) \cdot (T/2) , \quad n = 0, 1, 2 \dots \\ -A & : \text{sonst} \end{cases}$$

Gesucht ist der zeitliche Verlauf der Ausgangsspannung U . Skizzieren Sie diesen Verlauf für die Zeitdauer $0 < t < 5T$.

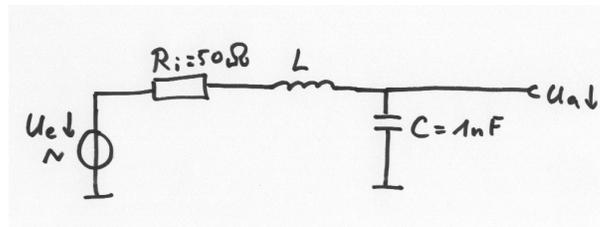


D.5 Aufgabenblatt 5 — RCL–Serienschaltung

(Maximale Punktzahl: 7)

Eine Wechselspannungsquelle für harmonische Spannungsverläufe $U_e = |U_e| \cdot \sin \omega t$ und dem Innenwiderstand $R_i = 50 \Omega$ steuere über einen geraden Kupferdraht mit der Induktivität L einen Kondensator $C = 1 \text{ nF}$ an.

- Berechnen Sie zunächst die Drahtinduktivität L für die Drahtlänge $l = 3 \text{ m}$ und den Drahtradius $r = 0,2 \text{ mm}$.
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(\Omega) = U_a/U_e$, wobei die Ausgangsspannung U_a über dem Kondensator abfällt. Verwenden Sie die normierte Frequenz $\Omega \equiv \omega/\omega_0$, wobei $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$.
- Skizzieren Sie die Übertragungsfunktion U_a/U_e (Bodediagramm für Betrag und Phase)! Zeichnen Sie in diese Diagramme auch die Kurvenschar für $L = 1; 10; 100 \mu\text{H}$ ein!
- Für welche Werte $\Omega = \Omega_{\max}$ wird $|H|(\Omega)$ maximal? Geben Sie konkrete Werte für Ω_{\max} und $|H|(\Omega_{\max})$ für $R = 50 \Omega$, $C = 1 \text{ nF}$ und $L = 1; 10; 100 \mu\text{H}$ an!



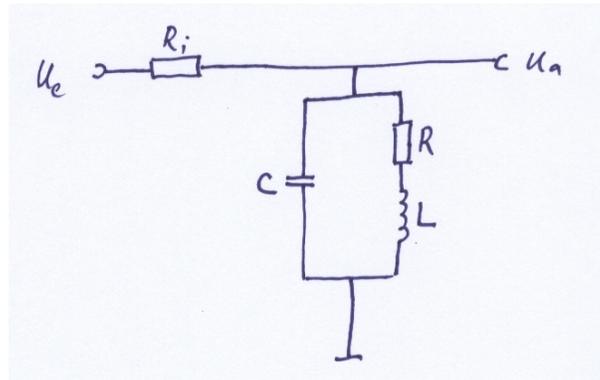
D.6 Aufgabenblatt 6 — Realer Widerstand

(Maximale Punktzahl: 5)

Ein realer Widerstand werde von einer harmonischen Spannungsquelle $U_e = \hat{U}_e \sin \omega t$ angesteuert, der Innenwiderstand der Spannungsquelle sei R_i (s. Abb.).

Berechnen Sie den Frequenzgang der Ausgangsspannung U_a !

Stellen Sie den Amplituden- und Phasengang graphisch dar für $R_i = 50 \Omega$, $R = 10^3 \Omega$, $L = 10^{-7} \text{ H}$ und $C = 10^{-12} \text{ F}$.

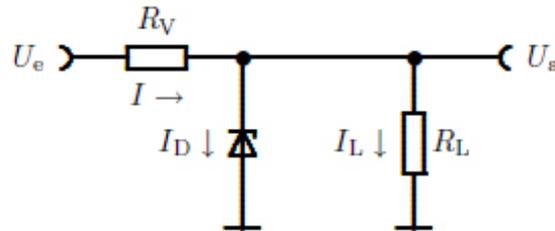


D.7 Aufgabenblatt 7 — Passiver Bandpass

D.8 Aufgabenblatt 8 — Laplacetransformation

D.9 Aufgabenblatt 9 — Spannungsstabilisierung mit Z-Diode

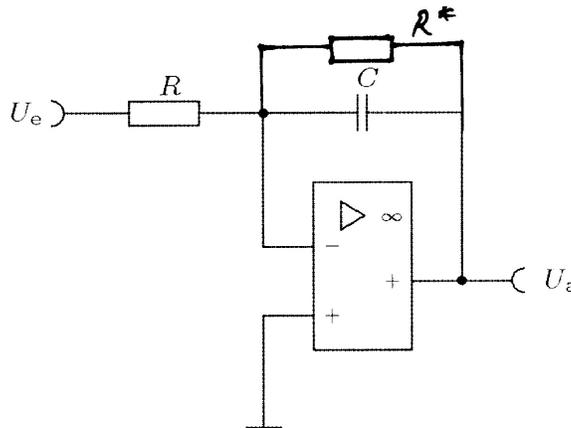
Eine Spannungsquelle U_e mit dem Innenwiderstand $R_i = 1 \Omega$ schwanke im Bereich $[U_{e\min}, U_{e\max}] = [9, 10]$. Mit der Stabilisierungsschaltung (s.u.) soll die Spannung auf $U_Z = U_a = 5V$ stabilisiert werden. Die Zener-Diode habe den maximalen Zener-Strom $I_{D\max} = 0,5 A$.



- a) Dimensionieren Sie den Vorwiderstand R_V (Wert des Widerstandes und maximale Verlustleistung)!
- b) In welchem Bereich darf der Lastwiderstand R_L schwanken, so dass der Stabilisierungsbereich nicht verlassen wird?
- c) Der differentielle Widerstand r_Z der Z-Diode sei im Stabilisierungsbereich kleiner als $0,01 \Omega$. Wie groß ist der Glättungsfaktor $G = dU_e/dU_a$ der Schaltung?

D.10 Aufgabenblatt 10 — OPV, Integrierer

Gegeben ist die folgende Schaltung:



- a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion für harmonische Eingangsspannungen)! Vereinfachen (approximieren) Sie die Übertragungsfunktion für den Fall $\omega R^*C \gg 1$!
- b) Welcher Differentialgleichung genügt die Ausgangsspannung $U_a(t)$ bei beliebigen zeitabhängigen Eingangsspannungen $U_e(t)$?
- c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus b) für den Fall $R^* = \infty$, U_e beliebig veränderlich !

- d) Lösen Sie die Differentialgleichung aus b) für den Fall $R^* < \infty$, $U_e = \text{const.}$
- e) Lösen Sie die Differentialgleichung aus b) für den Fall $R^* < \infty$, U_e beliebig veränderlich !

D.11 Aufgabenblatt 11 — Karnaugh-Tafeln

Gegeben ist die folgende Wahrheitstabelle für eine BCD-Zu-Siebensegmentanzeige:

Ziffer	x_1	x_2	x_3	x_4	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
4	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

Entwickeln Sie möglichst kurze Ausdrücke für die booleschen Funktionen $a(x_1, x_2, x_3, x_4)$ bis $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ unter Verwendung von Karnaugh-Tafeln!

Anhang E

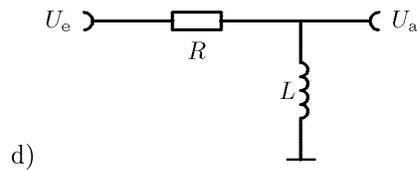
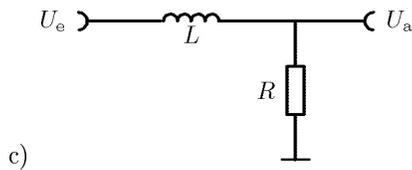
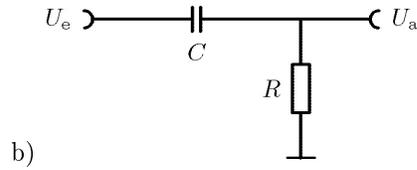
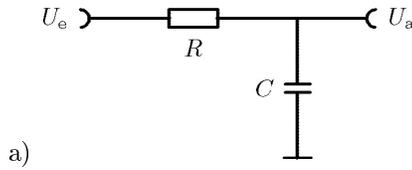
Testfragen

Passive Bauelemente, Grundgrößen

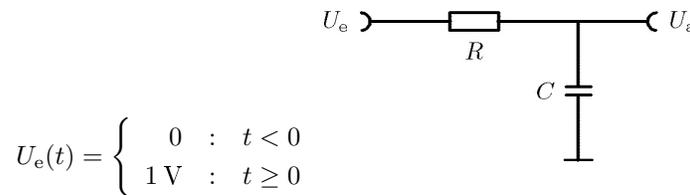
1. Wie lauten die beiden wichtigsten Parameter eines ohmschen Widerstandes?
2. Wie lauten die beiden wichtigsten Parameter eines Kondensators?
3. Wie lauten die beiden wichtigsten Parameter einer Induktivität?
4. Wie hängen Strom und Spannung über einer Kapazität C zusammen (Formel)?
5. Wie hängen Strom und Spannung über einer Induktivität L zusammen (Formel)?
6. Wie lauten die Auf- und Entladekurve eines Kondensators (Strombegrenzung mit ohmschem Widerstand)?
7. Wie berechnet sich der mittlere Leistungsumsatz in einem ohmschen Widerstand, wenn der Spannungsabfall $U(t)$ von der Zeit t abhängt?
8. Wie groß ist der mittlere Leistungsumsatz in einem ohmschen Widerstand, wenn der Spannungsabfall harmonisch von der Zeit t abhängt, $U(t) = \hat{U} \cos \omega t$? (Rechnung!)
9. Wie groß ist der mittlere Leistungsumsatz in einem Kondensator, wenn der Spannungsabfall harmonisch von der Zeit t abhängt, $U(t) = \hat{U} \cos \omega t$? (Rechnung!)
10. Was versteht man unter dem Effektivwert U_{eff} der elektrischen Spannung? Wie groß ist er für einen harmonischen Spannungsverlauf, $U(t) = \hat{U} \cos \omega t$?
11. Was versteht man unter der Temperaturspannung? Wie groß ist sie bei Zimmertemperatur?
12. Wie groß ist die effektive thermische Rauschspannung über den ohmschen Widerständen $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ und $R_2 = 10 \text{ M}\Omega$ im Frequenzband $B = (0 \dots 1) \text{ MHz}$, bei Zimmertemperatur? (Boltzmann Konstante $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$)
13. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für einen realen ohmschen Widerstand und erläutern Sie dieses!
14. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für einen realen Kondensator und erläutern Sie dieses!

Grundsaltungen mit passiven Bauelementen

- Wie lauten die Übertragungsfunktionen der dargestellten Schaltungen? Skizzieren Sie die zugehörigen Bodediagramme (Amplituden- und Phasengang)!



- Die dargestellte Schaltung ($R = 1\text{ k}\Omega$, $C = 100\text{ }\mu\text{F}$) werde mit einem Spannungssprung $U_e(t)$ angesteuert:



Die Anfangsausgangsspannung sei Null, $U_a(0) = 0$. Berechnen Sie die Aufladekurve des Kondensators! Nach welcher Zeit hat sich der Kondensator auf 99% seines asymptotischen Endwertes aufgeladen?

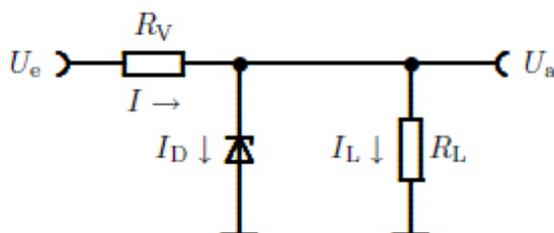
- Was versteht man unter der komplexen Leistungsanpassung an eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $R_i + jX_i$?
- Wozu dient der Tastkopf bei der Darstellung von zeitlich veränderlichen Signalen mit einem Oszilloskop?

Lineare Systemtheorie

- Was versteht man unter einem linearen System?
- Was versteht man unter einem zeitinvarianten System?
- Ein lineares System mit der Gewichtsfunktion $h(t)$ werde mit einem Signal $x(t)$ angesteuert. Wie berechnet sich das Ausgangssignal? Geben Sie zwei Rechenwege an (Rechnen im Zeit- und Frequenzbereich)!
- Wie lautet die Fourierreihenentwicklung für ein symmetrisches Rechtecksignal (Tastverhältnis 1:2)?
- Wie lautet die Spektraldichte eines harmonischen Signals, $x(t) = A \cos \omega t$?

Dioden

1. Wie lautet die Diodenkennlinie im Durchlassbereich? (Geben Sie für die Parameter Wertebereiche für Siliziumdioden an.)
2. Was versteht man unter dem Bahnwiderstand und dem differentiellen Widerstand einer Diode?
3. Was versteht man unter der Schleusen-(Schwell-)Spannung einer Diode? Wie groß ist sie für eine Siliziumdiode?
4. In der dargestellten Schaltung zur Spannungsstabilisierung mit einer Zener-Diode schwanke die Eingangsspannung im Bereich $U_e = (6 \dots 8)$ V. Die Zener-Spannung betrage $U_Z = 5$ V.

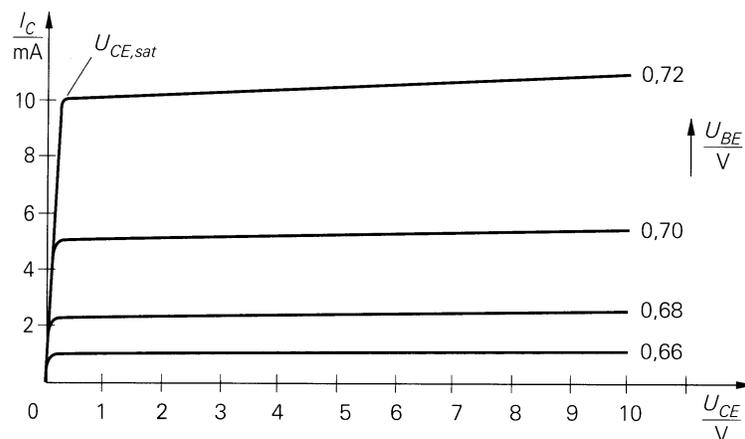


Wie groß muss der Vorwiderstand R_V gewählt werden, damit der Laststrom I_L bis zu 100 mA betragen darf, ohne dass die Ausgangsspannung U_a zusammenbricht?

Wie groß ist der maximal anzunehmende Leistungsumsatz in der Zener-Diode, wenn man davon ausgeht, dass der Laststrom im Bereich $I_L = (0 \dots 100)$ mA schwanken kann?

Transistoren

1. Ein Bipolartransistor (Si, npn) mit dem dargestellten Ausgangskennlinienfeld werde in Emitter-schaltung mit einem Kollektor-(Arbeits-)Widerstand R und der Speisespannung $U = 10$ V betrieben.



Skizzieren Sie in diesem Bild die Verlustleistungshyperbel für die maximal zulässige Verlustleistung $P_{\max} = 40$ mW!

Wie groß muss R mindestens gewählt werden, damit für variable Basisströme (bzw. Basisspannungen), die Verlustleistung im Transistor P_{\max} nicht überschreitet?

2. Welche Bedeutung hat die Transitfrequenz eines Bipolartransistors?
3. Ein Bipolartransistor habe einen Leistungsumsatz von $P = 1 \text{ W}$. Der Wärmeübergangswiderstand zwischen der Sperrschicht und dem Gehäuse betrage $R_{\text{th,JC}} = 35 \text{ K/W}$, der zwischen dem Gehäuse und der Umgebung sei $R_{\text{th,CA}} = 5 \text{ K/W}$. Die Umgebungstemperatur sei $T_A = 40 \text{ °C}$. Welche Temperatur T_J stellt sich in der Sperrschicht ein, nach längerem Betrieb der Schaltung?
4. Was versteht man unter einem MOSFET? Nennen Sie die verschiedenen Typen! Worauf basiert der große Isolationswiderstand zwischen Gate und Drain bzw. Source?
5. Was versteht man unter einem J-FET? Worauf basiert der große Isolationswiderstand zwischen Gate und Drain bzw. Source? Nennen Sie die verschiedenen Typen!

Operationsverstärker (OPV)

1. Welche Eigenschaften haben ideale und reale OPV ? Füllen Sie dazu die folgenden Tabelle aus und erläutern Sie die Bedeutung der Kenngrößen!

	ideal	real
Differenzverstärkung A_D :		
Differenzeingangswiderstand r_D :		
Gleichtakteingangswiderstand r_G :		
Ausgangswiderstand r_a :		
Gleichtaktverstärkung A_G :		
Gleichtaktunterdrückung G :		
Eingangsfehlspannung (Offsetspannung) U_O :		
Eingangsfehlstrom (Offsetstrom) I_O :		
Transitfrequenz f_T :		
Anstiegsgeschwindigkeit S_r :		

2. Was versteht man unter der Großsignalbandbreite eines OPV? (Erläuterung der Formel in Stichworten)

3. Geben Sie das Grundschriftbild eines invertierenden Verstärkers mit OPV an! Dimensionieren Sie diesen für den Verstärkungsfaktor $A = -20$! Zeichnen Sie das Bodediagramm (nur Amplitudengang) für die Transitfrequenz $f_T = 10 \text{ MHz}$!
4. Geben Sie das Grundschriftbild eines Elektrometer–Verstärkers mit OPV an! Dimensionieren Sie diesen für den Verstärkungsfaktor $A = 20$! Zeichnen Sie das Bodediagramm (nur Amplitudengang) für die Transitfrequenz $f_T = 10 \text{ MHz}$!

Aussagenlogik

1. Gegeben sei die folgende Wahrheitstabelle für eine Boolesche Funktion $y(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1
3	1	1	0	0	1
4	0	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1
7	1	1	1	0	0
8	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1

Geben Sie die disjunktive und die konjunktive Normalform an! Arbeiten Sie dazu mit einer Karnaugh-Tafel!

Geben Sie eine Schaltung zur Realisierung dieser Booleschen Funktion an, unter ausschließlicher Verwendung von NAND-Gattern!

2. Wie lautet die Shannonsche Regel zur Umformung eines Booleschen Termes? Wenden Sie die Regel auf den folgenden Ausdruck an:

$$x_1x_2 + x_3 + x_4(x_5 + x_6)$$

Gatter

1. Ergänzen Sie in der Tabelle die charakteristischen Größen eines TTL–NAND–Gatters!

Betriebsspannung	:
Spannungs–Bereich für Low–Pegel	:
Spannungs–Bereich für High–Pegel	:
<hr/>	
Laufzeit	:
Verlustleistung	:
<hr/>	
Ausgangswiderstand bei Low–Pegel	:
Ausgangswiderstand bei High–Pegel	:
<hr/>	
Eingangsstrom bei Ansteuerung mit Low–Pegel	:
Eingangsstrom bei Ansteuerung mit High–Pegel	:
<hr/>	
Fanout	:

Wie ist das Fanout definiert?

Wie ist die Laufzeit definiert? (Skizze)

Kombinatorische Schaltungen

1. Welche logische Funktion wird mit einem Halbadder realisiert? (Wahrheitstabelle angeben) Entwickeln Sie daraus die disjunktive und die konjunktive Normalform!
2. Welche logische Funktion wird mit einem Volladder realisiert? (Wahrheitstabelle angeben) Entwickeln Sie daraus die disjunktive und die konjunktive Normalform!

Sequentielle Schaltungen

1. Geben Sie die Schaltung des Basis–Flip–Flop an unter Verwendung von NAND–Gattern! Erläutern Sie in Stichpunkten die Funktionsweise!
2. Wozu dienen Schmitt–Trigger?
3. Geben Sie eine Schaltung zur Entprellung von mechanischen Schaltern an, unter Verwendung von NAND–Gattern!

Literaturverzeichnis

- [1] Böhmer, Erwin (1998):
Elemente der angewandten Elektronik
(Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 11. Auflage)
(Eine kompakte praxisnahe Darstellung von Basiswissen zur Elektronik: Passive und aktive Bauelemente sowie Schaltungen. 1. Auflage 1979.)
- [2] Bronstein I., Semendjajew K. A.; Musiol G., Mühlhig H. (1995): *Taschenbuch der Mathematik* (Verlag Harri Deutsch, Thun u.a.)
- [3] Dostál J. (1989):
Operationsverstärker
(Dr. Alfred Hüthling Verlag, Heidelberg) oder (VEB Verlag Technik, Berlin)
(Eine sehr detaillierte Darstellung auf mehr als 350 Seiten. Vor allem für weiterführende Studien geeignet.)
- [4] Horowitz P., W. Hill (1997, 2000):
Die Hohe Schule der Elektronik,
Teile 1 (2000) und 2 (1997) (Elektor-Verlag, Aachen)
- [5] Hartl H. et al. (2008):
Elektronische Schaltungstechnik,
(Pearson Studium, München u.a.)
- [6] Lipsmeier A., A. Teml (Hrsg.) (1989):
FRIEDRICH Tabellenbuch der Elektronik (Ferd. Ümmeler's Verlag, Bonn)
- [7] Nährmann D. (1989):
Das große Werkbuch Elektronik, Teil B, 5. Auflage
(Franzis-Verlag GmbH, München)
(Eine Darstellung aus der Sicht des Praktikers.)
- [8] Oppenheimer A. V., Schafer R. W., Buck J. R. (2004):
Zeitdiskrete Signalverarbeitung, 2. Auflage
(Pearson Studium, München u.a.)
- [9] MICROSHIP (1996):
Datenblatt PIC16F8x — 8-Bit CMOS Flash/EEPROM Microcontrollers

- [10] Paul R. (1994): *Elektrotechnik und Elektronik für Informatiker*; Band 1: *Grundgebiete der Elektrotechnik*, Band 2: *Grundgebiete der Elektronik* (Teubner, Stuttgart)
- [11] Rost A. (1986):
Grundlagen der Elektronik,
(Akademie-Verlag, Berlin)
(Eine gelungene Einführung in die Elektronik, vom Physiker speziell für Physikstudenten. Bei der ersten Auflage von 1983 hat jedoch der Druckfehlerteufel zugeschlagen.)
- [12] Schröder H., Feldmann G., Rommel G. (1972):
Elektrische Nachrichtentechnik, Band III
(Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GmbH, Berlin)
(Eine alte, aber nicht in jeder Hinsicht veraltete Darstellung — sehr detailliert.)
- [13] Schwetlick, Horst, und Werner Kessel (1992):
Elektronikpraktikum für Naturwissenschaftler
(Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden)
(Eines der wenigen *Praktikumsbücher* zur Elektronik.)
- [14] Seifart M. (1988):
Digitale Schaltungen,
VEB Verlag Technik, Berlin 1988.
(Eine relativ detaillierte Darstellung. Auch spätere Auflagen.)
- [15] Thieser M., Finkler A. (1998):
PIC-Controller: Hardwarebeschaltung — Programmieren — Arbeiten mit der Experimentierplatine
(Franzis, Poing)
- [16] Tietze U., Schenk Ch. (2002):
Halbleiter-Schaltungstechnik, 12. Auflage
(Springer-Verlag, Berlin)
- [17] Kories R., Schmidt-Walter H. (1998):
Taschenbuch der Elektrotechnik, 3. Auflage
(Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. Main)
- [18] Völz H. (1979):
Elektronik (Akademie-Verlag, Berlin)

Index

- Äquipotentialbereich, 14
- Äquipotentiallinie, 14
- Übertragungskennlinienfeld, 132

- Abschnürung, MOSFET, 129
- Abtasttheorem, 183
- Amperemeter, 26
- Amperesches Gesetz, 17
- Antivalenz, 162
- Arbeitsgerade (beim BJT), 109
- Arbeitspunkt, BJT, 109
- Arbeitspunkt, eines Sensors, 40
- Ausgangskennlinienfeld, MOSFET, 129
- Ausgangswiderstand, differentieller, 107
- Aussagenlogik, ff., 157

- Bandabstandsspannung, 115
- Basis, 101
- bipolar junction transistor, 101
- Bipolartransistor (BJT), ff., 101
- Bipolartransistor, Schaltungen ff., 121
- BJT, ff., 101
- Bonddraht, 102
- Brückengleichrichter, 98

- Coulombsches Gesetz, 11

- Darlington-Schaltung, 120
- Darlington-Transistor, 120
- Darlingtonschaltung, BJT, 120
- Dielektrikum, 18
- Dielektrizitätskonstante, 12
- Diffusionskapazität, 95
- Diode, ff., 91
- Dioden-Diffusionsstrom, 95
- Dioden-Gleichrichter, 98
- Diodenkennlinie, 93

- Diodenlogik, 99
- Disjunktion, 100, 161
- Durchbruch, 111
- Durchbruch 1. Art, 111
- Durchbruch 2. Art, 111
- Durchbruch-Emissionskoeffizient, 93
- Durchbruch-Kniestrom, 93
- Durchbruchspannung, 93

- Early-Spannung, 104
- Eingangs-Offset-Spannung, OPV, 138
- Eingangskennlinienfeld, MOSFET, 132
- Eingangswiderstand, differentieller, 108
- elektrischer Strom, 15
- elektrisches Feld, 12
- elektrisches Potential, 14
- elektromotorische Kraft, 23
- Elementarladung, 11
- Emitter, 101
- Emitter-Basis-Durchbruchspannung, 111
- Emitterschaltung, BJT, 116
- Emitterschaltung, Stromgegenkopplung, 118
- Emitterschaltungen, Vergleich, 119
- Empfindlichkeit, eines Sensors, 40
- Empfindlichkeit, Komp.-Methode, 39
- Entfaltung, 80

- Faradayscher Käfig, 18
- Feldeffekttransistor, ff., 127
- Formantfrequenz, 194
- Fourier-Reihe, Dreieck, 198
- Fourier-Reihe, ff., 72
- Fourier-Reihe, Rechteck, 197
- Fourier-Reihenentwicklungen (Beispiele) ff., 197
- Fourier-Transformation, ff., 72

- Gatter, logisches ff., 164

- Glättung, 38
- Gleichanteil, 73
- Gleichtaktunterdrückung, 137
- Graetz-Schaltung, 98
- Grenzfrequenz, 38, 56
- Grosssignalbandbreite, 141
- Grundsaltungen, BJT, 116
- Gummel-Plot, 105

- Heißeleiter, 22

- Impedanzwandler, 24
- Innenwiderstand, Amperemeter, 27
- Innenwiderstand, Spannungsquelle, 23
- Innenwiderstand, Voltmeter, 26
- Interpolation Code ff., 202

- Kabel, 33
- Kaltleiter, 22
- Kapazität, 19
- Kapazitätsdiode, 97
- Karnaugh-Tafel, 163
- Kennlinie, eines Sensors, 40
- Kennlinie, lineare, 40
- Kirchhoffsche Regel, erste, 15
- Kirchhoffsche Regel, zweite, 14
- Kleinsignalstromverstärkung, 107
- Klirrfaktor, 77
- Knick-Spannung, 103
- Knotenregel, 17
- Kollektor, 101
- Kollektor-Basis-Durchbruchspannung, 111
- Kollektor-Emitter-Durchbruchspannung, 111
- Kombinatorische Schaltungen, ff., 171
- Kompensationsmethode, 38
- Konjunktion, 99, 161
- Kurzschluss, 23

- Laplace-Rücktransformation, 87
- Laplace-Transformation, 82
- Laplace-Transformation, ff., 81
- Laplacetransformation, Rechenregeln, 85
- Leckwiderstand, eines Kondensators, 19
- Leerlaufspannung, 23
- Leistung, 22
- Leistungsanpassung, 25
- Leistungsspektrum (power spectrum), 75
- Leitwert, 20
- Leuchtdiode, 96
- Logische Funktion, 157
- Logisches Gatter, ff., 164

- Masche, 15
- Maschenregel, 15
- Massepotential, 13
- Massepotential, Schaltsymbol, 23
- MESFET, 128
- MOSFET, 127

- Normaldurchbruch, 111
- Normalform, disjunktive, 161
- Normalform, konjunktive, 161
- Normalformen, Logik, 161

- ohmsches Gesetz, 20
- Operationsverstärker, Eigenschaften ff., 135
- Operationsverstärker, Schaltungen ff., 143

- Periodogramm, 194
- Photodiode, 97
- Pitchfrequenz, 194
- Plattenkondensator, 19
- pn-Übergang, 92
- Potentiometer, 28
- Potentiometerschaltung, 28
- programm-Fast-Fourier-Transformation, 200
- Punktladung, 11

- Rückwärtssteilheit, BJT, 108
- Regelwiderstand, 28
- relative Dielektrizitätskonstante, 12
- Residuensatz, 87

- Sättigungs-Spannung, 103
- Sättigungssperrstrom, BJT, 104
- Schottky-Diode, 92
- Sensor, 39
- Sequentielle Schaltungen, ff., 175
- Spannungsquelle, 22
- Spannungsrückwirkung, 108

spannungsrichtige Messung, 27
Spannungsteiler, 28
Spannungsvervielfacher, 99
Spektraldichte, Rechteckfenster, 199
Sperrschicht-FET, 128
Sperrschichtkapazität, 95
Steilheit, BJT, 107
Stromquelle, 31
stromrichtige Messung, 28
Stromversorgungsgerät, 98
Stromverstärkungsfaktor, differentieller, 107

Temperaturspannung, 93
Thermistor, 22
Tiefpassfilterung, 38
Transitfrequenz, BJT, 115
Transitfrequenz, OPV, 139
Tunneldiode, 97

Unterabtastung, 186
Urspannung, 23
Urspannung, Messung, 38
Urstrom, 31

verallgemeinerte Spektraldichte, 82
Verlusthyperbel, BJT, 112
Verlustleistung, BJT, maximale, 112
Verschiebungsstrom, 18
Verstärker, 24
Verstärker mit Stromgegenkopplung, ff., 122
Villard-Schaltung, 99
Voltmeter, 25

Widerstand, differentieller, 22
Widerstand, elektrischer, 20
Widerstand, ohmscher, 20

Zeitfunktion, spektrales Rechteckfenster, 200
Zener-Diode, Spannungsstabilisierung, 97