Übungen zur Kernphysik
WS2018/19, Prof. A. Melzer

Blatt 6

1. **Fusion in der Sonne:** (2P)
   Die Strahlungsleistung der Sonne (Solarkonstante) beträgt 1400 W/m^2 auf der Erde.

   (a) Wie groß ist die gesamte Strahlungsleistung der Sonne? Wieviele Fusionsreaktionen $4\,{}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2$ He finden pro Sekunde statt (Bindungsenergie pro Nukleon von ${}^4_2$ He: 7.1 MeV)? Wie groß ist die durch den Massendefekt "vernichtete" Masse? Wieviel kg Wasserstoff wird pro Sekunde in Helium "verbrannt"?

   (b) Wieviele Neutrinos aus dieser Reaktion sollten (pro Flächen- und Zeiteinheit) die Erde erreichen?

2. **Neutrinooszillationen:** (2P)

   Wenn Neutrinos eine Masse besitzen, können Neutrinooszillationen auftreten, bei denen sich eine Neutrinosorte in eine andere umwandelt. Dabei sind dann z.B. die bekannten Elektron- und Mu-Neutrinos ($|\nu_e\rangle$ bzw. $|\nu_\mu\rangle$) keine reine Eigenzustände der Masse, sondern Mischzustände der Massenzustände $|\nu_1\rangle$ bzw. $|\nu_2\rangle$) mit dem Mischungswinkel θ entsprechend

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle\cos\theta + |\nu_2\rangle\sin\theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle\sin\theta + |\nu_2\rangle\cos\theta \quad . \end{aligned}$$

   Die Zustände sind stationär mit der Zeitabhängigkeit ihrer Phase

$$|\nu_1(t)\rangle = \exp(-i\omega_1 t)|\nu_1\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_1 = E_1/\hbar = 1/\hbar\sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}$$

   (a) Zeigen, Sie dass für die Wahrscheinlichkeit, dass ein ursprünglicher ν_e-Zustand in einen ν_μ-Zustand wechselt, gegeben ist durch

$$P_{e\rightarrow\mu} = |\langle\nu_\mu(t)|\nu_e(0)\rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2\Delta \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^3}{4\hbar}\frac{L}{E} \quad ,$$

   wobei Sie benutzen sollen, dass sich die Neutrinos fast mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten (d.h. $L = ct$), und dass die Ruheenergie der Neutrinos viel kleiner ist als ihre kinetische Energie (d.h. $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc + m^2c^4/(2pc) \approx E + m^2c^4/2E$).

   (b) Im K2K-Experiment (Japan) werden Neutrinos nachgewiesen, die im 250 km entfernten Forschungszentrum KEK mit einer Energie von 1 GeV erzeugt werden. Bei der Erzeugung werden einige der erzeugten Elektron-Neutrinos im Nahdetektor nachgewiesen und daraus vorhergesagt, wie viele Neutrinos ohne Oszillation im K2K-Experiment gemessen werden sollten. Dort traten aber nur 70 % der Elektron-Neutrinoereignisse ein, die ohne Oszillation vorhergesagt wurden.
   Berechnen Sie das Quadrat der Massedifferenz $\Delta m^2 = (m_1^2 - m_2^2)$ in eV^2, wenn Sie maximale Mischung (d.h. $\sin 2\theta = 1$) annehmen.

3. **Energieausstrahlung der SN 1987A** (3P)
Am 23.02. 1987 wurden innerhalb von nur 10 s etwa 10 Elektron-Neutrinos und Elektron-Antineutrinos (ν_e bzw. $\bar{\nu}_e$) in einem großen Tank mit 2140 t Wasser tief in einem Bergwerk nachgewiesen, die von der nur 50 kpc (Kiloparsec, 1pc $\approx 3,1 \cdot 10^{16}$ m) entfernten Supernova SN 1987A stammen. Die Messung erfolgte anhand der Cherenkov-Strahlung der Elektronen bzw. Positronen und leichten Rückstoßkerne, die von den Neutrinos im Falle einer Wechselwirkung in Wasser erzeugt werden. Die daraus bestimmten Energien der Neutrinos liegen zwischen 5 und 40 MeV, die durchschnittliche Energie bei 15 MeV. Bei dieser Energie beträgt der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion von Neutrinos mit den Protonen des Wassers etwa $\sigma = 4 \cdot 10^{-46}$ m^2.

   (a) Bestimmen Sie den Neutrinofluss Φ in Einheiten von Teilchen/(s m^2). Berücksichtigen Sie, dass pro Elektron-(Anti)Neutrino-Nachweis noch etwa ebenso viele Myon-(Anti)Neutrinos (ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$) und Tau-(Anti)Neutrinos (ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$) dazukommen.

   (b) Schätzen Sie ab, wieviel Energie in Form von Neutrinos von der Supernova in diesen 10 s insgesamt freigesetzt wurde. Vergleichen Sie mit der im gleichen Zeitraum von der Sonne emittierten Energie (s. Aufgabe 2).

   (c) Schätzen Sie ab, wie groß die Masse der Neutrinos maximal sein kann, wenn man annimmt, dass alle Neutrinos exakt zur gleichen Zeit erzeugt wurden.

4. **Masse und Spin von Mesonen** (3P)
Mesonen bestehen aus einem Quark-Antiquark-Paar. Die Kraft zwischen zwei Quarks soll als konstant unabhängig von ihrem Abstand angenommen werden, d.h. $F = \text{konst} = \kappa$. Das Wechselwirkungspotential lässt sich also schreiben als

$$V(r) = \kappa r \quad .$$

Man beschreibt nun in einem einfachen Modell das Meson als homogene Röhre der Länge $2R$, deren Enden mit Lichtgeschwindigkeit c rotieren. Der Beitrag zur Masse M im Abstand r vom Zentrum ist dementsprechend (relativistisch) $c^2 dM = \kappa dr/(1 - v(r)^2/c^2)^{1/2} = \kappa dr/(1 - r^2/R^2)^{1/2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Masse des Mesons sich dann zu $M = \pi R \kappa / c^2$ ergibt.

   (b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Mesons sich dann zu $L = \pi R^2 \kappa/(2c)$ ergibt (Hinweis: $dL = rvdM$).

   (c) Damit ist offensichtlich
$$L = \frac{M^2}{2\pi\kappa} c^3 \quad .$$
Abbildung 1 zeigt den Spin $J \propto L$ als Funktion des Massenquadrats M^2 für verschiedene Mesonen. Bestimmen Sie aus der Abbildung einen Wert für κ. Welche Energie wäre dann notwendig, um das Quark-Antiquark-Paar um 1 fm voneinander zu entfernen?

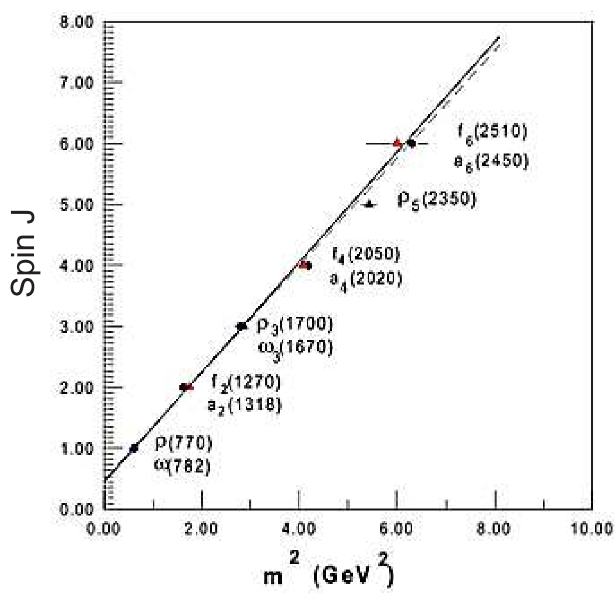

Figure 4. The Chew-Frautschi plot for some mesons and resonances.

Abbildung 1: Chew-Frautschi-Plot für den Spin J als Funktion des Massenquadrats M^2 für verschiedene Mesonen.