

Übungen zur Kernphysik WS2018/19, Prof. A. Melzer

Blatt 4

1. Gamow-Modell des α -Zerfalls: (3P)

Berechnen Sie die Halbwertszeit des α -Strahlers ${}_{84}^{212}\text{Po}$, wobei angenommen werden soll, dass die Energie des α -Teilchens im Atomkern $E = 8.945 \text{ MeV}$ beträgt.

- Bestimmen Sie zunächst die maximale Energie der Coulombabstoßung E_{max} bei maximaler Annäherung zwischen α -Teilchen und Tochterkern. Dies ist die Höhe des Potentialwalls, den das α -Teilchen beim Zerfall klassisch überwinden müsste.
- Bestimmen Sie den Gamow-Faktor G und die Tunnelwahrscheinlichkeit $|T|^2 \approx e^{-G}$.

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \sqrt{1 - \frac{r_1}{r_2}} \right]$$

- Für jeden Stoß des α -Teilchens im Atomkern mit der "Wand" des Atomkerns besteht die Wahrscheinlichkeit e^{-G} , dass das Teilchen durch den Potentialwall tunneln kann. Schätzen Sie daraus die Lebensdauer und Halbwertszeit des α -Strahlers ab. Vergleichen Sie mit der experimentellen Halbwertszeit von $t_{1/2} = 4.47 \cdot 10^9 \text{ a}$. Kommentieren Sie das Ergebnis.

2. Ar-K-Methode: (3P)

Die Kalium-Argon-Datierung ist ein geochronologisches Verfahren zur radiometrischen Altersbestimmung von Gesteinen, wobei der radioaktive Zerfall von ${}^{40}\text{K}$ zu ${}^{40}\text{Ar}$ verwendet wird. ${}^{40}\text{K}$ zerfällt zu ${}^{40}\text{Ar}$ mit einer Zerfallskonstanten $\lambda_1 = 0.581 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$ und zu ${}^{40}\text{Ca}$ mit einer Zerfallskonstanten $\lambda_2 = 4.963 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$. Bei der Gesteinsbildung wird angenommen, dass nur ${}^{40}\text{K}$ vorhanden war und dass das im Gestein gefundene ${}^{40}\text{Ar}$ aus dem Zerfall des Kaliums stammt. ${}^{40}\text{K}$ kommt mit einem Anteil von 0.01167 Atom-% in natürlichem Kalium vor.

Zwei Beispiele:

- Gestein aus einem Vulkanberg auf Martinique enthielt einen Anteil von 0.985 Gewichts-% natürliches Kalium. Der Argon-Anteil lag bei $24.450 \cdot 10^{11}$ Atome pro Gramm Gestein.
- Für vulkanisches Gestein aus Süditalien sind die entsprechenden Werte 11.19 Gewichts-% Kalium bzw. $39.84 \cdot 10^{10}$ Argon-Atome pro Gramm Gestein.

Wie alt ist das Gestein jeweils?

3. Radioaktiver Zerfall: (3P)

Zur Zeit $t = 0$ werden 50 g des Isotops ${}^{226}\text{Ra}$ in ein Röhrchen eingefüllt. Das Glasröhrchen wird verkorkt und aufbewahrt. ${}^{226}\text{Ra}$ zerfällt mit einer Halbwertszeit von 1600 Jahren in das radioaktive Gas ${}^{222}\text{Rn}$, das wiederum mit einer Halbwertszeit von 3,825 Tagen weiterzerfällt (bis letzten Endes ${}^{206}\text{Pb}$ entsteht).

- Wie kann man die Anzahl der ${}^{222}\text{Rn}$ -Atome als Funktion der Zeit beschreiben, wenn man annimmt, dass zu Beginn keine Rn-Kerne vorhanden sind?
- Nach welcher Zeit ist die Rn-Konzentration maximal? Wieviel mol Rn sind es dann?

4. Relativistische Kinematik: (3P)

Es soll der Zerfall eines Pions (Ruhemasse m_0 , Geschwindigkeit $\beta = v/c$) in zwei Gamma-Quanten $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ betrachtet werden. Im Ruhesystem des Pions werden die beiden Gamma-Quanten entgegengesetzt zueinander mit der Energie von jeweils $E_1 = E_2 = (1/2)m_0c^2$ (Warum? Wie groß ist dann der Impuls der beiden Gamma-Quanten?) ausgesandt. Der Winkel, unter dem das eine Gamma-Quant im Schwerpunktsystem relativ zur Bewegungsrichtung des Pions ausgesandt wird, sei θ_1 (das andere Gamma-Quant hat dann natürlich $\theta_2 = \theta_1 + \pi$).

- (a) Zeigen Sie, dass für den Emissionswinkel des ersten Photons im Laborsystem θ_1^L gilt:

$$\tan \theta_1^L = \frac{\sin \theta_1}{\gamma(\beta + \cos \theta_1)} \quad ,$$

wobei $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ der Lorentzfaktor. Benutzen Sie hierfür die relativistische Transformation für die Impulse im Labor- (p^L) bzw. Schwerpunktsystem (p)

$$\begin{aligned} p^L \cos \theta^L &= \beta \gamma \frac{E}{c} + \gamma p \cos \theta \\ p^L \sin \theta^L &= p \sin \theta \end{aligned}$$

- (b) Welchen Winkel θ_2^L findet man für das 2. Gamma-Quant?
- (c) Welchen Gesamtwinkel α haben die beiden Gamma-Quanten relativ zueinander im Laborsystem? Für welchen Emissionswinkel θ_1 im Schwerpunktsystem ist dieser Winkel α minimal und welchen Wert hat er dann?