

Perkolationstheorie

Was ist Perkolation?

Wenn wir einen großen porösen Stein in einen Eimer voll Wasser legen, was ist Wsk., dass der Mittelpunkt des Steines nass ist?

Wir wollen dafür ein einfaches mathematisches Modell betrachten.

1957 beschrieben Broadbent und
Hammersley das "Perkulationsmodell".

Sei $\mathbb{Z}^2$ das quadratische
Gitter in der Ebene
und sei p eine Zahl zwischen
Null und Eins $0 \leq p \leq 1$.

Wir betrachten nun jede Kante
des Gitters

Es soll für jede Kante unabhängig von
den anderen gelten:

Mit Wsk. p ist sie offen oder
wasserdurchlässig

und sonst, d.h. mit Wsk. $1-p$

ist sie geschlossen oder wasser-
undurchlässig

Die Kanten repräsentieren also
Kanäle im Inneren des Steins
und P gibt den Anteil der Kanäle
an, die breit genug sind um
Wasser durchzulassen.

Wir stellen uns nun unseren Stein
als endliche, aber sehr große
Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$ vor.

Nun sind also genau all jene Kanten
Mass, die ^{über} ~~mit~~ einem offenen Pfad
mit dem Rand des Steines verbunden
sind

(Wasser kann durchfließen)

Wenn wir geschl. Kanten
löschen, verbleiben mit zufälligen
Untergraph von $\mathbb{Z}^2$

Wir wollen die Struktur dieses
Untergraphen studieren, insbesondere
wie sie von p abhängt.

Wenn Stein sehr groß
 $\leadsto$ gute Annahme Stein durch
komplettes $\mathbb{Z}^2$ zu ersetzen
aber kein Rand

was tun? Rand im unendlichen
definiere Kante als Kass , wenn
sie mit unendlichem Pfad von
offenen Kanten verbunden ist.

~> Durchdringung von
Stein mit Wasser hängt
zusammen (auf großen Skalen) mit
der Existenz eines unendlich
großen Clusters von offenen Kanälen
(tatsächlich relevant für Wasser, Öl)

Wann kann so ein unendl.
großer Cluster existieren?

(HA Simulation Wsk, dass Zentrum
mit Rand verbunden ist, für $L=10, 20, 40, 80, 160, 320$)

Wenn wir ganz $\mathbb{Z}^2$
beobachten könnten

- ~~für~~ für kleine p finden
wir keine unendlich großen
Cluster

- für große p finden wir eine
unendlich großen Cluster

$\hookrightarrow$ existiert kritischer Wert p_c
sodass

$\nexists$ unendl. gr. Cluster für
 $p < p_c$

$\exists$ unendl. gr. Cluster für
 $p > p_c$

$\leadsto$ kritisches Phänomen

Zusammenhang Existenz unendl.
Cluster $\Leftrightarrow$ Mittelpunkt ist ~~Mass~~

Definiere $Q(p)$:

$Q(p) :=$ Wsk., dass Ausprung $(0,0)$
Mass ist, das heißt

$\exists$ offener Pfad von $(0,0)$, der
 ∞ Lang ist

$\leadsto$ Problem ist Translations invariant

$\leadsto$ Wenn $Q(p) = 0 \leadsto (0,0)$ mit ∞
Verbunden mit Wsk. Null

$\leadsto$ gilt auch für jeden anderen
Punkt $\leadsto$ Kein Punkt mit ∞
verbunden (mit Wsk. 1)

$\leadsto$ Kein ∞ großer (perkolierender)
Cluster

andere Fall

$$\Theta(p) > 0$$

$\leadsto$ Gruppe mit $w_k > 0$ mit ∞ verbunden

$\leadsto$ gilt auch für jeden anderen Punkt

∞ viele Punkte

$\hookrightarrow$ anschaulich:

w_k , dass irgendein Punkt mit ∞ verbunden ist = 1

(später exakt zeigen)

$\hookrightarrow \Theta(p) = 0 \Leftrightarrow \nexists \infty\text{-Cluster}$

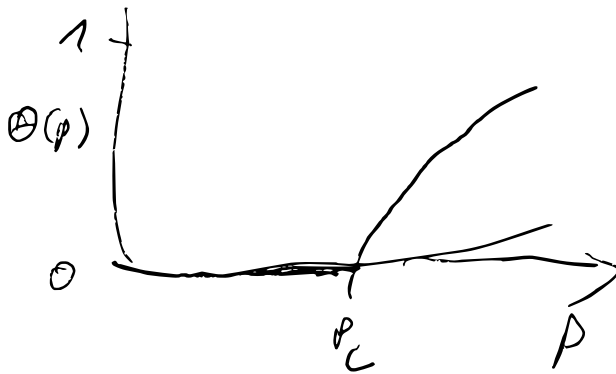
$\Theta(p) > 0 \Leftrightarrow \exists \infty\text{-Cluster}$

Wie sieht $\Theta(p)$ aus

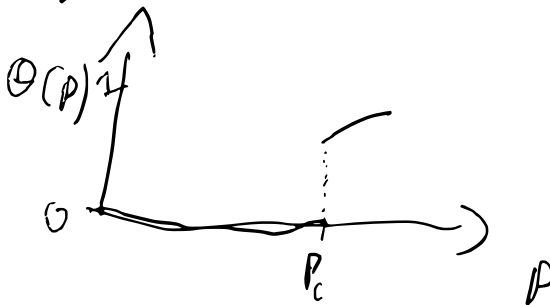
Vermutung

• monoton

• stetig? zumindest wenn $p \neq p_c$



oder



Zinn Modell

Prozess heißt Kantenperkolation
auf quadratischem Gitter

↳ am besten bekannter Perkolations-
prozess

Allgemeiner: beliebiges periodisches
Gitter in d Dimensionen

Erkläre jede Kante ^{unabhängig} als offen
mit Wsk p , geschlossen mit Wsk $1-p$

$$0 \leq p \leq 1$$

Auch möglich Knotenperkolation

↳ analog $\leadsto$ Knoten sind offen oder
geschlossen

Verallgemeinerungen

- gemischte Modelle: Kanten und Knoten
- inhomogen/anisotrope Modelle
→ versch. Wsk für versch.
Kanten/Knoten
- langreichweitige Modelle
↳ Kanten zwischen weit
entfernten Knoten
- abhängige Perkolations
↳ verschiedene Knoten
nicht unabhängig
- gerichtete Perkolations
→ Kanten nur in eine
Richtung durchlässig

Hier: fast nur Kantenperkolation
auf $\mathbb{Z}^d$

Grund: viele Eigenschaften sind
ähnlich auch anderen Gittern oder
für Knotenperkolation, aber
Details (und Beweise) teils
erheblich aufwändiger,
Konzepte aber oft gleich

Notation (für Kantenperkolation
auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$)

d ... Dimension, meist $d \geq 2$
 $d=1$ auch möglich aber
langweiliger

$\mathbb{Z} = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
ganze Zahlen

$\mathbb{Z}^d$ Menge aller Vektoren

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

mit $x_i \in \mathbb{Z}$

Abstand

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$$

↙ absoluter Betrag

Schreibweise:

$$\delta(0, x) = |x|$$

anderes Entfernungsmaß

$$\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$$

$$\hookrightarrow \|x\| \leq |x| \leq d \|x\|$$

Elemente von $\mathbb{Z}^d$ sind
nur Punkte (oder Knoten)

Füge Kanten zwischen allen Punkten
 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ mit $\delta(x, y) = 1$ hinzu

$\hookrightarrow$ Gitter $\mathbb{L}^d$

Bezeichnung für Kantenmenge von
 $\mathbb{L}^d$

$$(\hookrightarrow) \mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$$

Gitter = Knoten + Kanten

Wir sagen x und y sind
benachbart, wenn $\delta(x, y) = 1$
 $\leadsto$ dann schreiben wir
 $x \sim y$

Wir schreiben $\langle x, y \rangle$ für
die Kante zwischen x und y

Wir schreiben $\mathbf{0}$ für den Ursprung
von $\mathbb{Z}^d$ $(0, 0, \dots, 0)$

Wahrscheinlichkeitsraum

Ergebnismenge

$$\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$$

betrachte eine Realisierung $\omega \in \Omega$:

$$\omega(e) = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } e \text{ offen} \\ 0 & \text{wenn Kante } e \text{ geschlossen} \end{cases}$$

σ -Algebra (allgemein)

Σ besteht aus Teilmengen von Ω
muss folgende Axiome erfüllen

1. $\Omega \in \Sigma$

2. $A \in \Sigma \rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \Sigma$

3. $A_i \in \Sigma \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

Man kann zeigen: für $A \subseteq \overset{\text{Ereignismenge}}{P(\Omega)}$

$\exists$ immer kleinste σ -Algebra, die
 A enthält

Für uns ist Σ die Ereignismenge

$\rightarrow$ muss sinnvoll definiert werden

Sinnvolle Ereignisse:

so genannte Zylinder-Mengen
charakterisiert durch den Zustand
endlich vieler Kanten

z.B.

$$Z_{e_1=1, e_2=0, e_3=0} = \{ \omega \in \Omega : \omega(e_1)=1, \omega(e_2)=0, \omega(e_3)=0 \}$$

Wir betrachten σ -Algebra über
allen Zylinder-mengen

(= kleinste σ -Algebra, die diese
enthält)

Ende

VL 7

Wiederholung

Kante offen mit Wsk. p

geschl. mit Wsk. $1-p$

Kantenmenge $E^d = \{(x, y) : d(x, y) = 1\}$

$x \sim y$
benachbart

Ergebnismenge $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$

$w \in \Omega$, $w(e) = 1 \Leftrightarrow e$ ist offen
 $w(e) = 0 \Leftrightarrow e$ ist geschl.

Pfad ist Folge von ~~benachbarten~~ benachbarten Kanten

$x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \dots \sim x_n$

$(x_0, x_1) \in E^d$ usw.

Pfad ist offen, wenn $w(x_i, x_{i+1}) = 1$

Kreis ist Pfad mit $x_0 = x_n$

disjunkter Pfad Pfad mit disjunkten Kanten

offener Cluster verbundene Komponenten von offenen Kanten

$C(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ - offener Cluster von x

$|C(x)| = \# \text{ Knoten von } C(x)$

x, y sind verbunden (in ω), wenn

$y \in C(x)$ $x \longleftrightarrow y$

(oder nicht $x \nleftrightarrow y$)

allgemeiner

$S_1, S_2 \subseteq \mathbb{Z}^d : S_1 \longleftrightarrow S_2$

Ereignisse: aufgebaut aus Zylinder-mengen: Sei $e_1, \dots, e_n \in E^d$, $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$

Zylindermenge $Z = \{\omega \in \Omega : \omega(e_i) = a_i, i=1, \dots, n\}$

kleinste σ -algebra, die Zylinder-mengen enthält $\leadsto$ Ereignismenge $\mathcal{F}$

Bsp.: ① $\{\omega \in \Omega : \omega(e) = 1\} = \{\omega(e) = 1\} \in \mathcal{F}$

$\nearrow$
Schreibweise

$$(2) \{ \omega \in \Omega : x \mapsto x \text{ in } \omega \} \in \mathcal{F}$$

$$(3) \{ \mid c(x) = \infty \} \in \bar{\mathcal{F}}$$

Beweis: Hausaufgabe

Ergebnis Menge Ω ✓

Ereignismenge $\mathcal{F}$ ✓

Für Lsg.-Raum fehlt noch:

Wahrscheinlichkeitsmaß, d. h.

Abbildung $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

$P \in [0, 1]$

Definiere

$P_P = \prod_{e \in E} \mu_e$ - Produktmaß

wobei $\mu_e: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ sodass

$$\mu_e(\{\omega(e) = \tilde{r}\}) = 1 - \mu_e(\{\omega(e) = 0\}) = P$$

was heißt das?

genügt wahrscheinlich Ketten auf
Zylinder Mengen zu definieren:

$$\forall e_1, \dots, e_n, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{E}^d$$

$$P_p [\{\omega(e_i) = 1, i=1, \dots, n, \omega(k_j) = 0, j=1, \dots, m\}]$$

$$= \prod_{i=1}^n \mu_{e_i}(\{\omega(e_i) = 1\}) \times \prod_{j=1}^m \mu_{k_j}(\{\omega(k_j) = 0\})$$

$$= p^n (1-p)^m$$

Notation $\bar{E}_p$ -- Erwartungswert
in Bezug auf P_p

Eigenschaften von $P_p, p \in [0, 1]$

① Translationsinvarianz

$x \in \mathbb{Z}^d \leadsto$ Verschiebungsoperator $T_x: \Omega \rightarrow \Omega$

$$T_x \omega(e) = \omega(x+e)$$

Sei $A \in \mathcal{F}$, Ereignis, $T_x A = \{T_x \omega : \omega \in A\}$

Bsp.: $A = \{y \leftrightarrow z\} \leadsto T_x A = \{y+x \leftrightarrow z\}$

$B = \{|C(0)|=n\} \quad T_x B = \{|C(x)|=n\}$

Translationsinvarianz von P_p :

$$P_p[T_x A] = P_p[A] \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

$$\forall A \in \mathcal{F}$$

② Ergodizität

$\forall A \in \mathcal{F}$ mit $T_x A = A \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$
gilt:

$$\underline{P_p[A] \in \{0, 1\}}$$

Beweis ① + ②
H.A

③ stochastische Monotonie

teilweise Ordnung für ~~stoch~~ $\mathcal{R}$:

$\omega, \omega' \in \mathcal{R}$ wir sagen $\omega \leq \omega'$, g.d.w.

$$\omega(e) \leq \omega'(e) \quad \forall e \in E^d \quad \Leftrightarrow$$

Funktion $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt wachsend
 $\Leftrightarrow f(w) \leq f(w')$ für $w \leq w'$

oder abnehmend

$\Leftrightarrow -f$ ist wachsend

Ereignis $A \in \mathcal{F}$ heißt wachsend (abnehmend),
wenn π_A wachsend (abnehmend) ist.

π_A -- Indikatorfunktion

$$\pi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } w \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele: ① $\{x \hookrightarrow y\}, \{ |C(x)| = \infty \}$
sind wachsend

② $\{ |C(x)| \leq n \}$ abnehmend

③ $\{ |C(x)| = n \}$ weder wachsend noch
abnehmend

④ A wachsend $\Rightarrow A^c$ abnehmend

⑤ A, B wachsend $\Rightarrow A \cap B, A \cup B$
wachsend

Lemma 1: Wenn $A \in \mathcal{F}$ wachsend,

$P \leq P'$ so ist

$$P[A] \leq P'[A]$$

Beweis Kopplungsmethode

Betrachte $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ - vsgk. Raum
unabhängig
• Ordne jeder Kante "zufällige
Zahl zwischen 0 und 1 zu".

$$\forall e \in E^d \quad x_e : \bar{\Omega} \rightarrow [0, 1]$$

so dass

$$\begin{aligned} \bar{P}[\bar{\omega} : x_{e_1} \in [a_1, b_1], \dots, x_{e_n} \in [a_n, b_n]] \\ \stackrel{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^n \bar{P}[x_{e_i} \in [a_i, b_i]] = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \end{aligned}$$

Jetzt: Indikatorfunktion, kein
Kontinuum

$$\eta_{e,p} : \bar{\Omega} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\eta_{e,p}(\bar{\omega}) = \begin{cases} 1, & x_e < p \\ 0, & x_e \geq p \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \bar{\Omega} = [0, 1]^{\mathbb{E}^d}$$

$$\bar{P}[\{\eta_{e,p} = 1\}] = 1 - \bar{P}[\eta_{e,p} = 0] = p$$

//

$\bar{P}[x_e < p] = p$, $\eta_{e,p}$ sind
unabhängig
kein versch. Kontinuum

$\leadsto$ Jetzt können wir uns
 $(\eta_{e,p}, e \in \mathbb{E}^d)$ als Ergebnis der
Kanten perkolations vorstellen

① $\eta_{e,p}$ sind auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum
definiert

② $\eta_{e,p} \leq \eta_{e,p'}$ für $p < p', e \in \mathbb{E}^d$

③ $\forall A \in \mathcal{F} \quad \bar{P}(\bar{\omega} : \eta_{e,p}(\bar{\omega}), e \in \mathbb{E}^d) \in A) = P_p(A)$

$$P_p(A) = \bar{P}((\eta_{e,p}, e \in \mathbb{E}^d) \in A)$$

$$\leq \bar{P}((\eta_{e,p}, e \in \mathbb{E}^d) \in A) = P_{p'}(A)$$

$\eta_{e,p} \leq \eta_{e,p'}$

wachsendes Ereignis A



gibt es eine unendlich große Komponente

$$\Theta(p) := P_p[|C(x)| = \infty] = P_p[|C(0)| = \infty]$$

$\leadsto$ Perkolationswahrscheinlichkeit

Satz 1:

$$1) \forall p \in [0, 1], \Theta(p) > 0$$

$$\Rightarrow P_p[\exists x \in \mathbb{Z}^d: |C(x)| = \infty] = 1$$

$$2) \Theta(p) = 0 \Rightarrow P_p[\dots] = 0$$

Beweis: 2):

$$P_p[\exists x \in \mathbb{Z}^d: |C(x)| = \infty] \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p[|C(x)| = \infty] \stackrel{(*)}{=} \Theta(p)$$

$$1); P_p[\exists x \in \mathbb{Z}^d: |C(x)| = \infty]$$

$$\geq P_p[|C(0)| = \infty] = \Theta(p) > 0, \text{ aber}$$

$$P_p[\exists x \in \mathbb{Z}^d: |C(x)| = \infty] \in \{0, 1\}$$

da translations invariant
 $\hookrightarrow$ mass 1 sein.

□

Eigenschaften: $\theta(0) = 0, \theta(1) = 1$

$\theta(p)$ ist nicht ^{offensichtlich} abfallende Funktion in p
 (nach Lemma 1)

Definition Perkolationschwelle

$$p_K = p_K(d) = \sup\{p: \theta(p) = 0\} \in [0, 1]$$

Für $d=1 \leadsto p_K = 1 \leadsto HA$ (oder offensichtlich)

$d \geq 2 \leadsto p_K \in (0, 1)$

(wieder wir später sehen)

Ende VL 2

Wiederholung

- wachsende Funktion $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $f(w) \geq f(w')$
 $\forall w' \geq w$, d.h. $w(e) \geq w'(e) \forall e \in E$
- wachsendes Ereignis A : $\mathbb{1}_A$ ist wachsende Fkt.
 $\Leftrightarrow$ d.h. Ereignis kann nicht unahn werden,
wenn Kante hinzugefügt wird
- Lemma 1: wenn f wachsend, $f' \geq f \Rightarrow P_{f'}[A] \geq P_f[A]$
- $\Theta(p) = P_p[\{C(w) = \infty\}] \Rightarrow$ Monoton
- $\Theta(0) = 0$, $\Theta(1) = 1$
- $P_c := \sup\{p : \Theta(p) = 0\}$

$p < P_c \Rightarrow \Theta(p) = 0 \Rightarrow \nexists \infty$ -gr. Cluster

$\hookrightarrow$ Subkritisches Regime

$p > P_c \Rightarrow \Theta(p) > 0 \Rightarrow \exists \infty$ -gr. Cluster

$\hookrightarrow$ Superkritisches Regime

Theorem: $\forall d \geq 2$ $P_c \in (0, 1)$

Bemerkung: $P_K(d) \geq P_K(d+1)$
 da $\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{Z}^{d+1}$ ($P > P_K(d) \Rightarrow P > P_K(d+1)$)
 tatsächlich: $P_K(d) > P_K(d+1)$

Beweis (Theorem) wir wollen zeigen, dass

$$\forall d \geq 2: P_K(d) \geq \frac{1}{2d}$$

$$\Leftrightarrow \forall P < \frac{1}{2d} \quad \Theta(P) = 0$$

Kanten-

$$\Pi_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{alle } \vee \text{ diskontinuierlichen Pfade von } 0 \\ \text{in } \mathbb{Z}^d \text{ der Länge } n \end{array} \right\}$$

$$\{w: |C_w(0)| = \infty\} \subseteq \bigcup_{\pi_n \in \Pi_n} \{w: \pi_n \text{ ist offen in } w\}$$

($\forall n \geq 1$)

Hier ist n fest

das heißt wenn es ∞ -langen Pfad
 gibt, ^(von 0) muss es auch Pfad der Länge n
 geben ^(von 0)

$$\leadsto \forall n \geq 1:$$

$$\Theta(p) = P_p[\{\omega: |\zeta_\omega| = \infty\}]$$

$$\leq P_p\left[\bigcup_{\pi_n \in \Pi_n} \zeta_{\pi_n} \text{ ist offen in } \omega\right]$$

$$\leq \sum_{\pi_n \in \Pi_n} P_p[\pi_n \text{ ist offen}] = |\Pi_n| p^n$$

$$|\Pi_n| \leq \left| \left\{ \text{Kad der Länge } n \text{ von } 0,1 \right\} \right| = (2d)^n$$

$$\hookrightarrow \Theta(p) \leq (2dp)^n \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{wenn } p < \frac{1}{2d} \leadsto \text{dann } \Theta(p) = 0$$

$$\Rightarrow P_K > 0, \text{ tats\u00e4chlich ist } P_K \geq \frac{1}{2d}$$

$$\text{ÜA: Zeige, dass } P_K(d) \geq \frac{1}{2d-1}$$

$$\text{Jetzt noch zu zeigen: } P_K < 1 \text{ f\u00fcr } d \geq 2$$

$$\text{Es gen\u00fcgt zu zeigen, dass } P_K(2) < 1$$

(siehe Bemerkung)

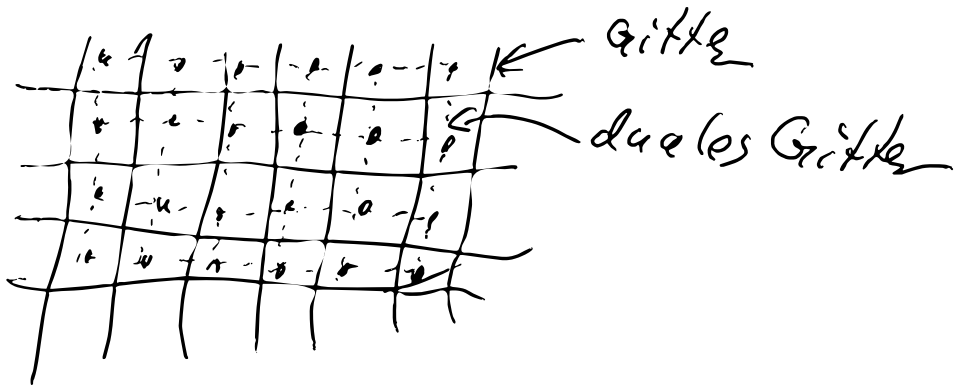
tatsächlich zeigen wir, dass

$$P_K(2) \leq \frac{11}{12}$$

$$(\Rightarrow) \quad \forall p > \frac{11}{12} : \Theta(p) > 0$$

Peierls Argument (1936)

Planare Dualität in $\mathbb{Z}^2$



duales Gitter von $\mathbb{Z}^2$

Gitterpunkte:

$$\mathbb{Z}^* = \left\{ x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), x \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

Kanten:

$$E^* = \left\{ (x^*, y^*), x^*, y^* \in \mathbb{Z}^* : d(x^*, y^*) = 1 \right\}$$

Sei $e \in \mathbb{E}^2$, wir definieren $e^* \in \mathbb{E}^*$ als die (eindeutig bestimmte) Kante, die e kreuzt.

Wir definieren weiterhin

e^* ist offen, genau dann, wenn e geschlossen ist

→ definiert Perkulationsproblem auf dualem Gitter auf dem selben Wsk.-Raum (Kopplung!)

Behauptung: ^(später) $\forall w \in \Omega$ gilt:

wenn $|C_w(0)| < \infty$

dann $\exists$ ein offener Kreis von dualen Kanten in $\mathbb{Z}^*$, die den Ursprung umkreist.

klar ist jedoch auf jeden Fall: wenn solcher Kreis existiert $\Rightarrow C(0) < \infty$

$\Phi_n := \{ \text{alle } \overset{\text{Kanten-}}{\text{disjunkten Kreise auf } \mathbb{Z}^*} \text{ der Länge } n, \text{ welche den Ursprung umschließen} \}$

$$\{ \omega : |C_\omega(0)| < \infty \} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\gamma_n \in \Phi_n} \{ \gamma_n \text{ ist offen} \}$$

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(p) &= P_p[|C(0)| < \infty] \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma_n \in \Phi_n} P_p[\gamma_n \text{ ist offen}] \\ &= \sum_{n \geq 1} |\Phi_n| \cdot (1-p)^n \end{aligned}$$

Bemerkung: alle Kreise $\gamma_n \in \Phi_n$ müssen einen Knoten $(k, 0) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit $0 \leq k < n$ durchlaufen

Abschätzung:

$$|\{p_n \in \Phi_n : p_n \text{ durchläuft } (k, 0) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}|$$

$$\leq |\Gamma_n| \leq (2d)^n = 4^n$$

↑

Kreis ist auch Pfad

aber k kann verschiedene Werte annehmen

$$\leadsto |\Phi_n| \leq n \cdot 4^n \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 - O(p) \leq \sum_{n \geq 1} n (4(1-p))^n \quad \text{für } p > \frac{11}{12}$$

$$\leq \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s} \quad \left| \frac{d}{ds} \right.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n s^{n-1} = \frac{1}{(1-s)^2} \quad (\cdot s)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} n s^n = \frac{s}{(1-s)^2} \stackrel{s=\frac{1}{3}}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\leadsto 1 - \theta(p) \leq \frac{3}{4} \quad \forall p > \frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow \theta(p) \geq \frac{1}{4} > 0 \quad \forall p > \frac{11}{12}$$

$$\leadsto p_k \leq \frac{11}{12}$$

□

$$\text{ÜA } p_k(2) \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{Hinweis 1) } \{ \omega : \forall x \in (0, M)^2 \cap \mathbb{Z}^2 : \\ (C_\omega(x)) < \infty \}$$

$$\subseteq \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ offener Kreis im dualen Gitter,} \\ \text{welcher } (0, M)^2 \cap \mathbb{Z}^2 \text{ umkreist} \end{array} \right\}$$

$$2) \text{ mit 1) zeige, dass } \forall p > \frac{2}{3}$$

$$\exists M = M(p) \text{ sodass } p_p \left[\forall x \in (0, M)^2 \cap \mathbb{Z}^2 : \right. \\ \left. (C(x)) < \infty \right] \leq \frac{1}{2}$$

3) aus 2) folgt

$$P_p \left[\exists x \in [0, 4]^2, \mathbb{Z}^2 : |C(x)| = \infty \right] \geq \frac{1}{2} > 0$$

$$\leadsto \Theta(p) > 0 \quad \forall p > \frac{2}{3}$$

Versuche Verbindung herzustellen
zwischen:

$$A = \{\omega : |C_\omega(0)| = \infty\} \text{ und}$$

$$B = \{\omega : x \leftrightarrow y \text{ in } [-4, 4]^d\}$$

hier: nur interessiert an $\omega(e)$ für
 $e \in [-4, 4]^d$

^{Wk}
Raum endlich viele Kanten:

$$\Omega = \{0, 1\}^4 \quad p_i \in [0, 1] \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\omega \in \Omega : P(\omega) = \prod_{i=1}^4 p_i^{\omega(i)} (1-p_i)^{1-\omega(i)}$$

$$\Sigma = 2^\Omega$$

hier

$$\Omega = \{0,1\}^{\text{Kanten in } [n,h]^d}$$

wenn $\omega, \omega' \in \Omega$ sagen wir hier

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \omega(i) \leq \omega'(i) \quad \forall i=1, \dots, h$$

Theorem (FKG Ungleichung)

für wachsende Funktionen X, Y gilt

$$E(XY) \geq E(X) E(Y)$$

Insbesondere für Indikatorfunktionen
von wachsenden Ereignissen A, B

$$\leadsto P(A \cap B) \geq P(A) P(B)$$

Bemerkungen:

1) Falls X, Y abnehmend

$$E(XY) \geq E(X) E(Y)$$

2) X wachsend, Y abnehmend

$$C) E(X, Y) \leq E(X) E(Y)$$

3) $X_1, \dots, X_n$ wachsend

$$C) E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \geq \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

Beweis

hier nur, wenn X, Y nur von endlich vielen Kanten abhängen
(gilt aber allgemein)

1. Fall: X, Y hängen nur von $w(e_1)$ ab

$$\leadsto (X(w_1) - X(w_2))(Y(w_1) - Y(w_2)) \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{\omega_1, \omega_2} (X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \\ \times P_p(\{\omega: \omega(e_1) = \omega_1(e_1)\}) P_p(\{\omega: \omega(e_2) = \omega_2(e_2)\}) \\ = 2 [E(XY) - E(X)E(Y)]$$

setzt Induktion über k :

Annahme FKG-Ungleichung
gilt für alle Fkt. die nur
von $e_1, \dots, e_{k-1}$ abhängen

X, Y hängen nur von $e_1, \dots, e_k$
ab

$$E(XY) = E[\underbrace{E(XY | \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1}))}_{\text{hängt nur von } e_k \text{ ab}}]$$

↳ Induktionsvoraussetzung

$$\leq E \left[E(X | w(e_1), \dots, w(e_{k-1})) \right. \\ \left. \cdot E(Y | w(e_1), \dots, w(e_{k-1})) \right]$$

hängen nur von $e_1, \dots, e_{k-1}$ ab
 $\hookrightarrow$ Induktionsvoraussetzung:

$$\leq E \left[E(X | w(e_1), \dots, w(e_{k-1})) \right] \\ \cdot E \left[E(Y | w(e_1), \dots, w(e_{k-1})) \right] \\ = E[X] E[Y]$$

□

Ende VL 3

Wiederholung

Gitter $\mathbb{Z}^d$, Kantenmenge E^d

jede Kante unabhängig voneinander
offen mit Wsk. p , geschlossen mit Wsk.

$1-p$

definiere Ordnungsparameter

$$\Theta(p) = \text{Wsk.} \{ |C(0)| = \infty \}$$

Satz $\Theta(p) = 0 \Rightarrow \nexists \infty$ -gr. Cluster mit Wsk. 1

$$\Theta(p) > 0 \Rightarrow \exists$$

definiere Perkolationschwelle

$$p_K = \sup \{ p : \Theta(p) = 0 \}$$

Theorem für $d=1 \rightarrow p_K = 1$

für $d \geq 2 \quad p_K \in (0, 1)$

Realisierungen ω, ω'

$$\omega' \geq \omega \Leftrightarrow \forall e \in E^d \quad \omega'(e) \geq \omega(e)$$

Funktion $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt wachsend

$$\Leftrightarrow f(\omega') \geq f(\omega) \quad \forall \omega', \omega \text{ mit } \omega' \geq \omega$$

abnehmend $\Leftrightarrow -f$ ist wachsend

Ereignis A ist wachsend (abnehmend)

$\Leftrightarrow \mathbb{1}_A$ ist wachsend (abnehmend)

anschaulich: Wenn Ereignis wahr ist, kann es durch hinzutreten von offenen Knoten nicht falsch werden

$\hookrightarrow$ Ereignis ist wachsend

$\bar{F}$ KG Ungleichung

X, Y wachsende Funktionen
(oder abnehmend)

$$E(X) E(Y) \leq E(X \cdot Y)$$

X wachsend, Y abnehmend

$$E(X) E(Y) \geq E(X \cdot Y)$$

Bsp.: $X = \text{Indikatorfunktion } \mathbb{1}_A$

$Y = \mathbb{1}_B$, A, B wachsend

$$\hookrightarrow P(A \cap B) \geq P(A) P(B)$$

Betrachte wachsende Ereignisse A, B ,
die nur von endl. vielen Kanten
abhängen $e_1 \dots e_n$

$\hookrightarrow$ Menge von offenen Kanten

$$K(w) = \{i \in 1, \dots, n : w(e_i) = 1\}$$

definiere $A \circ B =$ "Ereignisse A und B
entfolgen disjunkt"

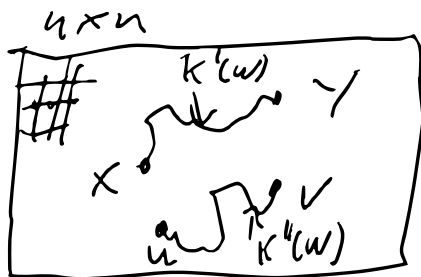
Formal: $w \in A \circ B$

$(\Rightarrow) K(w)$ kann in $K'(w)$ und $K''(w)$ ($K = K' \cup K''$)
zerlegt werden sodass:

- $\forall i \in K'(w) : w(e_i) = 1 \Rightarrow w \in A$
- $\forall i \in K''(w) : w(e_i) = 1 \Rightarrow w \in B$

Bsp: $A = \{x \longleftrightarrow y\}$
 $B = \{u \longleftrightarrow w\}$

$A \circ B = \{ \exists \text{ Kanten disjunkter offener Pfad} \\ \text{von } x \text{ zu } y \text{ und von } u \text{ zu } w \}$



Theorem (BK-Abbildung)

A, B wachsend, hängen nur von endlich vielen Kanten ab

$$\hookrightarrow P(A \circ B) \leq P(A) \cdot P(B)$$

Bemerkung: 1) $A \circ B \subseteq A \cap B$

2) $A \circ B$ ist wachsend

$$3) (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = A \circ B \circ C$$

$$4) P[A_1 \circ \dots \circ A_m] \leq \prod_{i=1}^m P(A_i)$$

Beweis: (Kopplung 2 Kopien) nur endlich viele (n) Kanten

$$\Omega_i = \{0, 1\}^n \quad i = 1, 2$$

$$F_i = 2^{\Omega_i} \text{ Potenzmenge, } P_i$$

Gemeinsamer ω_K -Raum

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \tilde{F}_{12} = 2^{\Omega_{12}}$$

$$P_{12} = P_1 \cdot P_2$$

Realisierung $x \in \Omega_1 \quad y \in \Omega_2 \quad x \times y \in \Omega_1 \times \Omega_2$

$$10110 \dots 1100 \underset{u}{1} \in \Omega_1$$

$$(100, 1 \dots 10, 10, 0) \underset{u}{1} \in \Omega_2$$

A, B wachsend in Ω_1

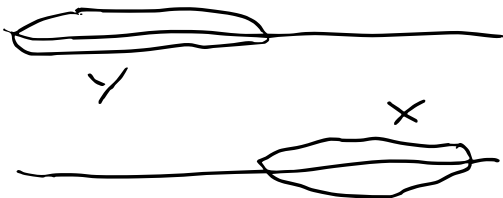
$$A' \in \tilde{F}_{12}$$

"Menge aller $x \times y \in \Omega_{12}$ sodass $x \in A$

$$\forall K = 0, \dots, n$$

$B'_K \in \tilde{F}_{12} =$ Menge aller $x \times y \in \Omega_{12}$, sodass

$$(y_1, \dots, y_K, x_{K+1}, \dots, x_n) \in B$$



beachte: A' , B'_k sind wachsend

$$P[A \circ B] = P_{12}[A' \circ B'_0]$$

betrachte nur x

↑
Kopplung



auch klar

$$P_{12}[A' \circ B'_n] = P_{12}[A' \cap B'_n]$$

↑
hängt nur von x ab
hängt nur von y ab $\rightarrow$ unabhängig

$$= P_{12}(A') P_{12}(B'_n) = P(A) \cdot P(B)$$

Es verbleibt zu zeigen, dass:

$$P_{12}(A' \circ B'_0) \leq P_{12}(A' \circ B'_n)$$

das wiederum folgt direkt aus

$$\boxed{P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_{12}(A' \circ B'_k)} \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

*

wir wollen nun * zeigen

Strategie: suche wsk.-Maß erhaltende
Injektion

$$\varphi: A' \circ B'_{K-1} \rightarrow A' \circ B'_K$$

denn dann ist

$$\begin{aligned} P_{12}(A' \circ B'_{K-1}) &= \sum_{x \times y \in A' \circ B'_{K-1}} P_{12}(x \times y) \\ &= \sum_{x \times y \in A' \circ B'_{K-1}} P_{12}(\varphi(x \times y)) \leq \sum_{x \times y \in A' \circ B'_K} P_{12}(x \times y) \\ &= P_{12}(A' \circ B'_K) \end{aligned}$$

Konstruktion von φ

Sei Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

I erzwingt A' für $x \times y \in A'$

wenn $u \times v \in \mathcal{D}_{12}$ mit $u_i = x_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow u \times v \in A'$

I erzwingt B'_K für $x \times y \in B'_K$

wenn $\forall u \times v \in \mathcal{R}_2$ mit

$$\left. \begin{array}{l} u_i = v_i \quad \forall i \in I, i \leq K \\ v_i = x_i \quad \forall i \in I, i > K \end{array} \right\} \Rightarrow u \times v \in B'_K$$

$$C_1 = \{ x \times y : A' \circ B'_{K-1} \text{ tritt unabhängig von } x_K \text{ ein} \}$$

$$C_2 = \{ x \times y : [A' \circ B'_{K-1} \text{ tritt ein} \Leftrightarrow x_{K+1}] \text{ und } x_K = 1 \}$$

$$\hookrightarrow A' \circ B'_{K-1} = C_1 \cup C_2$$

$$C'_2 = C_2 \cap \{ x \times y : \exists I \subseteq \{1, \dots, 4\} \text{ sodass } K \in I \\ \text{und } I \text{ erzwingt } A' \text{ in } x \times y \\ \text{und } \{1, \dots, 4\} \setminus I \text{ erzwingt } B'_{K-1} \}$$

$$C''_2 = C_2 \setminus C'_2$$

$$\leadsto C_2 = C'_2 \cup C''_2$$

Für $x \times y \in \mathcal{R}_{12}$ definiere:

$$x' \times y' \in \mathcal{R}_{12}$$

$$x'_i = x_i \quad \forall i \neq k$$

$$y'_i = y_i \quad \forall i \neq k$$

$$x'_k = y_k$$

$$y'_k = x_k$$

definiere

$$\varphi(x \times y) := \left\{ \begin{array}{ll} x \times y & \text{für } x \times y \in C_1 \cup C_2' \\ x' \times y' & \text{für } x \times y \in C_2'' \end{array} \right\}$$

$C_1 \subseteq A' \circ B'_k$, da A' , B'_{k-1} disjunkt voneinander unabh. von x_k eintreten ✓

$C_2' \subseteq A' \circ B'_k$ da x_k nicht relevant für B'_{k-1} ✓

$\varphi(C_2'') \subseteq A' \circ B'_k$ per Konstruktion von φ

$$\hookrightarrow x \times y \in A' \circ B'_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x \times y) \in A' \circ B'_k$$

(A' hängt nicht von x_k ab)

Auf C_1, C_2' ist φ Identität

Sei $x \times y \in C_2''$

$$\hookrightarrow \varphi(x \times y) = x' \times y' \notin C_1 \\ \notin C_2'$$

$\hookrightarrow \varphi$ ist Injektion

Perfekt Wsk, da φ entweder Identität ist,
oder (unabhängige) Einträge von Zufalls-
vektoren tauscht

$\hookrightarrow \square$ Ende VL 4

Zusammenfassung Konstruktion von
 φ : Sei $x \times y \in A' \circ B'_{k-1}$, falls $x \times y \in A' \circ B'_k$

$\hookrightarrow \varphi(x \times y) = x \times y$, falls nicht

$\hookrightarrow \varphi$ tauscht x_k und y_k

Definition

Sei $A, B \in \mathcal{F}$, $\omega \in \Omega$, $S \subseteq \{1, \dots, 4\}$
 $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{F}^d$

($\hookrightarrow$)

$$C(\omega, S) := \{\omega' : \omega'(e_i) = \omega(e_i) \forall i \in S\}$$

$$A \square B := \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega : \exists S = S(\omega) \subseteq \{1, \dots, 4\} \\ \text{so dass } C(\omega, S) \subseteq A \\ \text{und } C(\omega, \{1, \dots, 4\} \setminus S) \subseteq B \end{array} \right.$$

Aufgabe

wenn A, B wachsend $\Rightarrow A \square B = A \cup B$

wenn A wachsend, B abnehmend $\Rightarrow$

$$A \square B = A \cap B$$

Theorem (Reinhardts Ungleichung)

$\forall A, B$, hängt nur von endl. vielen Kantenaus

$$\hookrightarrow P(A \square B) \leq P(A) P(B)$$

$\leadsto$ Mischung aus FKG und BK Ungleichung
hier: zum Beweis

Definition $A \in \mathcal{F}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $w \in \mathcal{W}$
 i ist ausschlaggebend für A in w , wenn

$$\pi_A(w^i) \neq \pi_A(w_i)$$

wobei $w^i(e_j) = \begin{cases} w(e_j) & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$

$$w_i(e_j) = \begin{cases} w(e_j) & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases}$$

definiere

$$I_i^p(A) = P_p(\{i \text{ ist ausschlaggebend für } A\})$$

heißt Einfluss von i auf A

$$I^p(A) = \sum_{i=1}^n I_i^p(A) \quad - \quad \underline{\text{Gesamteinfluss auf } A}$$

Aufgabe berechne $I_i(A)$ und $I(A)$

für a) $A = \{\omega(e_1)=1\} \leadsto \text{Diktatur}$

b) $A = \{\omega : |\{i : \omega(e_i)=1\}| \text{ ist gerade} \}$
(Parität)

c) $A = \{\omega : |\{i : \omega(e_i)=1\}| \geq \frac{n}{2}\}$
(Mehrheit)

Poincaré - Ungleichung:
 $\forall A$ wachsend

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbb{1}_A) &= E[(\mathbb{1}_A - P(A))^2] = P(A)(1 - P(A)) \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n I_i(A) \end{aligned}$$

weglassen

Theorem (Margulis - Russo) ^{sei A wachsend}

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \underline{I}^p(A)$$

A hängt wieder
nur von endl.
vielen Kanten ab

Beweis: Seien $(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$
wsk., dass Kanten $e_1, \dots, e_n$ offen sind

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} P(A) = \underline{I}_i(A)$$

denn

$$P(A) = P(A \cap \{e_i \text{ ist ausschlaggebend für } A\})$$

$$+ P(A \cap \{e_i \text{ ist nicht ausschlaggebend für } A\})$$

unabhängig von e_i

$$\{w(e_i) = 1\} \cap \{e_i \text{ ist ausschlaggebend für } A\}$$



unabhängig voneinander

$$\leadsto P(A) = p_i P(e_i \text{ ist ausschlaggebend für } A)$$

↳ unabh. von e_i

$$f(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

$$+ P(e_i \text{ ist nicht ausschlaggebend für } A)$$

↳

$$g(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

$$\leadsto \frac{\partial}{\partial p_i} P(A) = I_i(A)$$

$$\text{mit } p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

$$\frac{d}{dp} P(A) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} P(A) = \sum_{i=1}^n I_i(A) = I(A)$$

□

Zusammenfassung unserer
"Werkzeuge"

$\forall A, B \in \mathcal{F}$ die wachsend sind und
nur von endlich vielen Kanten
abhängen gilt:

$$FKG: P_p(A \cap B) \geq P_p(A) P_p(B)$$

$$BK: P_p(A \cup B) \leq P_p(A) + P_p(B)$$

"disjunkte Schnittmenge"

$$MR: \frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_{e \in E_d} P_p(\text{e ist ausschlaggebend für } A)$$

Bemerkungen:

1) FKG gilt für alle wachsenden
Ereignisse (kann auch von unendl. vielen
Kanten abhängen) z.B. $A = \{x \leftrightarrow y\}$
 $B = \{u \leftrightarrow v\}$

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A) \cdot P_p(B)$$

2) BK Ungleichung gilt für
 "alle nützlichen" Ereignisse
 Bsp.: $A, B \in \mathcal{F}$ wachsend sodass
 $\exists A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$ wobei $A_k, B_k \in \mathcal{F}_k$
 jeweils nur von endlich vielen
 Variablen abhängen

Bsp.: $A = \{x \leq y\}, B = \{u \leq v\}$
 $A_n = \{x \leq y \text{ in } [-n, n]^d\}, B_n = \{u \leq v \text{ in } [-n, n]^d\}$

3) MR ist nicht immer
 wahr

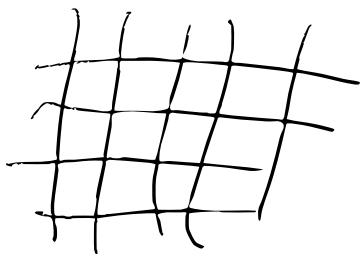
Bsp.: $\Theta(P) = P_P[|C(P)| = \infty]$

$\frac{d}{dP} \Theta(P)|_{P=P_k}$ existiert nicht (siehe später)

aber es gilt immer

$\liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} (P_{P+\delta}(A) - P_P(A)) \geq \sum_{e \in \mathcal{E}} P[e \text{ ist ausschl. (agebend) für } A]$
 (ü A)

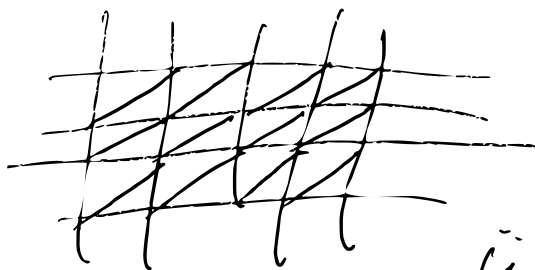
$d=2 \quad \mathbb{Z}^2$



$$P_K(\mathbb{Z}^d) = \sup\{P : \Theta(p) = 0\}$$

$$\in (0, 1) \text{ für } d \geq 2$$

Dreiecksgitter



$\pi^2 \leadsto \vec{\Theta}(p)$

$$P_K(\pi^2) =$$

$$= \sup\{P : \vec{\Theta}(p) = 0\}$$

üA: $P_K(\pi^2) \in (0, 1)$

offensichtlich: $P_K(\pi^2) \leq P_K(\mathbb{Z}^2)$

Theorem: $P_K(\mathbb{Z}^2) > P_K(\pi^2)$

$\Leftrightarrow \exists P_1 < P_2$ sodass $\forall p \in (P_1, P_2)$ gilt:

$$\Theta(p) = 0 \text{ aber } \vec{\Theta}(p) > 0$$

Beweis: seien E^2 die Kanten von $\mathbb{Z}^2$
 und F^2 die Diagonalkanten von $\overline{\Pi}^2$
 seien $p, s \in [0, 1]$

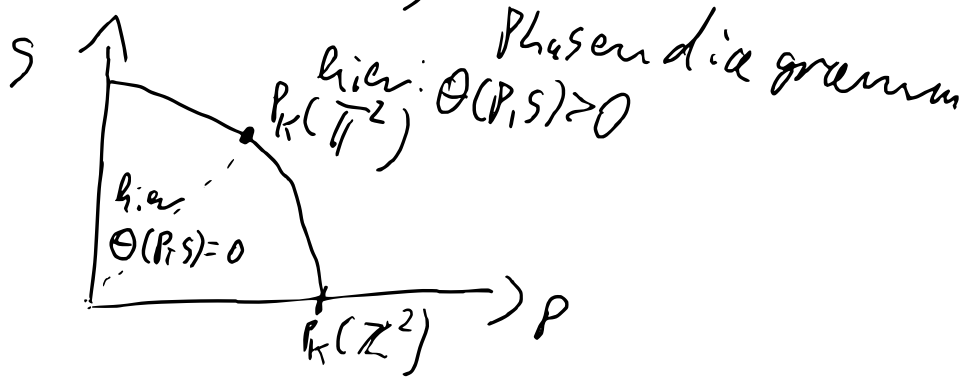
Betrachte ein Wsk.-Maß $P_{p,s}$ auf $E^2 \cup F^2$
 sodass $\forall e \in E^2$ und $f \in F^2$ gilt:

- $P_{p,s}(w(e)=1) = 1 - P_{p,s}(w(e)=0) = p$
- $P_{p,s}(w(f)=1) = 1 - P_{p,s}(w(f)=0) = s$

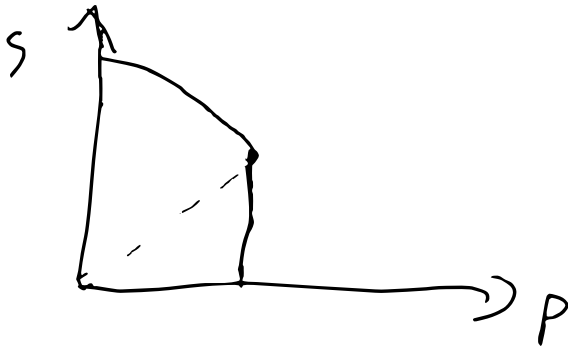
Sei nun $\Theta(p, s) = P_{p,s}(|C(o)| = \infty)$

Eigenschaften:

- 1) $\Theta(p, s)$ ist monoton wachsend in p und s
- 2) $\Theta(p, 0) = \Theta(p)$
- 3) $\Theta(p, p) = \overline{\Theta}(p)$



Wir wollen die strikte
Konvexität der Übergangslinie
zeigen, denn das Theorem sagt
uns, dass folgendes nicht möglich
ist:



Problem: $\Theta(p, s)$ ist evtl. nicht
differenzierbar.

Sei: $B(n) := [-n, n]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ Box

Sei weiterhin $\Theta_n(p, s) = p_{p,s}(0 \in \rightarrow \partial B(n))$

dies ist offensichtlich ein
Polynom in p und s

$\uparrow$
Rand von
Box

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(p, s) = \Theta(p, s)$$

Benutze Lemma:

Lemma: $\exists$ eine positive nat. Zahl L
und eine stetige Funktion

$$\alpha: (0, 1)^2 \rightarrow (0, \infty) \text{ sodass}$$

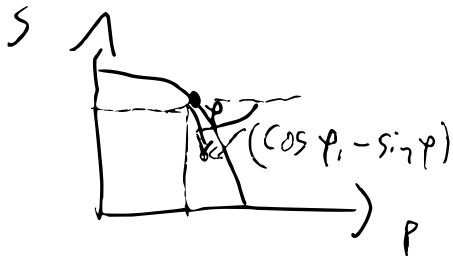
$\forall p, s \in (0, 1)$ und $\forall n \geq L$ gilt:

$$\alpha(p, s) \frac{\partial}{\partial s} \Theta_n(p, s) \leq \frac{\partial}{\partial p} \Theta_n(p, s) \leq \frac{1}{\alpha(p, s)} \frac{\partial}{\partial s} \Theta_n(p, s)$$

Sei $\eta \in (0, 1)$, z.B. $\eta = 0.1$, $\exists \eta > 0$ sodass

$$\alpha(p, s) \geq \eta \quad \forall p, s \in [\eta, 1-\eta] \quad \left(\begin{array}{l} \text{kompakt} \\ \text{(Stetigkeit)} \end{array} \right)$$

Sei $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ sodass $\tan \varphi = \frac{1}{\eta}$



Seien $p, s \in [2, \pi-2]$

$$\nabla \Theta_n \cdot \begin{pmatrix} \cos p \\ -\sin p \end{pmatrix} = \partial_p \Theta_n \cos p - \partial_s \Theta_n \sin p$$

$$\geq \underbrace{\alpha(p, s)}_{\geq 1} \partial_p \Theta_n \geq 0$$

$$\leq \partial_p \Theta_n (\cos p - 1 \sin p) = 0 \quad *$$

$$\frac{1}{\tan p} = \frac{\cos p}{\sin p}$$

$\leadsto \Theta_n$ wird in p -Richtung kleiner
(eigentlich nicht größer)

Sei $(a, b) \in [2, \pi-2]^2$

und $(a', b') = (a, b) + \eta (\cos p, -\sin p) \in [2, \pi-2]^2$

$$\leadsto \Theta(a', b') = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta_n(a', b') \stackrel{d*}{\leq} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta_n(a, b) = \Theta(a, b)$$

Wähle $a, b = p_k(\pi^2) - \delta \leadsto \Theta(a, b) = 0$

Für genügend kleine η, δ
und richtige Wahl von η, δ gilt nun:

$$a' = a + \eta \cos \varphi > p_K(\overline{\mathbb{Z}}^2) \quad **$$

und

$$b' = b - \eta \sin \varphi \geq 0$$

$$\Rightarrow \Theta(a', 0) \leq \Theta(a', b') \leq \Theta(a, b) = 0$$

$$\Rightarrow \Theta(a', 0) = 0 = \Theta(a')$$

$$\Rightarrow a' \leq p_K(\mathbb{Z}^2)$$

$$\Rightarrow p_K(\overline{\mathbb{Z}}^2) < a' \leq p_K(\mathbb{Z}^2)$$

**

□

Ende VL 5

Es fehlt noch Beweis für Lemma
defin: Verallgemeinerung von MR-Formel
(Beweis identisch analog)

$$\text{Sei } A_n = \{0 \hookrightarrow \delta B(n)\}$$

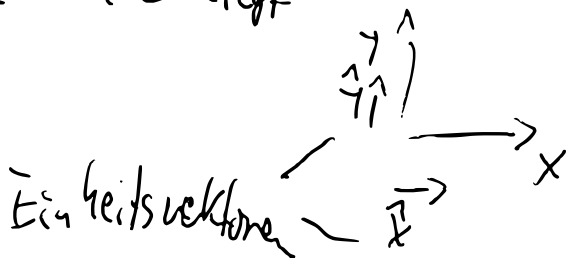
$\leadsto$ dann gilt

$$\partial_p \Theta_n(p, s) = \sum_{e \in \mathbb{F}^2} P_{p, s} (e \text{ ist ausschlaggebend für } A_n)$$

$$\partial_s \Theta_n(p, s) = \sum_{p \in \mathbb{F}^2} P_{p, s} (p \text{ ist ausschlaggebend für } A_n)$$

Beweis von Lemma:

$\forall e \in \mathbb{F}^2$ ordnen wir folgendermaßen eine eindeutige Kante $f(e) \in \mathbb{F}^2$ zu, welche in der Nähe von e liegt



Sei $z = (z_1, z_2)$

wenn $z_1 \geq 0$ und $e = \langle z, z + \vec{x} \rangle$ oder
 $e = \langle z, z + \vec{y} \rangle$

$\leadsto f(e) = \langle z, z + \vec{x} + \vec{y} \rangle$

wenn $z_1 < 0$: $e = \langle z_1, z_1 + \vec{x} \rangle$ oder
 $e = \langle z_1, z_1 - \vec{y} \rangle$

$$\hookrightarrow f(e) = \langle z_1 + \vec{x}, z_1 - \vec{y} \rangle$$

$$z \xrightarrow{e} f(e)$$

$$z \xrightarrow{e} f(e)$$

Behauptung: $\exists$ stetige Funktion

$$\beta : (0, 1)^2 \rightarrow (0, \infty) \text{ sodass}$$

A_n , welche genügend groß sind, $\forall e$

$$P_{p,s}(e \text{ ist ausschlaggebend für } A_n)$$

$$\leq \beta(p,s) P_{p,s}(f(e) \text{ ist ausschlaggebend für } A_n)$$

dann wäre

$$\mathbb{Q}_p \cap (0,1)^2 \leq \beta(p,s) \sum_{e \in \mathbb{F}^2} P_{p,s}(f(e) \text{ ist ausschlaggebend für } A_n)$$

$$\leq 2 \beta(p,s) \sum_{p \in \mathbb{F}^2} P_{p,s}(p \text{ ist a. f. } A_n) = 2 \beta(p,s) \mathbb{Q}_p \cap (0,1)^2$$

Beweis von Behauptung:

Sei $E(n)$ = Menge von Kanten mit
beiden Enden in Box $B(n)$

betrachte W_K -Raum nur auf $E(n)$

für $e \in E(n) \leadsto$ konstruiere Abbildung
(lokale Modifikation)

$$\psi_e : \{e \text{ ist ausschlaggebend f. } A_n\} \\ \rightarrow \{f(e) \text{ ist a. p. } A_n\}$$

so dass 1) $\forall w \in \{e \text{ ist a. p. } A_n\}$ gilt:

$$P_{P,S}(\psi_e(w)) \geq \tilde{B}(P,S) P_{P,S}(w)$$

$$2) \forall w' \in \{f(e) \text{ ist a. p. } A_n\}$$

$$|\psi_e(w')| \leq \text{const.}$$