UNIVERSITÄT GREIFSWALD • IfP • THEORETISCHE PHYSIK II
Komplexe Quanten-Systeme
Prof. Dr. H. Fehske
https://physik.uni-greifswald.de/ag-fehske/

Blatt 12 Abgabe: **Dienstag, 2.7.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 33 *Störungstheorie für Myonen*

Mesonische Atome bestehen aus μ-Mesonen (Masse $m_\mu = 206 m_e$), die an Atomkerne in Wasserstoffbahnen gebunden sind. Die Energien der μ-mesonischen Niveaus sind relativ zu ihren Werten für einen Punktkern verschoben, weil die Kernladung über eine Region mit dem Radius R verteilt ist. Das effektive Coulomb-Potential kann angenähert werden als

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{-Ze^2}{r} & r \geq R\,, \\ \dfrac{-Ze^2}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{R^2}\right) & r \leq R\,. \end{cases}$$

Wenn der Kern ein Punktteilchen wäre, würde die Coulomb-Potentialenergie der Myonen $V_0 = -\frac{Ze^2}{r}$ sein. Betrachten Sie nun $H' = V - V_0$ als Störung.

a) Geben Sie qualitativ an, wie die Energien der $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $3d$ muonischen Niveaus absolut und relativ zueinander verschoben werden. Erklären Sie physikalisch die Unterschiede in den Verschiebungen. Skizzieren Sie die gestörten und ungestörten Energie-Niveau-Diagramme für diese Zustände.

b) Berechnen Sie die Energieverschiebung des $1s$-Zustands in erster Ordnung der Störungstheorie. Nehmen Sie dabei $R/a_\mu \ll 1$ an, wobei a_μ der Bohrsche Radius des Myons ist.

c) Berechnen Sie analog die $2s$-$2p$ Energieverschiebung, wieder mit der Annahme $R/a_\mu \ll 1$. Zeigen Sie, dass sich aus dieser Verschiebung R bestimmen lässt.

d) Wann kann die Methode von (b) schief gehen? Überschätzt/Unterschätzt die Methode die Energieverschiebung?

Hinweis:

$$\begin{aligned} \psi_{1s} &= 2N_0 e^{-r/a_\mu} Y_{00}(\theta,\phi)\,, \\ \psi_{2s} &= \frac{1}{\sqrt{8}} N_0 \left(2 - \frac{r}{a_\mu}\right) e^{-r/2a_\mu} Y_{00}(\theta,\phi)\,, \\ \psi_{2p} &= \frac{1}{\sqrt{24}} N_0 \frac{r}{a_\mu} e^{-r/2a_\mu} Y_{1m}(\theta,\phi)\,, \end{aligned}$$

wobei $N_0 = (1/a_\mu)^{3/2}$.

Aufgabe 34 *Stark Effekt*

Ein Wasserstoffatom ($H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$) befinde sich in einem schwachen, homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$.
Notation: $|nlm\rangle$ ist der Eigenzustand des Wasserstoffatoms mit den Quantenzahlen n, l, m.

a) Wie lautet der gestörte Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$?

b) Zeigen Sie, dass L_z mit H_1 vertauscht. Folgern Sie, dass $\langle n'l'm'|H_1|nlm\rangle = 0$ ist, wenn $m' \neq m$.

c) Warum führt das Störpotential in erster Ordnung Störungsrechnung nicht zu einer Energieänderung des Zustandes $|100\rangle$?

d) Zeigen Sie mit der Rekursionsformel $(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$ für die Legendrepolynome P_l, dass $\langle n'l'm'|H_1|nlm\rangle = 0$ wenn $|l - l'| \neq 1$ (es genügt, den Fall $m = 0$ zu betrachten). Geben Sie alle Terme an, welche zur Energieänderung des Zustandes $|100\rangle$ in zweiter Ordnung Störungsrechnung beitragen.

e) Schätzen Sie die Energieänderung des Zustandes $|100\rangle$ in zweiter Ordnung Störungsrechnung ab, indem Sie einmal nur den führenden Term berücksichtigen, das andere Mal die Näherung $1 - 1/n^2 \approx 1$ für $n \geq 2$ benutzen.

f) Berechnen Sie in erster Ordnung Störungsrechnung die Aufspaltung der entarteten Zustände für die Hauptquantenzahl $n = 2$.

Angaben: Die Zustände (Wellenfunktionen) des Wasserstoffatoms lassen sich im Schwerpunktsystem und Kugelkoordinaten schreiben als

$$\psi_{nlm}(r, \phi, \theta) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit Radialteil R_{nl} und Kugelflächenfunktion Y_{lm}. Mit $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ dem Bohrschen Radius ist

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2\,a^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{r}{a}} \\
R_{20}(r) &= 2\,(2a)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}} \\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(2a)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}} \\
Y_{00}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_{1,\pm1}(\theta, \phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,e^{\pm i\phi}\ .
\end{aligned}$$