Blatt 11 Abgabe: **Dienstag, 25.6.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 31 *Algebraische Behandlung des Wasserstoffatoms*

Wir betrachten das Wasserstoffatom $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$.

(a) Zeigen Sie, dass der HAMILTON-Operator mit den Komponenten des Runge-Lenz-Vektors

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - Ze^2\frac{\mathbf{r}}{r}$$

kommutiert.

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[R_i, R_j] = -\frac{2\mathrm{i}\hbar}{m}H\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, R_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}R_k$$

sowie

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \mathbf{R}^2 = \frac{2}{m}H(L^2 + \hbar^2) + Z^2e^4.$$

(c) Es sei E ein negativer Eigenwert von H (gebundener Zustand) und $\mathcal{H}_E$ der zugehörige Eigenraum, d.h. $\mathcal{H}_E = \{|\psi\rangle \text{ mit } H|\psi\rangle = E|\psi\rangle\}$. Definiere Operatoren

$$\mathbf{R}' = \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R}, \quad \mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{R}'), \quad \mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{R}').$$

Man begründe, warum $I_i\mathcal{H}_E$, $K_i\mathcal{H}_E \subset \mathcal{H}_E$, und zeige, dass auf $\mathcal{H}_E$ die Relationen

$$[I_i, I_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}I_k, \quad [K_i, K_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}K_k, \quad [I_i, K_j] = [I_i, H] = [K_i, H] = 0$$

gelten.

(d) Erläutern Sie, wie sich die Eigenwerte E_n von H aus den Eigenwerten der Operatoren

$$C = \mathbf{I}^2 + \mathbf{K}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{R}'^2) \quad \text{und} \quad C' = \mathbf{I}^2 - \mathbf{K}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}'$$

erhalten lassen. Leiten Sie das bekannte Ergebnis

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ab. Bestimmen Sie auf gleichem Wege die Entartung von E_n.

Hinweis: Auf $\mathcal{H}_E$ ist $H = E\mathbb{1}$.

Aufgabe 32 *Addition von Drehimpulsen*

Der Zustandsraum zweier Spins ist ein Produktraum mit der Produktbasis $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ aus Eigenzuständen der Drehimpulsoperatoren $\mathbf{J}_1^2, J_1^z, \mathbf{J}_2^2, J_2^z$.
Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, besitzt dieser Hilbert-Raum auch eine Basis aus Eigenzuständen $|j_1, j_2, J, M\rangle$ der (Gesamt-) Drehimpulsoperatoren $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2$ sowie $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ und $J^z = J_1^z + J_2^z$.

a) Welche Werte sind für J, M möglich?

b) Zeigen Sie, dass die Zustände zu maximalem J und M durch $|j_1, j_2, J = j_1 + j_2, M = \pm J\rangle = |j_1, \pm j_1; j_2, \pm j_2\rangle$ gegeben sind.

In dieser Aufgabe sollen die Zustände $|j_1, j_2, J, M\rangle$ für zwei Spins 1 konstruiert werden.
Notation: $|J, M\rangle = |j_1 = 1, j_2 = 1, J, M\rangle$ und $|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle = |j_1 = 1, m_1; j_2 = 1, m_2\rangle$.

c) Berechnen Sie durch Anwendung der Kletteroperatoren $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i}J_y$ auf den Zustand $|22\rangle$ alle Zustände mit $J = 2$.

d) Finden Sie den Zustand $|11\rangle$, indem Sie einen Zustand mit $M = 1$ konstruieren, der zum Zustand $|21\rangle$ orthogonal ist. Rechnen Sie explizit nach, daß für diesen Zustand $J = M = 1$ ist. Finden Sie mittels Kletteroperatoren die übrigen Zustände mit $J = 1$.

e) Konstruieren Sie den Zustand $|00\rangle$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis!

f) Geben Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle j_1 = 1, m_1; j_2 = 1, m_2 | J, M\rangle$ in Tabellenform an.