Blatt 9 Abgabe: **Dienstag, 4.6.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 25 *Harmonischer Oszillator III – Besetzungszahldarstellung*

In der Vorlesung wurde der eindimensionale harmonische Oszillator behandelt. Der Zustand $\psi_n = (b^\dagger)^n \psi_0/\sqrt{n!}$ ist der $(n+1)$-te normierte Eigenzustand zu

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega\big(b^\dagger b + \frac{1}{2}\big) \ .$$

Es gilt $\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}$, $b\psi_0 = 0$ und $[b, b^\dagger] = 1$.

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\psi_n|b^\dagger b|\psi_m\rangle$, $\langle\psi_n|bb^\dagger|\psi_m\rangle$, $\langle\psi_n|(b^\dagger)^2|\psi_m\rangle$ und $\langle\psi_n|b^2|\psi_m\rangle$.

b) Drücken Sie Orts- und Impulsoperator durch b und $b^\dagger$ aus und berechnen Sie für $m = 1, 2, 3$ die Erwartungswerte $\langle\psi_n|x^m|\psi_n\rangle$ und $\langle\psi_n|p^m|\psi_n\rangle$. Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt im $n-$ten Eigenzustand?

c) Zeigen Sie, dass $[b, \exp(\alpha b^\dagger)] = \alpha \exp[\alpha b^\dagger]$ und $[b^\dagger, \exp(\alpha b)] = -\alpha \exp[\alpha b]$. Was ergibt sich daraus für $\exp[-\alpha b^\dagger] b \exp[\alpha b^\dagger]$ und $\exp[-\alpha b] b^\dagger \exp[\alpha b]$?

Aufgabe 26 *Harmonischer Oszillator IV – Parität*

Untersuchen Sie das Verhalten der Oszillatoreigenzustände aus der vorherigen Aufgabe bei Raumspiegelung. Dazu empfiehlt es sich dimensionslose Größen zu benutzen, also den Operator $b^\dagger$ in $\psi_n = (b^\dagger)^n\psi_0/\sqrt{n!}$ durch ξ und ∂_ξ auszudrücken. Der Operator der Raumspiegelung, $P\psi(\xi) = \psi(-\xi)$, heißt Paritätsoperator. Zeigen Sie, dass P sich darstellen läßt als

a) $P\psi(\xi) = \int d\eta K(\xi,\eta)\psi(\eta)$ mit $K(\xi,\eta) = ?$,

b) $P = \exp[i\pi b^\dagger b]$ und

c) $P = (-i)\exp\left[i\frac{\pi}{2}(\xi^2 - \partial_\xi^2)\right]$.

Aufgabe 27 *Harmonischer Oszillator V – Supersymmetrie*

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H^0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V^0(x) \ ,$$

wobei $V^0(x)$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt sei, dass für den Grundzustand $H^0\psi_0^0 = 0$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass mit Hilfe der Operatoren $Q^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mp\frac{d}{dx} + \Phi(x)\right]$, $\Phi(x) = -\frac{d}{dx}\ln(\psi_0^0)$ für H^0 und einen weiteren Operator H^1 folgende Darstellungen möglich sind,

$$H^0 = Q^+Q^- \ , \quad H^1 = Q^-Q^+ \ ,$$

mit $H^1 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V^1(x)$, $V^1(x) = V^0(x) + \frac{d}{dx}\Phi(x)$.

b) Berechnen Sie $(Q^-)^\dagger, [Q^-, Q^+], Q^+H^1 - H^0Q^+, Q^-H^0 - H^1Q^-$ und $Q^-\psi_0^0$.

c) Gegeben sei ein Eigenzustand ψ_n^1 (ψ_n^0) von H^1 (H^0) mit Eigenwert E_n^1 (E_n^0). Zeigen Sie, dass $Q^+\psi_n^1$ $(Q^-\psi_n^0$, $n > 0)$ Eigenfunktion von H^0 (H^1) mit Eigenwert E_n^1 (E_n^0) ist, d.h. die Eigenwertspektren beider HamiltonOperatoren auseinander abgeleitet werden können.