Blatt 8 Abgabe: **Dienstag, 28.5.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 22 *Drehimpuls-Vertauschungsrelation*

Wir betrachten den Drehimpulsoperator $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ mit den Komponenten $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$.

a) Berechnen Sie explizit die Kommutatoren $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}]$ und $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}]$, und zeigen Sie, dass die Resultate analog zu Kommutatoren von $\boldsymbol{L}$ ($[L_i, L_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}L_k$) sind.

b) Sei $\psi_x = xf(r)$, $\psi_y = yf(r)$ und $\psi_z = zf(r)$. Beweisen Sie explizit, dass ψ_i die Eigenfunktionen von L_i sind und bestimmen Sie die entsprechenden Eigenwerte. Was ergibt $L_i\psi_j$ für $i \neq j$?

Aufgabe 23 *Baker, Campell & Hausdorff*

Der Kommutator zweier Operatoren $[A, B]$ ist linear in A und B und antisymmetrisch.

a) Es gelte $[A, [A, B]] = 0$ und $[B, [A, B]] = 0$ $(*)$; sowie $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ und $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}$.

Hinweis: Man überzeuge sich, dass $f(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$ die Differentialgleichung

$\frac{df}{dt} = (A + B + t[A, B])f$ *erfüllt und löse diese.*

b) Die Bedingungen $(*)$ aus a)werden nun nicht mehr vorausgesetzt.
Beweisen Sie die Identität:

$\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \ldots$

Aufgabe 24 *Fermis Goldene Regel*

Ein Teilchen in einem ∞-tiefen Potentialtopf der Breite a befindet sich unter dem Einfluß einer zeitabhängigen Störung $V = -eEx\cos\omega t$. Berechnen Sie mit Hilfe der zu vervollständigenden Goldenen Regel,

$$P_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|...|i\rangle|^2 \Big[\delta(...) + \delta(...)\Big] ,$$

die Übergangsrate P_{fi}, wobei $|i\rangle$ und $|f\rangle$ Eigenzustände des ungestörten Systems sind. Diskutieren Sie das Ergebnis!