Blatt 7 Abgabe: **Dienstag, 21.5.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 19 *Impulsdarstellung der Schrödinger-Gleichung*

Die eindimensionale Schrödinger-Gleichung in Ortsdarstellung lautet

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t)$$

für die Wellenfunktion $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ mit einer Eigenbasis $|x\rangle$ des Ortsoperators x.

Geben Sie die Schödinger-Gleichung in Impulsdarstellung an, welche die Zeitentwicklung von $\psi(p,t) = \langle p|\psi(t)\rangle$ bestimmt. Hier ist $|p\rangle$ die Eigenbasis des Impulsoperators $p = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}$, deren Phase durch die Forderung festgelegt ist, dass $\langle x = 0|p\rangle$ reell und positiv ist.

Aufgabe 20 *Ehrenfest-Theorem, Harmonischer Oszillator I*

a) Beweisen Sie das Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[H,A]\rangle$$

für eine (nicht explizit zeitabhängige) Observable A. Dabei bezeichnet $\langle A\rangle$ den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$.

b) Zeigen Sie mit diesem Theorem, dass die Erwartungswerte von Ort und Impuls des harmonischen Oszillators den klassischen Bewegungsgleichungen genügen. Berechnen Sie den Zeitverlauf von Ort und Impuls in den stationären Zuständen des harmonischen Oszillators.

Aufgabe 21 *Harmonischer Oszillator II*

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator $H = p^2/2m + m\omega^2x^2/2$.

a) Finden Sie - unter Verwendung der in der Vorlesung angegebenen Bewegungsgleichung für die Mittelwerte einer explizit zeitabhängigen Größe - die Zeitabhängigkeit des “Anfangs-Ort”-Operators $x_0 = x\cos\omega t - (p/m\omega)\sin\omega t$ und “Anfangs-Impuls”-Operators $p_0 = p\cos\omega t + m\omega x\sin\omega t$.

b) Kommutieren diese Operatoren mit H?

c) Sind die Ergebnisse von (a) und (b) kompatibel? Diskussion!

d) Geben Sie die Bewegungsgleichungen dieser Operatoren im Heisenberg-Bild an.

e) Berechnen Sie den Kommutator $[p_0, x_0]$. Ist die Heisenberg-Unschärferelation erfüllt?