Blatt 6 Abgabe: **Dienstag, 14.5.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 16

(a) Gegeben sei ein hermitescher Operator A mit Eigenwerten a_n und Eigenfunktionen $u_n(x)$ $[n = 1, 2, \ldots, N;\ 0 \le x \le L]$. Zeigen Sie, dass der Operator $\exp(iA)$ unitär ist.

(b) Sei umgekehrt U_{mn} die Matrix eines unitären Operators. Konstruieren Sie die Matrix eines hermiteschen Operators in Termen von U_{mn}.

(c) Gegeben sei ein zweiter hermitescher Operator B mit Eigenwerten b_m und Eigenfunktionen $v_m(x)$. Gesucht ist die Darstellung des unitären Operators V der die Eigenvektoren von B in die von A überführt.

Aufgabe 17

Von einem quantenmechanischen System sei bekannt, dass es nur zwei Energie-Eigenzustände besitzt, die wir mit $|1\rangle$ und $|2\rangle$ bezeichnen wollen. Das System werde (neben der Energie) durch drei weitere Observable P, Q und R charakterisiert. Die normierten Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ seien nicht notwendigerweise Eigenzustände von P, Q, oder R.
Bestimmen Sie so viele Eigenwerte von P, Q und R wie möglich auf Grundlage der folgenden Sätze "experimenteller Daten":

(a) $\langle 1|P|1\rangle = 1/2$, $\langle 1|P^2|1\rangle = 1/4$;

(b) $\langle 1|Q|1\rangle = 1/2$, $\langle 1|Q^2|1\rangle = 1/6$;

(c) $\langle 1|R|1\rangle = 1$, $\langle 1|R^2|1\rangle = 5/4$, $\langle 1|R^3|1\rangle = 7/4$.

Hinweis: Nutzen Sie die Hermitezität der Operatoren aus.
Achtung: Ein Satz von Daten ist unphysikalisch!

Aufgabe 18

Gegeben sei der Hamilton-Operator H mit Eigenzuständen $|n\rangle$ und Energien E_n.

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle m|\,[[H,x],x]\,|m\rangle = 2\sum_n (E_m - E_n)\,|\langle m|x|n\rangle|^2 \ .$$

b) Sei nun $H = p^2/2M + V(x)$. Berechnen Sie $[[H,x],x]$ und zeigen Sie damit, dass

$$\sum_n (E_n - E_0)\,|\langle n|x|0\rangle|^2 = \text{konst.}$$

Bestimmen Sie den Wert der Konstanten.