Blatt 5 Abgabe: **Dienstag, 7.5.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 13 *Rechnen mit Operatoren I*

Auf dem Hilbertraum der auf $(-\infty, \infty)$ quadratintegrablen Funktionen seien die Operatoren A_1, A_2, A_3 definiert durch $A_1 = c$, $c \in \mathbb{C}$, $A_2 = \partial_x$, $A_3 = (c - c^*)\partial_x$. Bestimme die zu A_1, A_2, A_3 adjungierten Operatoren!

Aufgabe 14 *Rechnen mit Operatoren II*

a) Seien $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$, $|d\rangle$ Basisvektoren eines vierdimensionalen Hilbert-Raumes. Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren des Operators

$$A = 4|a\rangle\langle a| + 2|b\rangle\langle b| + 3|c\rangle\langle c| + 2|d\rangle\langle d| - |b\rangle\langle c| - |c\rangle\langle b| - |c\rangle\langle d| - |d\rangle\langle c|\,.$$

Ist A hermitesch bzw. unitär? Geben Sie einen unitären Operator T an, so dass $T^\dagger AT$ die Form $\sum\limits_{i=a,b,c,d} \alpha_i |i\rangle\langle i|$ hat.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{C}$ der Operator A aus Teil (a) und $B = |b\rangle\langle b| + \alpha^2 |d\rangle\langle d| - \alpha|b\rangle\langle d| - \alpha|d\rangle\langle b|$ ein gemeinsames System von Eigenvektoren besitzen, und bestimmen Sie dieses (mit Eigenwerten). Für welche α ist B hermitesch?

Aufgabe 15 *Rechnen mit Operatoren III*

Im folgenden seien E die Identität, U ein unitärer Operator, H, K, hermitesche Operatoren und L ein linearer Operator mit einem vollständigen Eigenfunktionssystem auf einem beliebigen Hilbert-Raum.

a) Zeige, dass die Operatoren

$$HK + KH\,, \quad \mathrm{i}[H, K]\,, \quad UHU^{-1}\,, \quad \mathrm{i}(U - E)(U + E)^{-1}$$

hermitesch sind!

b) Für zwei beliebig vorgegebene Vektoren $|u\rangle$, $|v\rangle$ sei $R = E + |u\rangle\langle v|$. Für $\langle v|u\rangle \neq -1$ berechne die Inverse von R. Was passiert für $\langle v|u\rangle = -1$? Bestimme den zu R adjungierten Operator.

c) Es sei L^{-1} die Inverse von L. Zeige, dass L und L^{-1} ein gemeinsames Eigenfunktionssystem besitzen!

d) Es sei $[L, L^\dagger] = 0$. Zeige, dass L und $L^\dagger$ ein gemeinsames Eigenfunktionssystem besitzen!

e) In welcher Beziehung zueinander stehen die Eigenwerte von L, L^{-1} und $L^\dagger$?

f) Zeige, dass die Eigenwerte eines unitären Operators den Betrag 1 haben!