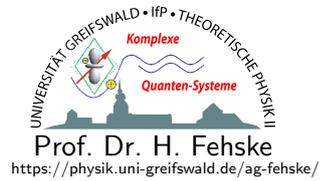




Übungen zur Theoretischen Physik 3

Quantenmechanik

SS 2019



Blatt 5

Abgabe: **Dienstag, 7.5.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 13 *Rechnen mit Operatoren I*

Auf dem Hilbertraum der auf $(-\infty, \infty)$ quadratintegrablen Funktionen seien die Operatoren A_1, A_2, A_3 definiert durch $A_1 = c, c \in \mathbb{C}, A_2 = \partial_x, A_3 = (c - c^*)\partial_x$. Bestimme die zu A_1, A_2, A_3 adjungierten Operatoren!

Aufgabe 14 *Rechnen mit Operatoren II*

- a) Seien $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle$ Basisvektoren eines vierdimensionalen Hilbert-Raumes. Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren des Operators

$$A = 4|a\rangle\langle a| + 2|b\rangle\langle b| + 3|c\rangle\langle c| + 2|d\rangle\langle d| - |b\rangle\langle c| - |c\rangle\langle b| - |c\rangle\langle d| - |d\rangle\langle c|.$$

Ist A hermitesch bzw. unitär? Geben Sie einen unitären Operator T an, so dass $T^\dagger A T$ die Form $\sum_{i=a,b,c,d} \alpha_i |i\rangle\langle i|$ hat.

- b) Untersuchen Sie, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{C}$ der Operator A aus Teil (a) und $B = |b\rangle\langle b| + \alpha^2 |d\rangle\langle d| - \alpha |b\rangle\langle d| - \alpha |d\rangle\langle b|$ ein gemeinsames System von Eigenvektoren besitzen, und bestimmen Sie dieses (mit Eigenwerten). Für welche α ist B hermitesch?

Aufgabe 15 *Rechnen mit Operatoren III*

Im folgenden seien E die Identität, U ein unitärer Operator, H, K , hermitesche Operatoren und L ein linearer Operator mit einem vollständigen Eigenfunktionssystem auf einem beliebigen Hilbert-Raum.

- a) Zeige, dass die Operatoren

$$HK + KH, \quad i[H, K], \quad UHU^{-1}, \quad i(U - E)(U + E)^{-1}$$

hermitesch sind!

- b) Für zwei beliebig vorgegebene Vektoren $|u\rangle, |v\rangle$ sei $R = E + |u\rangle\langle v|$. Für $\langle v|u\rangle \neq -1$ berechne die Inverse von R . Was passiert für $\langle v|u\rangle = -1$? Bestimme den zu R adjungierten Operator.
- c) Es sei L^{-1} die Inverse von L . Zeige, dass L und L^{-1} ein gemeinsames Eigenfunktionssystem besitzen!
- d) Es sei $[L, L^\dagger] = 0$. Zeige, dass L und L^\dagger ein gemeinsames Eigenfunktionssystem besitzen!
- e) In welcher Beziehung zueinander stehen die Eigenwerte von L, L^{-1} und L^\dagger ?
- f) Zeige, dass die Eigenwerte eines unitären Operators den Betrag 1 haben!