Blatt 4 Abgabe: **Dienstag, 30.04.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 10 *Qualitative Überlegungen*

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens des Potentials lassen sich schon qualitative Aussagen über die Zustände machen.

a) Die zeitunabhängigen Wellenfunktionen, d.h. die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger Gleichung,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\Big[E - V(x)\Big]\psi(x) = 0 \, ,$$

sind entweder gebundene oder ungebundene Zustände, je nachdem ob sie für $x \to \pm\infty$ verschwinden oder beschränkt sind. Nehmen Sie an, dass $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = V_\pm$ existiert und dass $V_+ < V_-$. Entscheiden Sie, ob ein Zustand mit der Energie E gebunden ist oder nicht, wenn (1) $E > V_-$, (2) $V_- > E > V_+$ bzw. (3) $V_+ > E$ ist.

b) Das Oszillationstheorem besagt dass wenn die diskreten Eigenwerte einer eindimensionalen Schrödinger Gleichung ihrer Größe nach wie folgt angeordnet werden,

$$E_1 < E_2 < \ldots < E_n < \ldots \, ,$$

die dazugehörigen Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ nach der Anzahl ihrer Nullstellen geordnet sind. Die n-te Eigenfunktion hat dabei $n-1$ Nullstellen. Zeigen Sie, dass zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Nullstellen der n-ten Eigenfunktion die $(n+1)$-te Eigenfunktion mindestens eine Nullstelle hat.

<u>Hinweis:</u> Berechnen Sie dazu $\psi'_n\psi_{n+1} - \psi'_{n+1}\psi_n|_\alpha^\beta$ in einem geeigneten Intervall $[\alpha, \beta]$.

Aufgabe 11 *Eichtransformationen und Observable*

Die Schrödinger-Gleichung ist invariant unter Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi(\boldsymbol{r}, t) \\ \phi &\to \phi' = \phi \\ \Psi &\to \Psi' = e^{\mathrm{i}(q/\hbar c)\chi(\boldsymbol{r},t)}\Psi \end{aligned}$$

statischer elektromagnetischer Felder. Neben der Schrödinger-Gleichnug müssen auch die Observablen $O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi)$ eichinvariant sein. Das bedeutet, dass bei einer Eichtransformation

$$O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi) \to O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}', \phi')$$

die Matrixelemente der Observable

$$(\Psi, O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi)\Phi) = (\Psi', O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}', \phi')\Phi').$$

invariant bleiben. Die linke Seite kann dargestellt werden als

$$(\Psi, O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi)\Phi) = (\Psi', O'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi)\Phi') \, ,$$

wobei $O'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi) = e^{\mathrm{i}(q/\hbar c)\chi} O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi) e^{-\mathrm{i}(q/\hbar c)\chi}$ die unitäre Transformation des Operators $O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi)$ ist. Zeigen Sie, dass $O'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi) = O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}', \phi')$ gilt dann und nur dann, wenn

$$O(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \phi) = O(\boldsymbol{p} - (q/c)\boldsymbol{A}, \phi) \, .$$

Aufgabe 12 *Die Legende von Paul und Paula*

Paul experimentiert in seinem Labor an einem System, das sich mittels der freien Schrödinger-Gleichung durch eine Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschreiben lässt. In seinen Experimenten beobachtet er die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsstrom $j(x,t)$.

Bei jedem Experiment geht vor dem Fenster des Labors Pauls Kollegin Paula mit konstanter (und, für die Dauer der Quantenmechanik I, ziemlich niedriger) Geschwindigkeit v vorbei. Sie beobachtet folglich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{\varrho}(x,t) = \varrho(x+vt,t)$. Daraus schließt Paula, dass aus ihrer Sicht das System in Pauls Labor durch eine Wellenfunktion

$$\tilde{\psi}(x,t) = e^{\mathrm{i}\varphi(x,t)}\,\psi(x+vt,t)$$

beschrieben wird, ist sich aber über die Phase $\varphi(x,t)$ noch unsicher.

(a) Bestimmen Sie $\varphi(x,t)$ so, dass auch Paulas Wellenfunktion $\tilde{\psi}(x,t)$ die freie Schrödinger-Gleichung löst!

(b) Berechnen Sie aus $\tilde{\psi}(x,t)$ den Wahrscheinlichkeitsstrom $\tilde{\jmath}(x,t)$, den Paula beobachtet, und überprüfen Sie explizit die Kontinuitätsgleichung.

Diskussion: Welches fundamentale Prinzip bestätigen Sie mit der Lösung dieser Aufgabe?