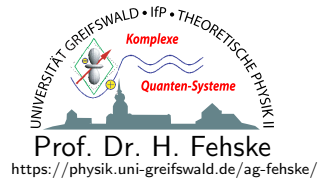




Übungen zur Theoretischen Physik 3

Quantenmechanik

SS 2019



Prof. Dr. H. Fehske

<https://physik.uni-greifswald.de/ag-fehske/>

Blatt 4

Abgabe: **Dienstag, 30.04.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 10 *Qualitative Überlegungen*

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens des Potentials lassen sich schon qualitative Aussagen über die Zustände machen.

- a) Die zeitunabhängigen Wellenfunktionen, d.h. die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger Gleichung,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 ,$$

sind entweder gebundene oder ungebundene Zustände, je nachdem ob sie für $x \rightarrow \pm\infty$ verschwinden oder beschränkt sind. Nehmen Sie an, dass $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = V_{\pm}$ existiert und dass $V_+ < V_-$. Entscheiden Sie, ob ein Zustand mit der Energie E gebunden ist oder nicht, wenn (1) $E > V_-$, (2) $V_- > E > V_+$ bzw. (3) $V_+ > E$ ist.

- b) Das Oszillationstheorem besagt dass wenn die diskreten Eigenwerte einer eindimensionalen Schrödinger Gleichung ihrer Größe nach wie folgt angeordnet werden,

$$E_1 < E_2 < \dots < E_n < \dots ,$$

die dazugehörigen Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ nach der Anzahl ihrer Nullstellen geordnet sind. Die n -te Eigenfunktion hat dabei $n - 1$ Nullstellen. Zeigen Sie, dass zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Nullstellen der n -ten Eigenfunktion die $(n + 1)$ -te Eigenfunktion mindestens eine Nullstelle hat.

Hinweis: Berechnen Sie dazu $\psi'_n \psi_{n+1} - \psi'_{n+1} \psi_n |_{\alpha}^{\beta}$ in einem geeigneten Intervall $[\alpha, \beta]$.

Aufgabe 11 *Eichtransformationen und Observable*

Die Schrödinger-Gleichung ist invariant unter Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi \\ \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{i(q/\hbar c)\chi(\mathbf{r}, t)} \Psi \end{aligned}$$

statischer elektromagnetischer Felder. Neben der Schrödinger-Gleichung müssen auch die Observablen $O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi)$ eichinvariant sein. Das bedeutet, dass bei einer Eichtransformation

$$O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi) \rightarrow O(\mathbf{p}, \mathbf{A}', \phi')$$

die Matrixelemente der Observable

$$(\Psi, O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi)\Phi) = (\Psi', O(\mathbf{p}, \mathbf{A}', \phi')\Phi').$$

invariant bleiben. Die linke Seite kann dargestellt werden als

$$(\Psi, O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi)\Phi) = (\Psi', O'(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi)\Phi'),$$

wobei $O'(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi) = e^{i(q/\hbar c)\chi} O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi) e^{-i(q/\hbar c)\chi}$ die unitäre Transformation des Operators $O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi)$ ist. Zeigen Sie, dass $O'(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi) = O(\mathbf{p}, \mathbf{A}', \phi')$ gilt dann und nur dann, wenn

$$O(\mathbf{p}, \mathbf{A}, \phi) = O(\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}, \phi).$$

Aufgabe 12 *Die Legende von Paul und Paula*

Paul experimentiert in seinem Labor an einem System, das sich mittels der freien Schrödinger-Gleichung durch eine Wellenfunktion $\psi(x, t)$ beschreiben lässt. In seinen Experimenten beobachtet er die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsstrom $j(x, t)$.

Bei jedem Experiment geht vor dem Fenster des Labors Pauls Kollegin Paula mit konstanter (und, für die Dauer der Quantenmechanik I, ziemlich niedriger) Geschwindigkeit v vorbei. Sie beobachtet folglich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{\varrho}(x, t) = \varrho(x + vt, t)$. Daraus schließt Paula, dass aus ihrer Sicht das System in Pauls Labor durch eine Wellenfunktion

$$\tilde{\psi}(x, t) = e^{i\varphi(x, t)} \psi(x + vt, t)$$

beschrieben wird, ist sich aber über die Phase $\varphi(x, t)$ noch unsicher.

- (a) Bestimmen Sie $\varphi(x, t)$ so, dass auch Paulas Wellenfunktion $\tilde{\psi}(x, t)$ die freie Schrödinger-Gleichung löst!
- (b) Berechnen Sie aus $\tilde{\psi}(x, t)$ den Wahrscheinlichkeitsstrom $\tilde{j}(x, t)$, den Paula beobachtet, und überprüfen Sie explizit die Kontinuitätsgleichung.

Diskussion: Welches fundamentale Prinzip bestätigen Sie mit der Lösung dieser Aufgabe?