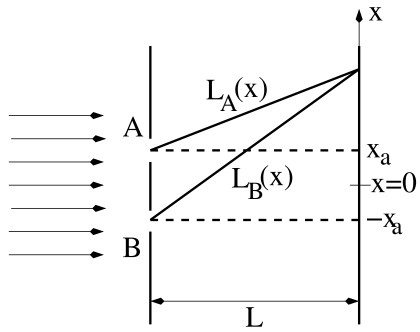
Blatt 2 Abgabe: **Dienstag, 16.04.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 4 *Doppelspaltexperiment*

Betrachte folgendes Doppelspaltexperiment:



Von links falle ein Teilchenstrahl auf den Doppelspalt ein. Ist nur Spalt A (B) geöffnet, nehmen wir folgende Intensitätsverteilung auf dem Schirm im Abstand L an:

$$Z_A = \frac{1}{2R}\exp[-|x-x_a|/R]\ \left(Z_B = \frac{1}{2R}\exp[-|x+x_a|/R]\right).$$

Öffnet man beide Spalte, so sieht man auf dem Schirm nicht die Summe beider Intensitäten sondern ein Interferenzmuster.

a) Die Wellenfunktion der am Spalt A (B) gestreuten Teilchen hat auf dem Schirm folgende Form:

$$\Psi_{A,B}(x) = \sqrt{Z_{A,B}(x)}\exp[iL_{A,B}(x)k]\ .$$

Berechnen Sie $|\Psi_A(x)+\Psi_B(x)|^2$ für $x, x_A \ll L$ und skizzieren Sie das Ergebnis.

b) Um $|\Psi_A(x)+\Psi_B(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeit interpretieren zu können, müssen Sie die Gesamtwellenfunktion $\Psi_A+\Psi_B$ normieren. Was ergibt sich für

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|\Psi_A(x)+\Psi_B(x)|^2\ \ ?$$

Verwenden Sie für $\Psi_A+\Psi_B$ das Näherungsergebnis aus a).

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Intervall $[-dx/2, dx/2]$ mit $dx \ll x_a$ zu finden? Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, wenn keine Interferenz aufträte? Diskutieren Sie die Abhängigkeit von k.

Aufgabe 5 *Freies Teilchen in einer Dimension*

In einer Dimension ist ein Teilchen der Masse m in dem Grundzustand eines Potentials, das es auf eine kleine Raumregion beschränkt. Bei $t = 0$ verschwindet das Potential plötzlich, so dass das Teilchen frei für die Zeit $t > 0$ ist.

a) Sei $\psi_0(x)$ die Wellenfunktion bei $t = 0$. Berechnen Sie die Wellenfunktion für $t > 0$

$$\psi(x,t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\hat{p}^2 t}{2m\hbar}\right)\psi_0(x)\,, \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

und zeigen Sie

$$\psi(x,t) = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}(x'-x)^2\frac{m}{2\hbar t}\right]\psi_0(x')dx'\,. \tag{1}$$

b) Betrachten Sie das Teilchen als ein Gaußsches Wellenpaket mit Dimension a

$$\psi_0(x) = (\pi a^2)^{-1/4}\exp(-x^2/2a^2)\,. \tag{2}$$

Setzen Sie die Gl. (2) in die Gl. (1) ein und berechnen Sie die Stromdichte $j = \mathrm{Re}\left(\psi^* \frac{p_x}{m}\psi\right)$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass das Teilchen bei der Zeit t einen im Abstand L befindenden Betrachter erreicht.

Aufgabe 6 *Teilchen im Potentialkasten*

In einer Dimension betrachten wir ein freies Teilchen im Potentialkasten

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & (x \leq 0, L \leq x) \end{cases}\,. \tag{3}$$

Der Hamilton-Operator lautet

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\,. \tag{4}$$

Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung und bestimmen Sie die möglichen Energieeigenwerte und die dazugehörigen Wellenfunktionen.