Blatt 1 Abgabe: **Dienstag, 9.04.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 1 *Wellenpaket mit Dispersion*

Gegeben sei ein Gaußsches Wellenpaket

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\, dk \quad , \tag{1}$$

wobei

$$c(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2} \quad (\alpha > 0) \quad , \tag{2}$$

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad . \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie $\Psi(x,t)$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form

$$\Psi(x,t) = a(x,t) e^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)}$$

mit komplexwertiger Amplitude $a(x,t)$ und der Bezeichnung $\omega_0 = \omega(k_0)$. Berechnen Sie sodann $|\Psi(x,t)|^2$ und diskutieren Sie kurz das Zeitverhalten dieser Größe.

(b) Bestimmen Sie Δk und Δx, wobei die Standardabweichung $\Delta\xi$ einer Größe ξ definiert ist als

$$\Delta\xi = \sqrt{\left\langle \left(\xi - \langle\xi\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\langle\xi^2\rangle - \langle\xi\rangle^2} \quad . \tag{4}$$

Zeigen Sie dann die Unschärferelation

$$\Delta x \Delta k \begin{cases} = \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ > \frac{1}{2} & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad . \tag{5}$$

(c) Für welche Zeiten $t \geq t_0$ wird die Ortsunschärfe Δx des obigen Wellenpaketes $\Psi(x,t)$ "wesentlich", d. h. $\Delta x(t_0) = \sqrt{2}\Delta x(0)$? Geben Sie für ein Elektron und für eine Kugel der Masse 1 g Zahlenwerte für t_0 an. Berechnen Sie außerdem für ein Elektron der kinetischen Energie 1 keV die Ortsunschärfe nach einer Laufstrecke von 1 m. In allen Fällen betrage die Anfangsunschärfe $\Delta x(0) = 10^{-10}$ m.

Hinweise:

zu a) Substituieren Sie $\kappa := k - k_0$. Bringen Sie dann die Amplitude durch Verwendung von

$$A = \alpha - \frac{\mathrm{i}\hbar t}{2m} \quad , \quad v_0 = \frac{\hbar k_0}{m} \quad , \quad B = x - v_0 t \tag{6}$$

in die Form

$$a(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\kappa B) \exp(-\kappa^2 A)\, d\kappa \quad . \tag{7}$$

Quadratische Ergänzung erlaubt die Auswertung des Integrals mittels der Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z(s+\mathrm{i}\delta)^2)\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \qquad \text{für} \quad \mathcal{R}e\{z\} > 0, \quad \delta = \text{const.} \tag{8}$$

zu b) Der Erwartungswert $\langle x^m \rangle$ des m-ten Moments x^m berechnet sich gemäß

$$\langle x^m \rangle = \frac{1}{N_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x^m \Psi(x) \, dx \quad . \tag{9}$$

Der Normierungsfaktor N_x ist die Norm der Wellenfunktion $\int \Psi^*(x)\Psi(x)\,dx$. (Vorsicht, hier ungleich 1!) Die Berechnung von $\langle k^m \rangle$ führt man am besten im k-Raum aus, wo mit der Norm im k-Raum $N_k = \int (c(k))^2 \, dk$ gilt:

$$\langle k^m \rangle = \frac{1}{N_k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2(k) k^m \, dk \quad . \tag{10}$$

zu c) Die Zeitentwicklung der Ortsunschärfe ergibt sich nach Aufgabe b) als

$$\Delta x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\hbar^2 t^2}{4\alpha m^2}} \quad . \tag{11}$$

Aufgabe 2 *Planck-Verteilung*

(a) Diskutieren Sie die Änderung des klassischen Gleichverteilungssatzes ausgehend von der Planck-Verteilung

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{(h\nu/k_B T)} - 1} \, . \tag{12}$$

(b) Zeigen Sie, daß durch Gleichung (12) die UV-Katastrophe des Schwarz-Körper-Strahlers beseitigt wird. Leiten Sie dazu den Stefan-Boltzmann Ausdruck $u(T) = aT^4$ für die gesamte Strahlungsenergie pro Volumeneinheit ab.

Aufgabe 3 *Korrespondenzprinzip*

Zeigen Sie, daß sich für große Quantenzahlen n der klassische Limes als Grenzfall der quantenmechanischen Beschreibung ergibt. Vergleichen Sie dazu die Übergangsfrequenz eines Elektrons zwischen den Niveaus $n+1 \to n$ eines Atoms der Kernladung Ze mit der klassischen Umlauffrequenz auf der n-ten Kreisbahn.