Weihnachtsblatt

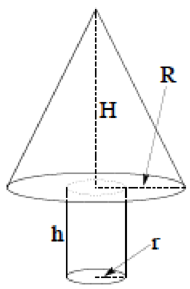
Abgabe: Donnerstag 10. Januar 2019

Vorrede: Den angehenden Physikern wünschen wir frohe Weihnachten und ein gutes 2018! Damit der Geist an Weihnachten nicht träge wird, nun ein paar Aufgaben zur Abwechslung und Aufmunterung! Diese Aufgaben können gerne auch im Familien- und Freundeskreis besprochen werden! Punkte werden grundsätzlich als Zusatzpunkte bewertet!

Aufgabe W1 (Ein Weihnachtsbaum) *(4 Punkte)*

Zur endgültigen Zerrüttung des weihnachtlichen Familienglücks trägt, wie konnte es anders sein, Herr Statler bei. Der hat den brillanten Einfall, den ewig schief stehenden Waldorfschen Weihnachtsbaum dieses Jahr auf der Spitze aufzustellen. Der Weihnachtsbaum besteht aus einem zylindrischen Stück (Radius r, Höhe h), dem Stamm, und einem kegelförmigen Stück (Radius R, Höhe H), dem Geäst. Da echte Weihnachtsbäume reichlich Nadeln besitzen, haben beide Stücke gleiche Massendichte ρ

Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes des Weihnachtsbaumes, sowie das Trägheitsmoment bei Rotation um die Symmetrieachse.

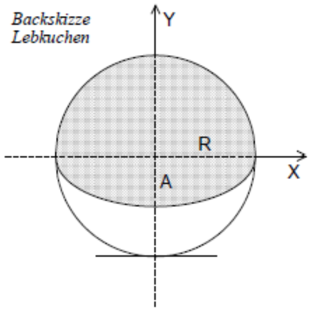


Aufgabe W2 (Ein Lebkuchen) *(6 Punkte)*

Um seinen Enkel zu versöhnen, backt Herr Waldorf seinen leckeren Mond-Lebkuchen.

Der Lebkuchen, recht flach, weswegen hier zweidimensional betrachtet, besteht aus einem kreisrunden Stück dunkelbraunen Teigs (Radius R, Massendichte ρ_L), welches teilweise mit weißer Schokolade verziert ist. Um die Mondphasen darzustellen, bedeckt die weiße Schokolade (Massendichte ρ_S) das Teiggebiet zwischen dem unteren Halbkreis und der durch $y = A\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$ gegebenen Halbellipse.Für $A = R$ ist Vollmond, für $A = -R$ ist Neumond.

Berechnen Sie die Gesamtmasse m des Mond-Lebkuchens, den Abstand r des Schwerpunkts zum Lebkuchenmittelpunkt, und das Trägheitsmoment J bei Rotation um den Schwerpunkt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für Voll- und Neumond!



Aufgabe W3 (Bald nun ist Weihnachtszeit) *(6 Punkte)*

Die um einen Christbaum spiralig gewickelte LED-Schlange wird in guter Näherung durch die Kurve

$$\vec{r}(\varphi) = (R\frac{\varphi}{8\pi}\cos\varphi, R\frac{\varphi}{8\pi}\sin\varphi, h(1 - \frac{\varphi}{8\pi}))$$

beschrieben, wobei φ von 0 bis 8π läuft (mit $R = 1m$ und $h = 2m$).

a) Skizzieren Sie den Verlauf der LED-Schlange.

b) Berechnen Sie das begleitende Dreibein zur LED-Schlangenkurve in der Christbaumspitze.

c) Im Angebot kostet 1m LED-Schlange 9,98 Euro . Wie viel kostet die LED-Schlangendekoration eines Christbaumes?

Aufgabe W4 (Geißler's Weihnachtsgeschenk) *(4 Punkte)*

Eine Ameise befindet sich am Anfang eines Gummibandes der Länge l, welches mit der Geschwindigkeit u in die Länge gezogen wird. Die Ameise krabbelt mit der Geschwindigkeit v auf dem Gummiband nach vorne. Wann erreicht die Ameise das Ende des Gummibandes?

Aufgabe W5 (Ein konservative Sache) *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{zx}{r^3}\vec{e}_x - \frac{zy}{r^3}\vec{e}_y + \frac{x^2+y^2}{r^3}\vec{e}_z$$

mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ konservativ ist, sowohl durch die Berechnung der Rotation des Feldes $\vec{A}(\vec{r})$ sowie durch die Berechnung des zugehörigen Potentials $\Phi(\vec{r})$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathbb{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ von $A = (1, 1, 1)$ nach $B = (2, 2, 2)$ entlang der kürzesten Verbindung.