PD. Dr. F.X. Bronold
http://theorie2.physik.uni-greifswald.de

Übungsblatt 3 Abgabe: Donnerstag 10. November 2017

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*

a) Beweisen Sie die Leibniz-Regel

$$(g(x)h(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion.
b) Berechnen Sie die hundertste (100.) Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \sin(2x)$.

Aufgabe 8 *(4 Punkte)*

Gegeben ist die Funktion $F(x, y) = (x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0$ in impliziter Form. Bestimmen Sie die Ableitung in folgenden Punkten $(2a, 0)$ und $(0, a)$ mit Hilfe der impliziten Differentiation.
Zeigen Sie, dass die durch $F(x, y) = 0$ bestimmte Kurve eine Kardioide mit $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ ist.

Aufgabe 9 *(4 Punkte)*

Die Taylorentwicklung einer Funktion zweier Variabler x, y, um den Entwicklungspunkt x_0, y_0 lautet bis zur zweiten Ordnung:

$$f(x,y)|_{x_0,y_0} = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)$$

a) Berechnen Sie die Entwicklung von $f(x, y) = x^2\cos(y - x^2)$ um den Punkt $(x, y) = (1, 1)$ bis zur 2. Ordnung.

b) Berechnen Sie die Entwicklung von $f(x, y) = e^x \cos y$ um den Punkt $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$ bis zur 2. Ordnung.

Aufgabe 10 *(2 Punkte)*

Es sei folgende Funktion gegeben

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 > 0.$$

Zeigen Sie, dass die LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

erfüllt ist.