

Tabelle 7.1 Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms für $n = 1, 2$ und 3 . $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,053 \text{ nm}$ ist der Radius der innersten Bohrschen Bahn

n	l	m_l	$\Phi(\phi)$	$\Theta(\theta)$	$R(r)$	$\psi(r, \theta, \phi)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2} a_0^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi} a_0^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
2	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$	$\frac{1}{2\sqrt{6} a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi} a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta$
2	1	± 1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$	$\frac{1}{2\sqrt{6} a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{8\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
3	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{81\sqrt{3} a_0^{3/2}} \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi} a_0^{3/2}} \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$
3	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$	$\frac{4}{81\sqrt{6} a_0^{3/2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \cos \theta$
3	1	± 1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$	$\frac{4}{81\sqrt{6} a_0^{3/2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{81\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
3	2	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{10}}{4} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\frac{4}{81\sqrt{30} a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi} a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} (3 \cos^2 \theta - 1)$
3	2	± 1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$	$\frac{\sqrt{15}}{2} \sin \theta \cos \theta$	$\frac{4}{81\sqrt{30} a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{81\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$
3	2	± 2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm 2i\phi}$	$\frac{\sqrt{15}}{4} \sin^2 \theta$	$\frac{4}{81\sqrt{30} a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{162\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$

Diese Gleichung betrifft nur die radiale Bewegung des Elektrons; trotzdem steht in dieser Gleichung E , die Gesamtenergie des Elektrons. E enthält die kinetische Energie der Bahnbewegung, die nichts mit der Radialbewegung zu tun haben sollte. Dieser Widerspruch kann auf folgende Weise gelöst werden: Die kinetische Energie E_k besteht aus zwei Teilen, $E_{k_{\text{rad}}}$ für die Bewegung in Richtung zum Kern und $E_{k_{\text{orb}}}$ für die Elektronenbewegung um den Kern. Die potentielle Energie E_p des Elektrons ist die elektrostatische Energie

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Daher setzt sich die Gesamtenergie des Elektrons in folgender Weise zusammen:

$$E = E_{k_{\text{rad}}} + E_{k_{\text{orb}}} + E_p$$

$$= E_{k_{\text{rad}}} + E_{k_{\text{orb}}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Wenn wir diesen Ausdruck für E in Gl. (7.14) einsetzen, erhalten wir nach einer geringfügigen Umordnung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{k_{\text{rad}}} + E_{k_{\text{orb}}} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R = 0. \quad (7.19)$$

Wenn die beiden letzten Terme in der eckigen Klammer dieser Gleichung einander aufheben, haben wir, was wir wollen: eine Differentialgleichung für $R(r)$, die nur Funktionen des Radius r enthält. Wir fordern daher

$$E_{k_{\text{orb}}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}. \quad (7.20)$$

Die kinetische Energie der Bahnbewegung des Elektrons ist

$$E_{k_{\text{orb}}} = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2.$$

Da der Drehimpuls L des Elektrons

$$L = m v_{\text{orb}} r$$

beträgt, können wir für die kinetische Energie der Bahnbewegung

$$E_{k_{\text{orb}}} = \frac{L^2}{2mr^2}$$

schreiben. Daher erhalten wir aus Gl. (7.20)

$$\frac{L^2}{2mr^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (7.21)$$

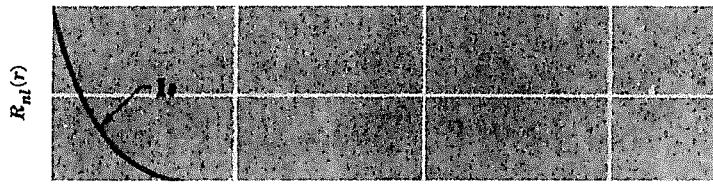
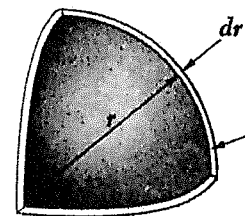
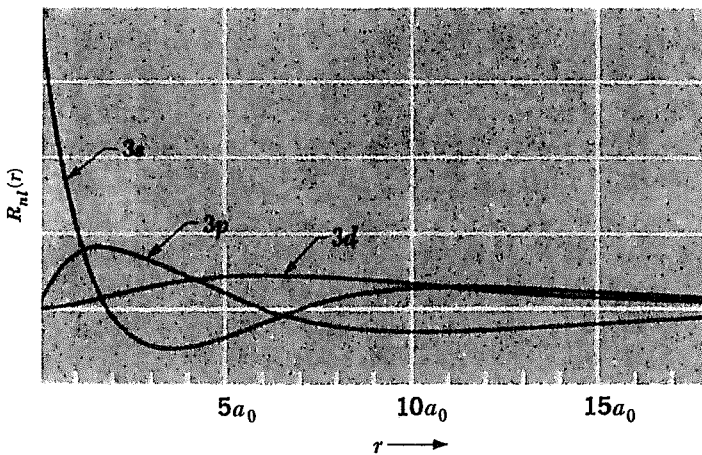
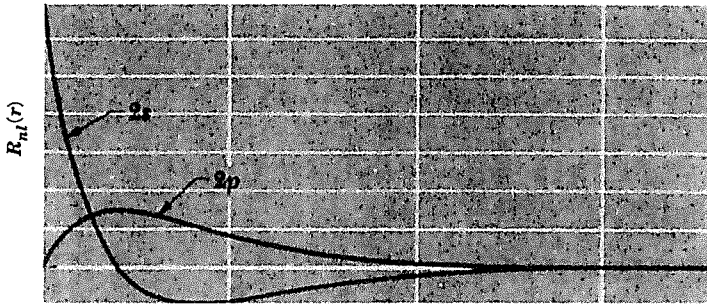


Bild 7.10

Radiale Wellenfunktionen des Elektrons im Wasserstoffatom für verschiedene Quantenzustände als Funktion des Abstands vom Kern. Die Größe $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,053 \text{ nm}$ ist der Radius der ersten Bohrschen Bahn.



Volumen der
Kugelschale

$$= dV \\ = 4\pi r^2 dr$$

Bild 7.11 Volumen einer Kugelschale

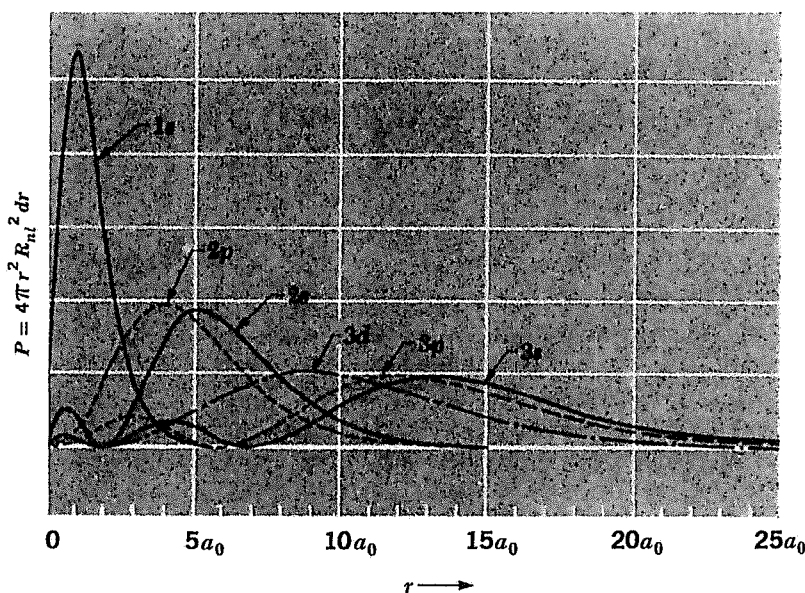


Bild 7.12

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Wasserstoffatom im Abstand zwischen r und $r + dr$ vom Kern anzutreffen, für die Quantenzustände aus Bild 7.10.