Blatt 12 Abgabe: **Mittwoch, 23.01.19** vor der Vorlesung

Aufgabe 25 *Bogoliubov Transformation*

Ein quantenmechanisches System wird durch den Hamilton Operator

$$H = \epsilon(c_0^\dagger c_0 + c_1^\dagger c_1) - (\Delta c_0^\dagger c_1^\dagger + \Delta^* c_1 c_0)$$

beschrieben, wobei c_i und $c_i^\dagger$ $(i = 0, 1)$ Fermi Operatoren sind.

a) Wie lauten die Vertauschungsregeln für die Operatoren c_i und $c_i^\dagger$ $(i = 0, 1)$?

b) Zeigen Sie, dass die durch die Transformation

$$c_0 = u^*\gamma_0 + v\gamma_1^\dagger \quad , \quad c_1^\dagger = -v^*\gamma_0 + u\gamma_1^\dagger \quad , \quad |u|^2 + |v|^2 = 1$$

definierten Operatoren γ_i und $\gamma_i^\dagger$ auch Fermi Charakter tragen.

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten u und v der Transformation so, dass der Hamilton Operator H diagonalisiert, d.h. in die Form

$$H = E_0\gamma_0^\dagger\gamma_0 + E_1\gamma_1^\dagger\gamma_1$$

gebracht wird. Geben Sie die Energieeigenwerte E_0 und E_1 als Funktion der Parameter ϵ und Δ an.

Aufgabe 26 *Wigner-Kristall*

Nach einer Vorhersage von Wigner soll ein Elektronengas bei tiefen Temperaturen und hinreichend niedrigen Dichten einen Phasenübergang in eine kristalline Struktur (bcc) durchführen. Betrachten Sie in einer qualitativen Analyse die Energie eines Gitters von Elektronen in einem homogenen Hintergrund positiver Ladung. Nehmen Sie an, dass das Potential, in dem sich jedes Elektron bewegt, durch das Potential einer das Elektron umgebenden Kugel homogener positiven Ladung mit Radius r_s angenähert werden kann. Dabei ist r_s der mittlere Teilchenabstand im Wigner-Kristall mit der Elektronendichte n, d.h. $\frac{4\pi}{3}r_s^3 = \frac{1}{n}$. Dies führt auf ein Modell unabhängiger Elektronen (Einstein-Näherung) in einem Oszillator-Potential

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{2r_s^3}r^2 - \frac{3e^2}{2r_s} + \frac{3e^2}{5r_s}.$$

Bestimmen Sie die Nullpunktsenergie E_0 dieses dreidimensionalen harmonischen Oszillators und vergleichen Sie das so erhaltene Resultat mit dem aus der Literatur bekannten Resultat

$$E_0 = \frac{e^2}{2a_0}\left\{-\frac{1.792}{r_s/a_0} + \frac{2.638}{(r_s/a_0)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Bestimmen Sie durch Minimierung der Nullpunktsenergie den mittleren Abstand der Elektronen.

Aufgabe 27 *Elektronengas* (freiwillig)

Betrachten Sie das freie dreidimensionale Elektronengas. Am absoluten Nullpunkt sind alle Zustände zwischen dem tiefstmöglichen Niveau und der Fermi-Energie $E_{\rm F}$ voll besetzt, darüber keiner, d.h. $|\phi_0\rangle = \Pi_{|\boldsymbol{k}|\leq k_{\rm F}}\Pi_\sigma \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}|0\rangle$. Die Besetzungszahloperator ist gegeben durch $\hat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{c}_{\boldsymbol{k},\sigma}$.

a) Berechnen Sie die Gesamtteilchenzahl

$$N = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \langle\phi_0|\hat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}|\phi_0\rangle$$

mit Hilfe von $\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k}) \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k f(\boldsymbol{k})$ und zeigen Sie, dass die mittlere Teilchendichte $n = N/V = k_{\rm F}^3/3\pi^2$ ist.

Jetzt führen wir die Bogoliubov-Transformation auf die neuen Quasiteilchenoperatoren

$$\hat{\alpha}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} = u_{\boldsymbol{k}}\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} + v_{-\boldsymbol{k}}\hat{c}_{-\boldsymbol{k},-\sigma} \tag{1}$$

$$\hat{\alpha}_{\boldsymbol{k},\sigma} = u_{\boldsymbol{k}}\hat{c}_{\boldsymbol{k},\sigma} + v_{-\boldsymbol{k}}\hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k},-\sigma} \tag{2}$$

durch, wobei

$$u_{\boldsymbol{k}} = 1\,, \quad v_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \quad \text{für } |\boldsymbol{k}| > k_{\rm F}\,, \tag{3}$$

$$u_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \quad v_{\boldsymbol{k}} = 1\,, \quad \text{für } |\boldsymbol{k}| \leq k_{\rm F}\,. \tag{4}$$

Um die Vertauschungsrelationen für Fermionen zu erfüllen fordern wir:

$$u_{\boldsymbol{k}}^2 + v_{\boldsymbol{k}}^2 = 1\,, \quad u_{\boldsymbol{k}} = u_{-\boldsymbol{k}}\,, \quad v_{\boldsymbol{k}} = -v_{-\boldsymbol{k}}\,. \tag{5}$$

b) Leiten Sie die inverse Transformation ab, so dass $\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}$ und $\hat{c}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ durch Quasiteilchenoperatoren beschrieben werden.

c) Drücken Sie $\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{c}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ durch Quasiteilchenoperatoren aus.

d) Zeigen Sie mit dem Ergebnis vom Teil (c) und den Bedingungen (3) und (4), dass sich der Hamilton-Operator $\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} E(\boldsymbol{k})\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{c}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ wie folgt umschreiben lässt:

$$\hat{H} - E_{\rm F}\hat{N} = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma}\epsilon(\boldsymbol{k})\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{c}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sum_{|\boldsymbol{k}|\leq k_{\rm F},\sigma}\epsilon(\boldsymbol{k}) + \sum_{\boldsymbol{k},\sigma}|\epsilon(\boldsymbol{k})|\hat{\alpha}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{\alpha}_{\boldsymbol{k},\sigma}\,.$$