Blatt 9 Abgabe: **Mittwoch, 19.12.18** vor der Vorlesung

Aufgabe 19 *System identischer Teilchen*

In der Quantenmechanik wird ein System aus N identischen Teilchen durch einen Zustandsvektor $|\Psi_N\rangle \in \mathcal{H}_N = \otimes_{n=0}^{N}\mathcal{H}^{(n)}$ beschrieben, dessen Ortsdarstellung gegeben ist durch

$$\Psi_N(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_2) = \big(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N|\Psi_N\rangle \ .$$

Ausgehend von einer orthonormierten Basis $|\alpha\rangle$ des (Einteilchen-)Hilbert Raumes $\mathcal{H}$ läßt sich eine kanonische Basis,

$$|\alpha_1, ..., \alpha_N\big) = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes ... \otimes |\alpha_N\rangle \ ,$$

des N-Teilchen Hilbert Raums $\mathcal{H}_N$ konstruieren, die orthogonal und vollständig ist, d.h. für die folgende Relationen gelten:

$$\big(\alpha_1, ..., \alpha_N|\alpha'_1, ..., \alpha'_N\big) = \prod_{i=1}^{N} \delta_{\alpha_i,\alpha'_i} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha_1,...,\alpha_N} |\alpha_1, ..., \alpha_N\big)\big(\alpha_1, ..., \alpha_N| \ = 1 \ .$$

Für einen beliebigen N-Teilchenzustand gilt dann

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_N} C_{\alpha_1,...,\alpha_N}|\alpha_1, ..., \alpha_N\big)$$

bzw.

$$\Psi_N(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_2) = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_N} C_{\alpha_1,...,\alpha_N}\psi_{\alpha_1}(\vec{r}_1) \cdot \psi_{\alpha_2}(\vec{r}_2) \cdot ... \cdot \psi_{\alpha_N}(\vec{r}_N) \ .$$

In der Natur kommen allerdings nur bezüglich Teilchenpermutation symmetrische (Bosonen) bzw. anti-symmetrische (Fermionen) Zustände vor. Das ist zum einen ein empirischer Fakt und folgt zum anderen aus dem sogenannten Spin-Statistik Theorem. Definieren Sie

$$|\alpha_1, ..., \alpha_N\big\} = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P \zeta^P|\alpha_{P1}, ..., \alpha_{PN}\big) = \sqrt{N!}P_{\mathcal{F},\mathcal{B}}|\alpha_1, ..., \alpha_N\big)$$

mit $P_{\mathcal{B}}$ dem Symmetrisierungs- ($\zeta = 1$) und $P_{\mathcal{F}}$ dem Antisymmetrisierungsoperator ($\zeta = -1$). P ist die Parität der Permutation, d.h. die Anzahl der Vertauschungen, die nötig ist, um $P1, ..., PN$ nach $1, ..., N$ überzuführen.

a) Zeigen Sie, dass $P_{\mathcal{F},\mathcal{B}}$ ein Projektionsoperator also idempotent ist und drücken Sie die Vollständigkeit in $\mathcal{H}_N$ mit Hilfe der Zustände $|\alpha_1, ..., \alpha_N\big\}$ aus.

b) Normieren Sie die Zusände $|\alpha_1, ..., \alpha_N\big\}$ und nennen Sie die so erhaltenen Zustände $|\alpha_1, ..., \alpha_N\rangle$.

c) Berechnen Sie das Überlappintegral $\big(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N|\alpha_1, ..., \alpha_N\rangle$ und interpretieren Sie das Resultat. Was ergibt sich für das Skalarprodukt $\langle\beta_1, ..., \beta_N|\alpha_1, ..., \alpha_N\rangle$?

d) Betrachen Sie nun einen n-Teilchen Operator

$$R|\alpha_1, ..., \alpha_N\big) = \frac{1}{n!}\sum_{1\le i_1\ne i_2\ne ...\ne i_n\le N} R_{i_1,...,i_n}|\alpha_1, ..., \alpha_N\big)$$

und berechnen Sie das Matrixelement $\big(\beta_1, ..., \beta_N|R|\alpha_1, ..., \alpha_N\big)$.

Was ergibt sich für $\big(\beta_{P1}, ..., \beta_{PN}|R|\alpha_{P1}, ..., \alpha_{PN}\big)$?

Aufgabe 20 *N-Fermionen in einer Dimension*

Betrachten Sie ein System aus N spinlosen Fermionen der Masse m, die in einem harmonischen Oszillatorpotential $V(x) = kx^2/2$ eingeschlossen sind und über ein repulsives $\delta-$Potential miteinander wechselwirken. Die potentielle Energie des N-Teilchensystems ist also

$$V(x_1, ..., x_N) = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i \neq j} \delta(x_i - x_j) \quad \text{mit} \quad k, \lambda > 0 \ .$$

a) Stellen Sie die stationäre Schrödinger Gleichung auf und bestimmen Sie die drei niedrigsten Energieeigenwerte und deren Entartung. Benutzen Sie dazu die normierten Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators. Wieso lassen sich die Energieeigenwerte (und Zustände) dieses speziellen wechselwirkenden Systems exakt angeben?

   Hinweis: Betrachten Sie die Wechselwirkung zunächst als Störung und zeigen Sie dass wegen der Antisymmetrie der N-Teilchen Wellenfunktionen alle Matrixelemente der Störung verschwinden. Also ....

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ für die drei in a) bestimmten Zustände.

   Hinweis: Nehmen Sie das Virialtheorem zu Hilfe.