Blatt 6 Abgabe: **Mittwoch, 28.11.18** vor der Vorlesung

Aufgabe 11

Betrachten Sie die Dirac-Gleichung in einer Dimension

$$H\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} H &= c\alpha p_z + \beta mc^2 + V(z) = c\alpha(-\mathrm{i}\hbar\partial_z) + \beta mc^2 + V(z)\,, \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit H vertauscht.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass die eindimensionale Dirac-Gleichung als zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt werden kann.

Aufgabe 12

Prüfen Sie im Einzelnen, welche Wirkung die Transformation

$$\psi_c = \hat{C}\bar{\psi}^T = \mathrm{i}\gamma^2\psi^*$$

auf die Eigenfunktionen eines ruhenden Elektrons negativer Energie hat.

Aufgabe 13

Seien γ^μ und $\gamma^{\mu'}$ zwei durch eine unitäre Transformation $\hat{U}$ verbundene Darstellungen der γ-Matrizen:

$$\gamma^\mu = \hat{U}\gamma^{\mu'}\hat{U}^{-1}.$$

(a) Man zeige, dass

$$\hat{C}' = \hat{U}^{-1}\hat{C}(\hat{U}^T)^{-1},$$

wobei $\hat{C}$ und $\hat{C}'$ die entsprechenden Matrizen der Ladungskonjugationstransformation sind.

(b) Sind die Beziehungen

$$\hat{C} = -\hat{C}^{-1} = -\hat{C}^\dagger = -\hat{C}^T = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0$$

auch für $\hat{C}'$ gültig?

(c) In ähnlicher Weise befreie man auch

$$\hat{T}_0 = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^3$$

von der üblichen Darstellung der γ-Matrizen. Hierbei ist der Zeitumkehr-Operator durch die Gleichung

$$\psi_T(t') = \hat{T}_0\psi^*(t)$$

definiert, wobei $\psi_T(t')$ der Zeitumkehr-transformierte Spinor mit $t' = -t$ ist.