Blatt 2 Abgabe: **Mittwoch, 31.10.18** vor der Vorlesung

Aufgabe 3 *Pionische Atome*

Pionische Atome bestehen aus Systemen mit positiver Kernladung Ze und einem π^--Meson.

(a) Bestimmen Sie die stationären Lösungen (Energie E) der Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r})\right)^2 \Psi(\vec{r},t) = \left[\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla\right)^2 + m^2c^2\right]\Psi(\vec{r},t)$$

für das Coulomb-Potential $V(r) = -Ze^2/r$. Es gelte $Z\alpha < l + \frac{1}{2}$, wobei l die Drehimpulsquantenzahl und $\alpha = e^2/\hbar c$ die Feinstrukturkonstante ist.

Hinweis: Mit den Substitutionen $m' = E/c^2$, $l'(l'+1) = l(l+1) - (Z\alpha)^2$ und $2m'E' = E^2/c^2 - m^2c^2$ erhält man für den Radialanteil eine Differentialgleichung, die ähnlich ist zur Radialgleichung des nichtrelativistischen Wasserstoffatoms (Vorsicht: l' ist nicht ganzzahlig). Zeigen Sie, dass $E' = -m'c^2(Z\alpha)^2/(2n'^2)$ mit $n' = \nu + l' + 1$, ν ganzzahlig, und lösen Sie diese Beziehung nach der Energie E auf.

(b) Entwickeln Sie E für kleine $Z\alpha$ bis zur vierten Ordnung in $Z\alpha$.

(c) Was geschieht für $Z\alpha > l + \frac{1}{2}$?

Aufgabe 4 *γ-Matrizen*

Die γ-Matrizen (4×4) sind definiert durch $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$ mit $\operatorname{Tr}\gamma^\mu = 0$.

(a) Prüfen Sie diese Relation explizit für die Standarddarstellung $\gamma^0 = \hat{\beta}, \gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i$.

(b) Wir bilden aus den γ-Matrizen 16 linear unabhängige Matrizen Γ^n:

$$\Gamma^S = 1, \qquad \Gamma^V_\mu = \gamma_\mu, \qquad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- \quad (\mu \neq \nu),$$
$$\Gamma^P = \gamma_5 = \gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \qquad \Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu.$$

Zeigen Sie:

(i) $(\Gamma^n)^2 = \pm 1$.

(ii) Zu jedem Γ^n $(n \neq S)$ existiert ein Γ^m mit $[\Gamma^n, \Gamma^m]_+ = 0$.

(iii) $[\gamma^\mu, \gamma_5]_+ = 0$.

(iv) $[\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}]_- = 0$.

(v) Für $n \neq S$ gilt $\operatorname{Tr}\Gamma^n = 0$.

(vi) Zu jedem Paar Γ^n, Γ^m, $n \neq m$, gibt es ein $\Gamma^p \neq 1$, so dass $\Gamma^n\Gamma^m = \beta\Gamma^p$ mit $\beta = \pm 1, \pm \mathrm{i}$.

(vii) Die Matrizen Γ^n sind linear unabhängig.

(viii) Falls eine (4×4)-Matrix X mit jedem γ^μ kommutiert, dann ist $X \propto 1$.