Blatt 1 Abgabe: **Mittwoch, 24.10.18** vor der Vorlesung

Aufgabe 1 *Klein–Gordon-Gleichung I*

Die Klein–Gordon-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet

$$[\mathrm{i}\hbar\partial_t - e\phi(\boldsymbol{x},t)]^2\,\psi(\boldsymbol{x},t) = \left[(-\mathrm{i}\hbar c\nabla - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t))^2 + m^2c^4\right]\psi(\boldsymbol{x},t).$$

a) Lösen Sie die Klein–Gordon-Gleichung für ein freies Teilchen ($\phi = 0$, $\boldsymbol{A} = 0$), und bestimmen Sie die Dispersionsrelation $E(\boldsymbol{p})$.

b) Die Lagrangedichte $\rho(\boldsymbol{x},t)$ für ein freies Teilchen sei durch

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mathrm{i}e\hbar}{2mc^2}\left[\psi(\boldsymbol{x},t)\partial_t\psi^*(\boldsymbol{x},t) - \psi^*(\boldsymbol{x},t)\partial_t\psi(\boldsymbol{x},t)\right]$$

definiert. Wie müssen die Lagrangedichte $\rho(\boldsymbol{x},t)$ und die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld definiert werden, damit die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$ erfüllt ist? Warum lässt sich $\rho(\boldsymbol{x},t)$ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren?

Aufgabe 2 *Klein–Gordon-Gleichung II*

Zeigen Sie, dass man im nichtrelativistischen Grenzfall aus der relativistischen Klein–Gordon-Gleichung

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0$$

für freie Spin-0-Teilchen die Schrödinger-Gleichung erhält. Zerlegen Sie hierfür die Klein–Gordon-Gleichung in zwei Gleichungen erster Ordnung in der Zeitableitung durch Einführung der Linearkombinationen

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{\mathrm{i}\hbar}{mc^2}\dot{\varphi}\right), \quad \chi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\mathrm{i}\hbar}{mc^2}\dot{\varphi}\right).$$

Definiert man eine (formal) zweikomponentige Wellenfunktion $\psi = \binom{\vartheta}{\chi}$, so erhält man einen Hamiltonian H_0: $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_0\psi$.

(a) Ist H_0 hermitesch?

(b) Wir erwarten, dass gilt: $\psi \sim e^{-\mathrm{i}mc^2t/\hbar}$ mal eine Funktion, die langsam verglichen mit der Frequenz $mc^2/\hbar$ variiert. Dann ist $\vartheta \sim 1$, $\chi \sim 0$ (bis auf Terme $(v/c)^2$). Wie lautet die Gleichung für ϑ bis zur Ordnung p^4?

(c) Wir können direkt die Gleichungen für ϑ und χ entkoppeln mit Hilfe einer Transformation $\psi' = e^{\mathrm{i}S}\psi$ mit $S = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\tau(p)$. Bestimmen Sie $\tau(p)$, so dass im transformierten Hamiltonian H_0' die Zustände positiver und negativer Energien entkoppelt sind.

Erinnerung:

$$H_0' = e^{\mathrm{i}S}H_0e^{-\mathrm{i}S} = H_0 + \mathrm{i}[S,H_0] + \ldots + \frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\underbrace{[S,[S,\ldots,[S,H_0]]]}_{n-\mathrm{mal}} + \ldots$$