

Physik für Umweltwissenschaftler, Biologen und Humanbiologen

Dr. Jean-Pierre van Helden

Institut für Physik

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Leibniz-Institut für Plasmaforschung und Technologie e.V.
(INP Greifswald)

Übersicht der Vorlesung

Experimentalphysik I (UW) / Physik I (WS 2017/2018)

- Einleitung
- Mechanik
 - „Punktmechanik“, Mechanik des starren Körpers
 - Mechanik der Kontinua (Flüssigkeiten, Gase)
- Wärmelehre
 - Klassische Thermodynamik
 - Kinetische Gastheorie

Experimentalphysik II (UW) / Physik II (SS 2018)

- Elektrizität und Magnetismus
- Optik
- Atom- und Kernphysik

Beachte:

- Die Übergänge sind oft fließend. Beispiel: Schwingungen und Wellen kommen in der Akustik und bei „Elektrizität und Magnetismus“ vor
- Bei Erklärungen der Phänomene wird zwischen klassischer (makroskopischer) und mikroskopischer Beschreibung hin- und hergesprungen

Termine Vorlesungen / Übungen

Einzeltermine Di. 8:00-10:00

17.10.2017, 24.10.2017, 07.11.2017, 14.11.2017, 21.11.2017, 28.11.2017,
05.12.2017, 12.12.2017, 19.12.2017, 09.01.2018, 16.01.2018, 23.01.2018,
30.01.2018

Übungen für Umweltwissenschaftler

Herr Jacob Zalach

Jeden Mittwoch ab 18.10.2017 bis 31.01.2018,
12:00 -14:00 Hörsaal Physik

Übungen für Biologen und Humanbiologen

Herr Dr. Sebastian Nemschokmichal

Jeden Donnerstag, ab 19.10.2017 bis 01.02.2018,
15:00 – 16:30 Hörsaal Physik

Einleitung

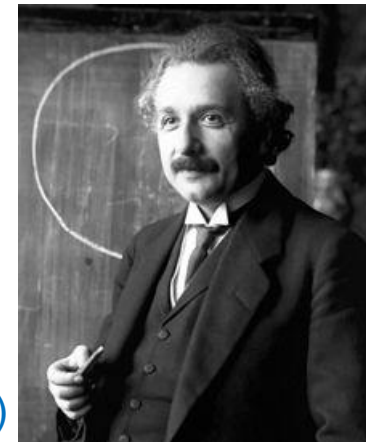
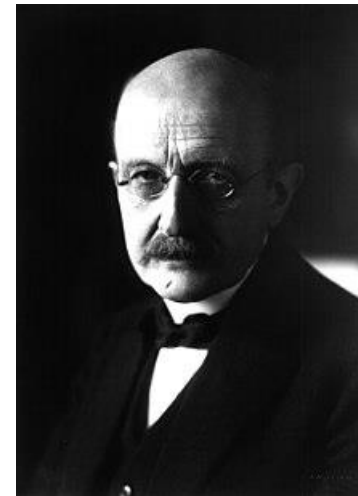
Physik, Versuch einer Definition

Physik ist die Wissenschaft vom **Aufbau** und der **Bewegung** der (unbelebten wie belebten) Materie, den **Kräften**, die die Bewegung hervorrufen, und den **Feldern**, die die Kraftwirkungen vermitteln

„Klassische Physik“

Beginn 1687: Erscheinung *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie)

- Mechanik
- Wärmelehre
- Elektrizitätslehre
- Optik
- ...



„Moderne Physik“

- Quantenphysik (1900: Max Planck)
- Spez. / allg. Relativitätstheorie (1905/1915: Albert Einstein)
- Atom- und Kernphysik

Fachbereiche der Physik

- Plasmaphysik
- Festkörperphysik
- Grenz- und Oberflächenphysik
- Astrophysik/Kosmologie
- Atomphysik
- Kernphysik
- Quantenoptik
- Halbleiterphysik
- Weiche Materie
- Medizinphysik
- Umweltphysik
- Biomedizinische Bildgebung
- Biophysik

- Und viele mehr....

Warum Physik für „Nicht-Physiker“?

Klassische Naturwissenschaften: Chemie, Physik, Biologie

Am Beispiel der Biologie:

Die Biologie war zu jeder Zeit eng verbunden mit physikalischen und chemischen und medizinische naturwissenschaftlichen Erscheinungen

Teil der allgemeine Lehre von der Natur.

Siehe z.B. im 19 Jhdt.:

H. von Helmholtz (1821-1894)

J.L.M. Poiseuille (1797- 1869)

R. Mayer (1814-1878)

J.W. von Goethe (1749-1832)

Augenspiegel (Ophthalmoskopie)

Physiologie des Blutkreislaufs,
Blutströmung

Erster Hauptsatz der Thermodynamik
anatomische und physikalische /
physiologische Studien (Farbenlehre)

Warum Physik für „Nicht-Physiker“?

Insb. ab Mitte des 19. Jhdt. zunehmend Verzicht auf die Beschreibung des Lebenden (d.h. der speziellen Phänomene des Lebens; die Anwendbarkeit auf Lebewesen bleibt dabei erhalten!)

Vereinfachung bei der Beschreibung von Naturvorgängen

Gleichzeitig Übergang von einer phänomenologischen (qualitativen: groß/klein; komparativen: größer/kleiner) zur quantitativen Beschreibung (3,5 km; 5.2 mm)

Spezialisierung (in Mechanik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre, Optik, ...)

Aber: Die Unterschiede zwischen den einzelnen Naturwissenschaften einschließlich der Biologie existieren nur im Makroskopischen und verschwinden im Mikroskopischen

Anwendungsbeispiele

- Verschiedene bildgebenden Verfahren (zum Beispiel Sonographie)
- Diagnostikmethoden in der Augenoptik
- Therapeutische Anwendung von UV- und Laserstrahlung
- Mikroskopie
- Blutströmung
- Biomimetische Systemen (Bakterienzelle)
- Nachweis radioaktiver Elemente in der Umwelt (Röntgenstrahlung /Absorptionsspektroskopie)
- Umweltphysik: Massenspektroskopie, Radiometrie, Spektroskopie
- Analyse von Schadstoffe in Luft und Wasser
- Klimaerwärmung

- Und viele mehr...

Physikalische Arbeitsmethoden

Induktive Methode:

von Einzelercheinungen zum allgemeinen Gesetz

(Vollständige Induktion nur in der Mathematik; in Naturwissenschaften keine „Beweise“)

Experimente führen zu (Falsifikation oder) Bestätigung, keine Verifikation

Deduktive Methode:

vom allgemeinen Gesetz oder Axiom zu den Einzelercheinungen

Induktive Methode:

Beobachtung eines Vorgangs



Experiment zur qualitativen und quantitativen Untersuchung des Vorgangs



Modell zur Beschreibung des Vorgangs (und evtl. weiterer)



Gesetz (Verallgemeinerung auf ähnliche Fälle)

Physikalische Methodik anwendbar auf viele Probleme

Physikalische Größe

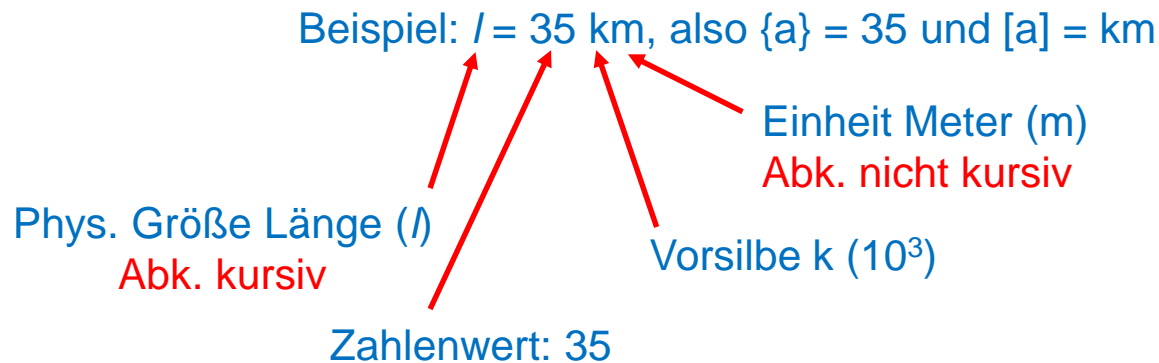
Physikalische Größe beschreibt Eigenschaften und Beschaffenheit physikalischer Objekte, Zustände oder Vorgänge.

Physikalische Größe a ist Produkt aus Zahlenwert $\{a\}$ und der Einheit $[a]$

$$a = \{a\} \cdot [a]$$

Messverfahren:

zu bestimmende Größe mit der Einheit der Größe gleicher Art vergleichen
d.h. Messung \equiv Vergleich, Referenz \equiv Einheit



Physikalische Größe

Wechsel der Einheit einer Größe \longrightarrow **anderen Zahlenwert**

$$2 \text{ Zoll} = 5.08 \text{ cm}$$

$$3 \text{ mm}^2 = 3 \cdot (10^{-1})^2 \text{ cm}^2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 = 0.03 \text{ cm}^2$$

Dimension:

Darstellung der physikalischen Größe in ihren Basisgrößen (ohne Einheit)

<u>Größe</u>	<u>Dimension</u>
Länge	Länge
Volume	Länge ³
Geschwindigkeit	$\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$

Skalar: gegeben durch eine (nichtnegative) **Zahl** und **Maßeinheit**

z.B.: Masse, Volumen, Temperatur

Vektor: gegeben durch **Zahl** und **Richtung** und **Maßeinheit**

z.B.: Weg, Geschwindigkeit, Kraft

SI-System

Einheiten der Physikalischen Größen: **Système International d'Unités (SI-Einheit)**
(Lassen sich nicht durch physikalische Gesetze festlegen)

Basisgröße	SI-Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Bei den anderen physikalischen Größen ist ihre Festlegung durch die physikalischen Gesetze vorgeschrieben.

Zusammengesetzte physikalischen Größen

Beispiele von (aus Basisgrößen) zusammengesetzte Größen:

Geschwindigkeit: Weg (besser Ortsveränderung) pro Zeit

Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit

Beachte: Im allg. sind Ort und damit auch Geschwindigkeit Vektoren.

Dimension: Länge · Zeit⁻¹; Einheit: m · s⁻¹

Impuls: Produkt aus Masse und Geschwindigkeit

Dimension: Masse · Länge · Zeit⁻¹; Einheit: kg · m · s⁻¹

Beschleunigung: Geschwindigkeitsänderung pro Zeit

Dimension: Länge · Zeit⁻¹ · Zeit⁻¹; Einheit: m · s⁻²

Kraft: Masse mal Beschleunigung

Ableitung des Impulses nach der Zeit

Dimension: Masse · Länge · Zeit⁻¹ · Zeit⁻¹; Einheit: kg · m · s⁻² = N (Newton)

Druck: Quotient Kraft und Fläche

Dimension: Masse · Länge · Zeit⁻² · Länge⁻²; Einheit: kg · m⁻¹ · s⁻² = N · m⁻² = Pa (Pascal)

Griechisches Alphabet

Zeichen	Name	Zeichen	Name
A, α	Alpha	N, ν	Ny
B, β	Beta	Ξ, ξ	Xi
Γ, γ	Gamma	O, ο	Omikron
Δ, δ	Delta	Π, π	Pi
E, ε	Epsilon	Ρ, ρ	Rho
Z, ζ	Zeta	Σ, σ	Sigma
H, η	Eta	Τ, τ	Tau
Θ, θ	Theta	Υ, υ	Ypsilon
I, ι	Iota	Φ, φ	Phi
K, κ	Kappa	Χ, χ	Chi
Λ, λ	Lambda	Ψ, ψ	Psi
M, μ	My („Mü“)	Ω, ω	Omega

λ = Wellenlänge

ρ = Dichte

Definition Meter und Sekunde

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist eine zentrale Größe.
Sie hat *per definitionem* den **exakten** Wert **$c = 299\,792\,458\text{ m/s}$** .

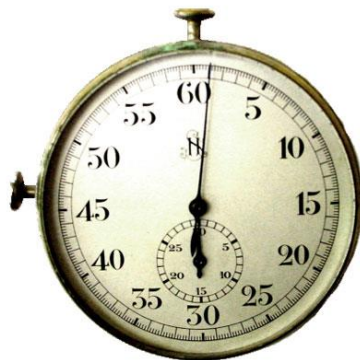
Der Meter

(Das Meter ist ein Messgerät, z.B. das Barometer, das Amperemeter)

ist definiert über die Sekunde und c als die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum in $1/299.792.458$ Sekunden zurücklegt.



Alte Definition: Das Urmeter in Paris



Eine Sekunde ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer der von Atomen des Nuklids ^{133}Cs ausgesandten Strahlung beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes.

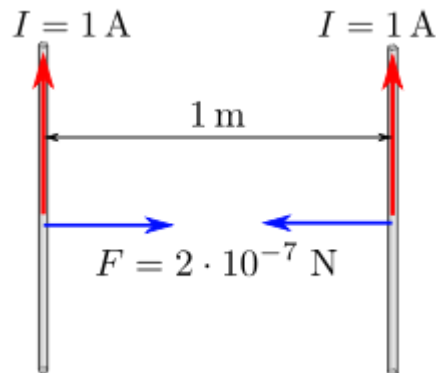
Definition Kilogramm und Ampere

Das Kilogramm ist gleich der Masse des Internationalen Kilogramm-Prototyps.

Das Kilogramm ist die einzige Einheit, die nicht durch Natur- oder Fundamentalkonstanten festgelegt ist, sondern noch einer materiellen Verkörperung bedarf.



Replik des Urkilogramms unter zwei Glasglocken



Veranschaulichung der Ampere-Definition.

Das Ampere ist die Stärke eines zeitlich konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei im Abstand von 1 Meter angeordnete parallele Leiter fließend, zwischen diesen eine Kraft erzeugt, die pro Meter Leiterlänge $2 \cdot 10^{-7}$ N beträgt.

Definition Kelvin, Mol und Candela

Das Kelvin ist das $1/273,16$ -fache der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Enthält ein physikalisches Objekt keine Energie, dann hat es die Temperatur 0 K und befindet sich somit am absoluten Nullpunkt. Temperaturdifferenzen dürfen auch in Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) angegeben werden.

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, welches so viele Einzelteilchen enthält, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

Die Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, welche monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hertz in eine bestimmte Richtung aussendet, in der die Strahlstärke $1/683$ Watt durch Steradian beträgt.

Vorsilben für Einheiten

Vorsilbe	Symbol	Faktor	Vorsilbe	Symbol	Faktor
Yocto	y	10^{-24}	Deka	da	10
Zepto	z	10^{-21}	Hekto	h	$10^2 = 100$
Atto	a	10^{-18}	Kilo	k	$10^3 = 1000$
Femto	f	10^{-15}	Mega	M	$10^6 = 1.000.000$
Piko	p	10^{-12}	Giga	G	10^9
Nano	n	10^{-9}	Tera	T	10^{12}
Mikro	μ	$10^{-6} = 1/1.000.000$	Peta	P	10^{15}
Milli	m	$10^{-3} = 1/1000$	Exa	E	10^{18}
Zenti	c	$10^{-2} = 1/100$	Zetta	Z	10^{21}
Dezi	d	$10^{-1} = 1/10$	Yotta	X	10^{24}

Beispiele Anwendung der Vorsilben

Längenangaben

- 1 Nanometer = 1 nm = 10^{-9} m (ein paar Mal so groß wie das größte Atom)
- 1 Mikrometer = 1 μ m = 10^{-6} m (Größe einiger Bakterien und lebender Zellen)
- 1 Millimeter = 1 mm = 10^{-3} m (Durchmesser der Spitze eines Kugelschreibers)
- 1 Zentimeter = 1 cm = 10^{-2} m (Durchmesser deines kleinen Fingers)
- 1 Kilometer = 1 km = 10^3 m (ein 10-minütiger Spaziergang)
- 1 Ångström = 1 Å = 10^{-10} m (Durchmesser eines Atoms)

Massenangabe

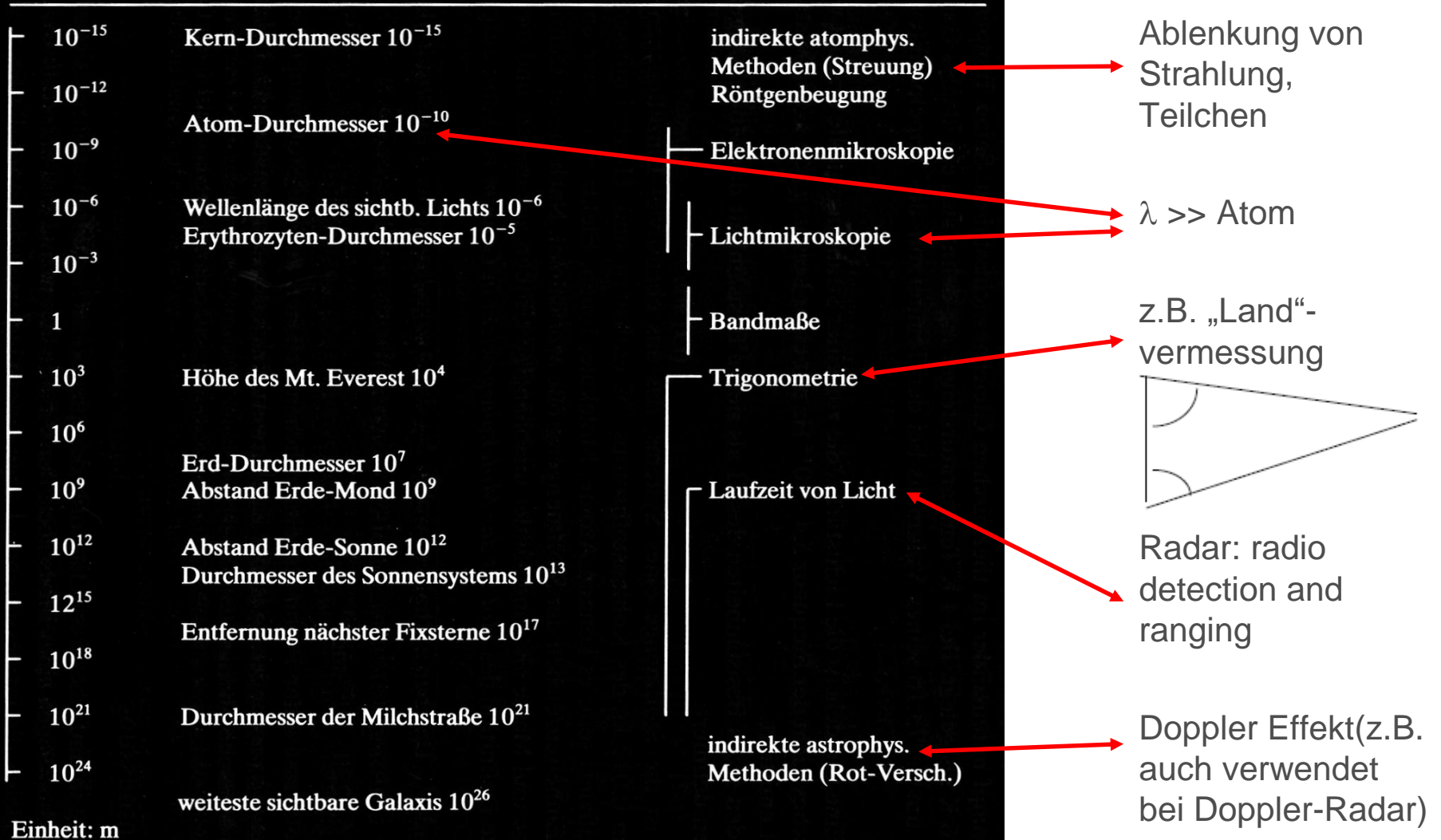
- 1 Mikrogramm = 1 μ g = 10^{-9} kg (Masse eines sehr kleinen Staubteilchens)
- 1 Milligramm = 1 mg = 10^{-6} kg (Masse eines Salzkorns)
- 1 Gramm = 1 g = 10^{-3} kg (Masse einer Büroklammer)
- 1 Tonne = 1 t = 1 Mg = 10^3 kg

Zeitangaben

- 1 Nanosekunde = 1 ns = 10^{-9} s (Zeit für das Licht, um 0,3 m zu reisen)
- 1 Millisekunde = 1 ms = 10^{-3} s (Zeit für den Ton, um 0,35 m zu reisen)
- 1 Minute = 1 min = 60 s
- 1 Stunde = 1 h = 60 min = 3600 s
- 1 Tag = 1 d = 24 h = 86400 s

Größenordnungen Längen

Tab. 1.6 Einige typische Längen, ihre Größenordnung und Meßverfahren



Einheit: m

Größenordnungen Zeiten und Massen

Zeiten

Massen

Tab. 1.7 Zeitdauern und ihre Größenordnung

10^{-23}	Lebensdauer kurzlebiger Elementarteilchen 10^{-23}
10^{-15}	Schwingungsdauer von sichtbarem Licht 10^{-15}
10^{-12}	
10^{-9}	Lebensdauer von angeregten Zuständen in Atomen 10^{-9}
10^{-6}	
10^{-3}	Dauer eines Blitzes 10^{-3}
1	Pulsschlag
10^3	
10^6	1 Jahr $6 \cdot 10^7$
10^9	Menschenalter 10^9
10^{12}	
10^{15}	Alter der Menschheit 10^{14}
10^{18}	Alter der Milchstraße 10^{18}

Einheit: s

Tab. 2.1 Massen

10^{-30}	Elementarteilchen Atome
10^{-24}	
10^{-18}	Makromoleküle
10^{-12}	rotes Blutkörperchen
10^{-6}	
1	
	Auto
10^6	Lokomotive
10^{12}	
10^{18}	
	Mond ($7 \cdot 10^{22}$)
10^{24}	Erde ($6 \cdot 10^{24}$)
10^{30}	Sonne ($2 \cdot 10^{30}$)

Einheit: kg

Gleichungen

Am Beispiel des Fallgesetzes:

Größengleichungen:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

g = Beschleunigung fallender Körper
in der Nähe der Erdoberfläche
(ca. 10 m/s^2 , „ $9,81 \text{ m/s}^2$ “)

Zahlenwertgleichungen:

$$s = 4,905 \cdot t^2$$

Vorsicht!!! Nur gültig bei Verwendung bestimmter Einheiten,
Hier: t in Sekunden und s in Metern

- Dieser Gleichungstyp wird in der Physik möglichst vermieden.
- Zahlenwertgleichungen können bei Bedarf mithilfe der entsprechenden Konstanten aus den Größengleichungen leicht abgeleitet werden.

Messunsicherheiten / Messfehler (Messabweichung)

(**Grober Fehler:** z.B. Verletzung der Messvorschriften)

Systematische Fehlern

- Treten immer in bestimmter Richtung auf
- Messgerät defekt, schlecht kalibriert, Fehlbedienung, Messverfahren
- können in Prinzip durch eine bessere Messapparatur reduziert oder sogar vermieden werden
- Geschätzte Größe bei der Angabe des Messergebnisses mitangeben

Zufällige Fehlern

- Richtung und Betrag statistisch verteilt (statistische Fehler)
- Jede Messung liefert etwas anderen Wert
- Die Messungen schwanken um einen gewissen häufigsten Wert
- Die Ursachen sind Einstell- und Ablesefehler, aber meistens unkontrollierbare äußere Einflüsse

Angabe Messergebnis (absolut): $52,3 \text{ cm} \pm 1 \text{ mm}$

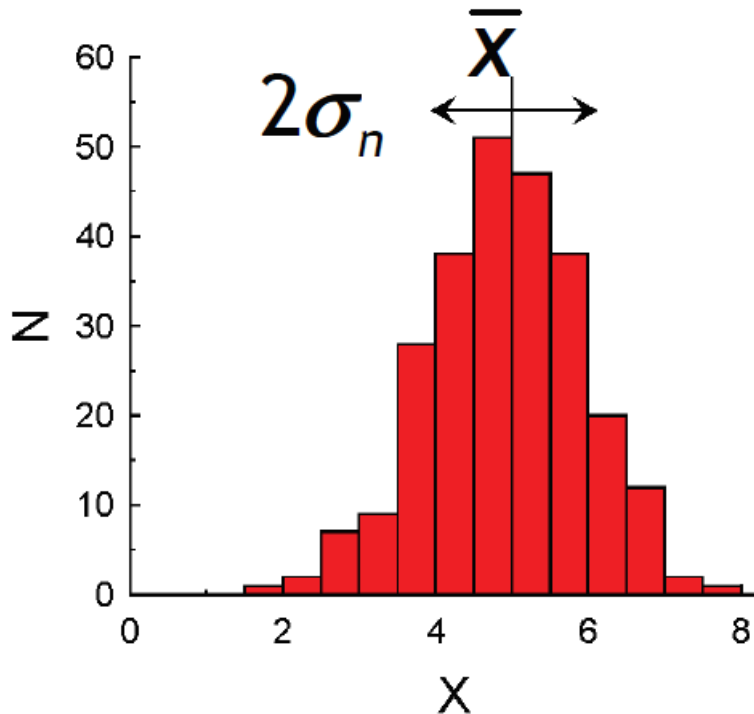
$52,3 \pm 0,1 \text{ cm}$

$52,3(1) \text{ cm}$

Angabe Messergebnis (relativ): $52,3 \text{ cm} \pm 0,2\%$

Fehlerrechnung

Histogramm (Balkendiagramm)



Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standardabweichung

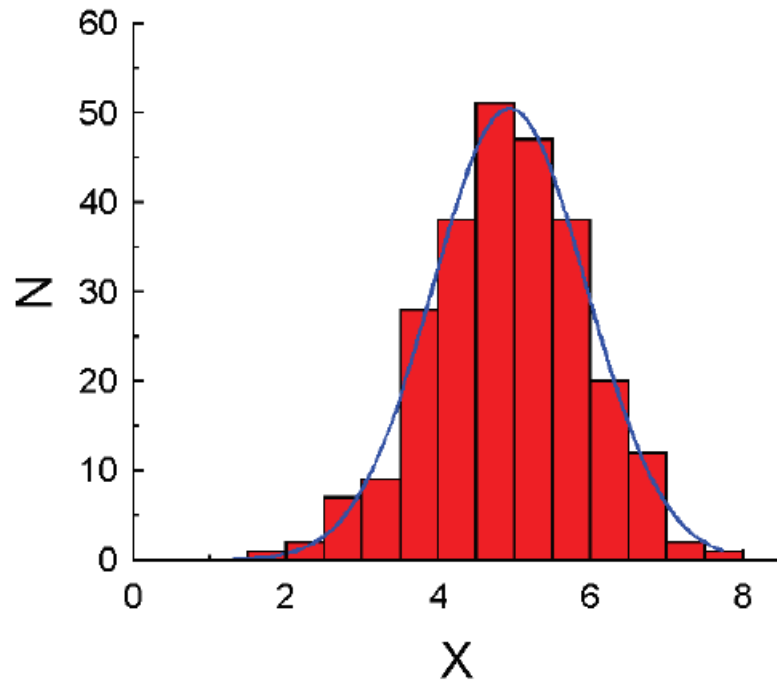
$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Standardabweichung des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$$

Gauß-Verteilung

Die Definitionen der vorhergehende Folie sind insb. Sinnvoll bei der häufig auftretenden Gauß-Verteilung



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Messergebnis

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$$

Ca. 68 % statistische Sicherheit

$$[\bar{x} - 1\sigma, \bar{x} + 1\sigma]$$

Ca. 95 % statistische Sicherheit

$$[\bar{x} - 1,96\sigma, \bar{x} + 1,96\sigma]$$

Fehlerfortpflanzung

Auch wenn dies oft übergangen wird (auch in dieser Vorlesung):

Jede Messgröße hat eine Messunsicherheit, oft angegeben mit einem „Sigma-Wert“. Wenn nun mehrere Messgrößen zu einem neuen Wert kombiniert werden, stellt sich die Frage nach der Unsicherheit des Kombinationswertes.

Bei Gauß-Verteilungen gilt:

zu bestimmende Größe

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

mit Unsicherheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_k$
der Eingangsgrößen x_1, \dots, x_k

$$f(x_1 \pm \sigma_1, x_2 \pm \sigma_1, \dots, x_k \pm \sigma_k)$$

Unsicherheit der zu bestimmenden Größe

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \sigma_j \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_k^2}$$

Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz

Mengenbegriffe

Masse m

- Charakteristische und ortsunabhängige physikalische Größe
- Einheit: Kilogramm (kg)

Volumen V

- Ein Begriff zur Beschreibung bestimmter Mengen eines Stoffes
- Einheit: Kubikmeter (m³)

Stoffmenge n

- Der Anzahl N näher zu bezeichnender gleicher Einzelteilchen eines Systems (einer Substanz) proportional
- Der Proportionalitätsfaktor ist $(N_A)^{-1}$; **Avogadro-Konstante N_A** ($\approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) die Anzahl Teilchen in einem Mol der Substanz
- Definition: $n = \frac{N}{N_A}$
- Einheit: Mol (mol)

Teilchenanzahl N

- Definition: $N = n \cdot N_A$
- Einheit: Dimensionslos

Bezogene Größen

a) Volumenbezogen

(Massen-)Dichte ρ

- Definition: $\rho = \frac{m}{V}$
- Einheit: Kilogramm/ (Meter)³ (kg/m³)

Teilchenanzahldichte ρ_N

- Definition: $\rho_N = \frac{N}{V}$
- Einheit: m⁻³

b) Massenbezogen

Spezifisches Volumen v

- Definition: $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$
- Einheit: m³/kg

Bezogene Größen

c) Stoffmengenbezogen

Molare Masse M

- Definition: $M = \frac{m}{n}$
- Einheit: kg/mol

Molares Volume V_m

- Definition: $V_m = \frac{V}{n}$
- Einheit: m³/mol

d) Gehalt

Massengehalt w_B

- Definition: $w_B = \frac{m_B}{\sum_i m_i}$
- Einheit: dimensionslos oder in %

Bezogene Größen

Volumengehalt φ_B

- Definition: $\varphi_B = \frac{V_B}{\sum_i V_i}$
- Einheit: dimensionslos oder in %

Stoffmengengehalt x_B

- Definition: $x_B = \frac{n_B}{\sum_i n_i}$
- Einheit: dimensionslos oder in %

e) Konzentration

Massenkonzentration ρ_B^*

- Definition: $\rho_B^* = \frac{m_B}{V}$
- Einheit: kg/m³

Bezogene Größen

Stoffmengenkonzentration c_B

- Definition: $c_B = \frac{n_B}{V}$
- Einheit: mol/m³ (mol Substanz/ m³ Lösung)
- Gebräuchliche Einheit: mol/dm³ = mol/L = **Molarität**

Molalität m_B^*

- Definition: $m_B^* = \frac{n_B}{m_L}$
- Einheit: mol/kg (mol Substanz/ kg Lösungsmittel)

Mechanik

Einleitung

Mechanik ist die Lehre von der **Bewegung** bzw. der Bewegungsveränderung und der Formänderung von Körpern sowie den dabei wirkenden **Kräften**.

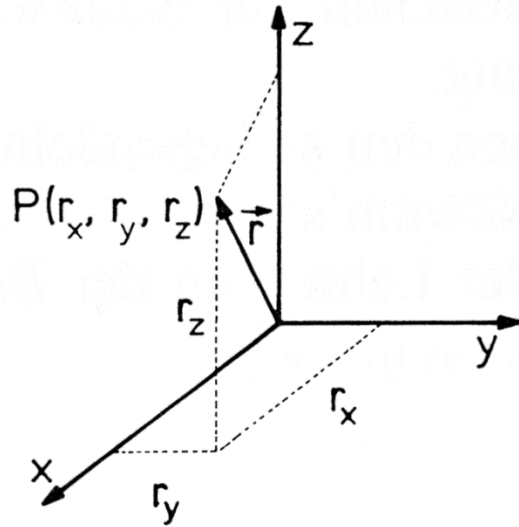
Kinematik ist die Lehre der Bewegungen von Körpern im Raum und Zeit unter Absehen von den Kräften und der Masse.

Translation: Bewegung von einem Ort zum anderen

Rotation: Drehbewegung um eine Achse

Massenpunkt: idealisierte Vereinfachung eines Körpers, der zwar die Masse m , aber kein Volume V besitzt (mathematischer Punkt)

Ortsvektor



Definition des Ortsvektors \vec{r} in den kartesischen Koordinaten x, y, z .

Ortsvektor:

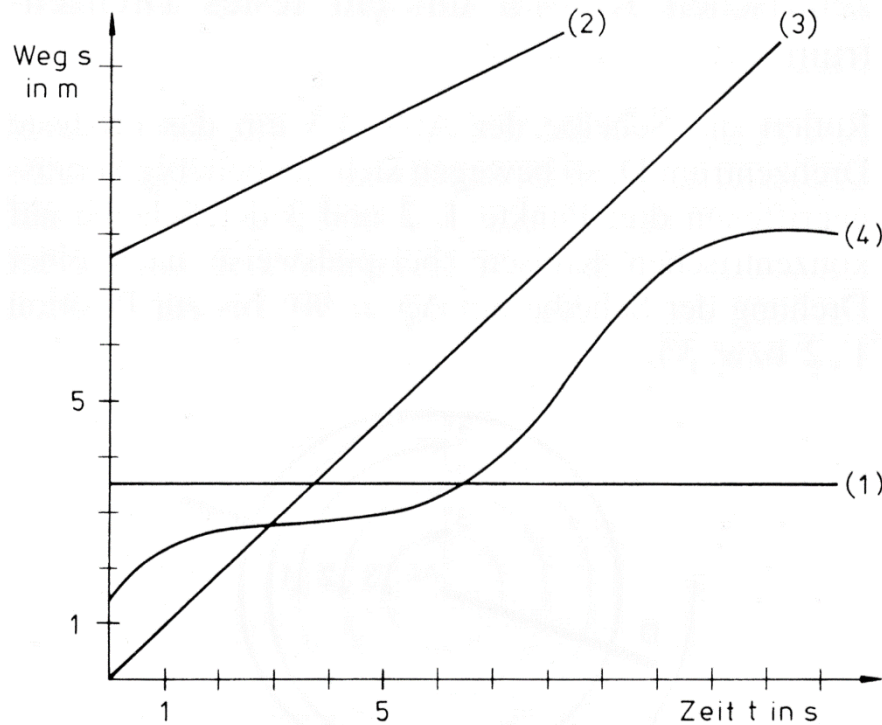
$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_x(t) + \vec{r}_y(t) + \vec{r}_z(t) \\ &= r_x(t)\vec{e}_x + r_y(t)\vec{e}_y + r_z(t)\vec{e}_z\end{aligned}$$

\vec{e}_x = Einheitsvektor in Richtung x , $|\vec{e}_x| = 1$

Betrag des Ortsvektor:

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{r_x^2(t) + r_y^2(t) + r_z^2(t)}$$

Translationsbewegungen



Weg-Zeit-Diagramm

$s_1(t)$: Körper in Zustand der Ruhe

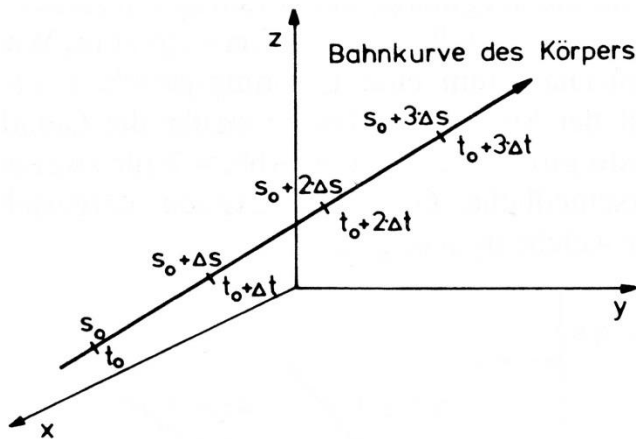
$s_2(t)$: Körper im Zustand der gleichförmig geradlinigen Bewegung (langsam)

$s_3(t)$: Körper im Zustand der gleichförmig geradlinigen Bewegung (schnell)

$s_4(t)$: Körper in Zustand der geradlinigen ungleichförmigen Bewegung

Geschwindigkeit v

Geradlinige gleichförmige Bewegung (Bewegung in einer Richtung)

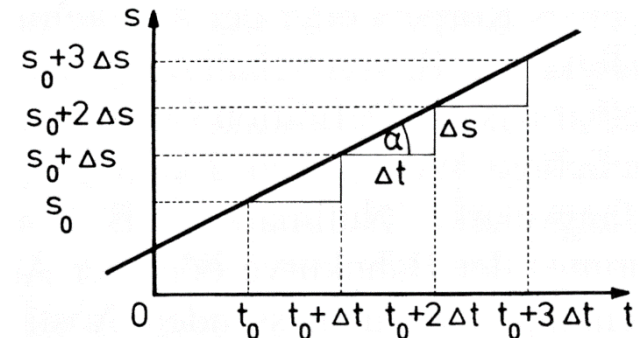


Gleiche Wegstücke Δs einer geradlinigen Bahn in gleichen Zeitintervallen Δt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned} s &= s_0 + \sum (\Delta s) = s_0 + \sum (v \cdot \Delta t) \\ &= s_0 + v \sum (\Delta t) = s_0 + v \cdot (t - t_0) \end{aligned}$$



Geschwindigkeit \vec{v}

Die Geschwindigkeit \vec{v} ist wie der Weg \vec{s} ein Vektor

Man unterscheidet zwischen

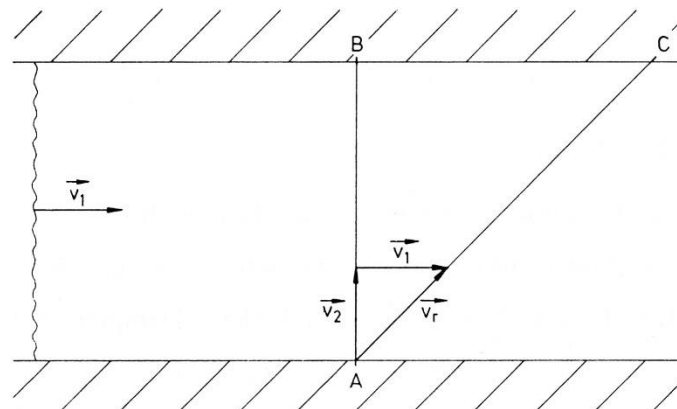
dem Vektor der Geschwindigkeit (engl. velocity) $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Und seinem Betrag, der Bahngeschwindigkeit (engl. speed)

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Vektoren können geometrisch addiert werden oder in Komponenten zerlegt werden.

Beispiel: Ein Boot überquert einen Fluss



$$\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$v_r = |\vec{v}_r| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

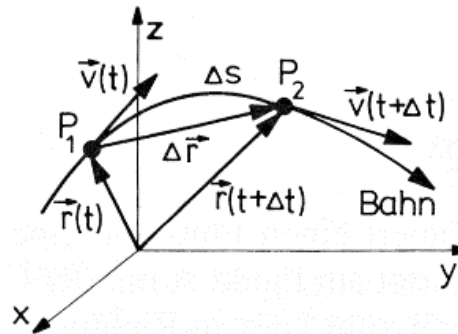
Mittlere Geschwindigkeit \vec{v}

Ungleichförmige Bewegung $\hat{=}$ v ändert Betrag und/oder Richtung

$$\vec{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

($s_4(t)$ Folie 36)

Geschwindigkeit ändert sich von Punkt zu Punkt auf die Bahnkurve.



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\text{Verschiebungsvektor } \overline{P_1 P_2}}{\text{verstrichene Zeit}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\end{aligned}$$

Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$

Wichtig: Bei der Definition der mittleren Geschwindigkeit gibt $\Delta\vec{r}$ für endliche Zeitintervalle Δt zwar die Verschiebung des Massenpunktes von P_1 nach P_2 an, jedoch nicht dessen zurückgelegten Weg Δs längs der Bahnkurve.

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit t in Punkt P_1

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ ist die erste Ableitung der Ort-Zeit-Funktion nach der Zeit.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Mit dieser Definition der Geschwindigkeit werden auch solche Bewegungen beschrieben, bei denen sich die Geschwindigkeit von Ort zu Ort nach Betrag und/oder Richtung ändert.

Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$

An jedem Punkt entlang des Weges zeigt der Geschwindigkeitsvektor in Richtung der Tangente in diesem Punkt.

Betrag der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$$

Beachte $ds = |d\vec{r}|$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

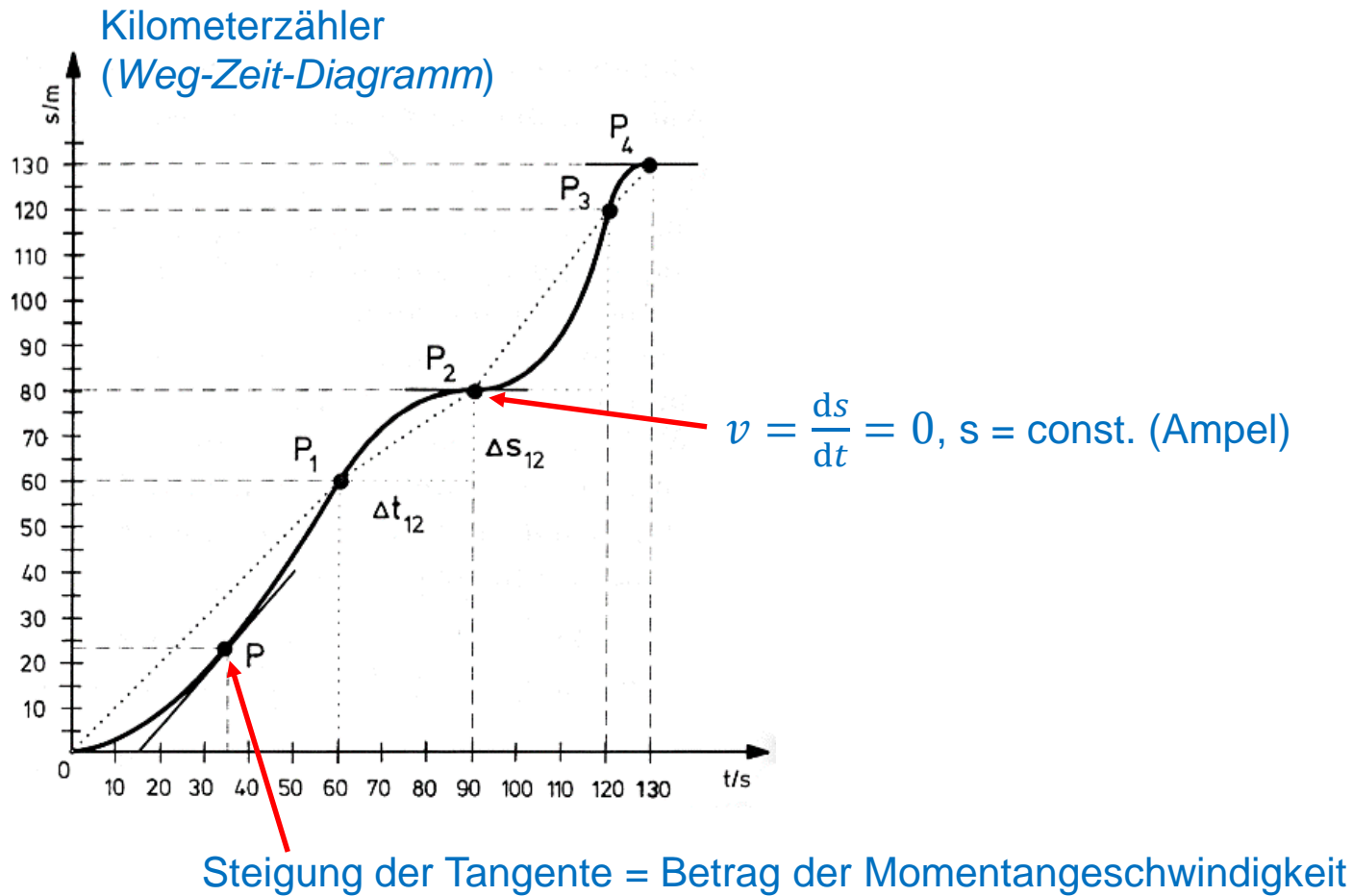
Definition der Ableitung von $s(t)$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$$

Komponenten der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$

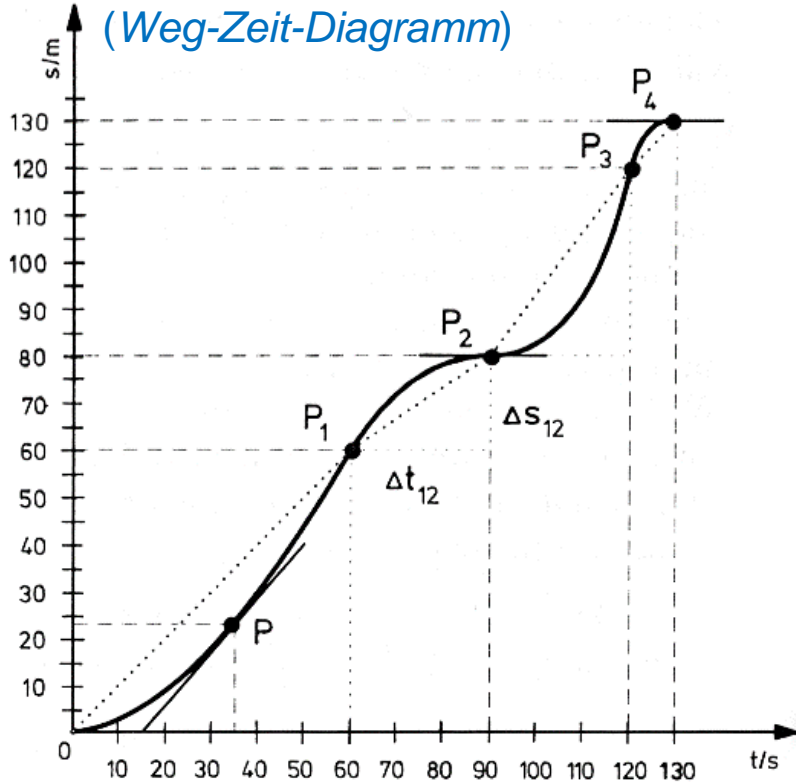
$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \qquad v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Beispiel Autofahrt

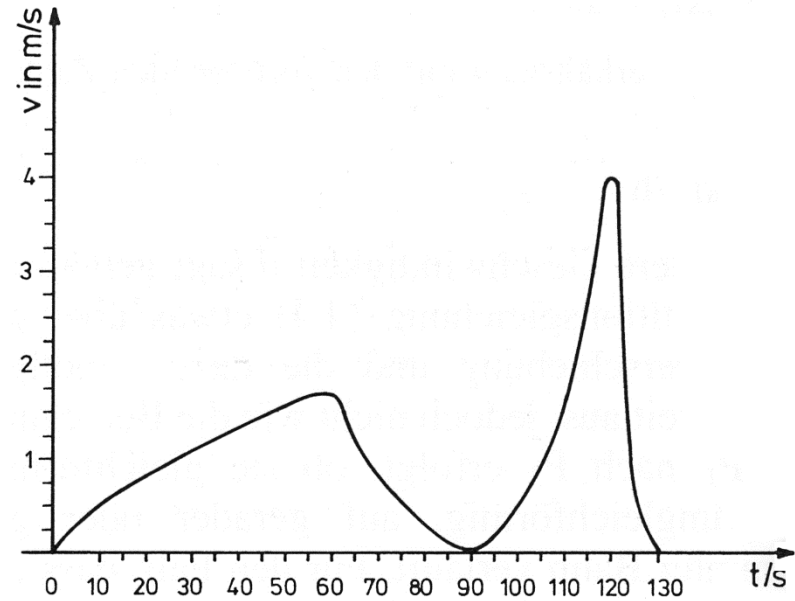


Beispiel: Autofahrt

Kilometerzähler
(Weg-Zeit-Diagramm)



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Mittlere Geschwindigkeit zwischen P₁ und P₂: $\bar{v}_{12} = \frac{\Delta s_{12}}{\Delta t_{12}}$

$$\bar{v}_{12} = \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ s}}$$

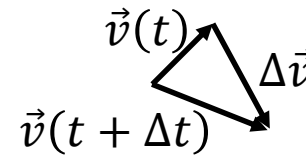
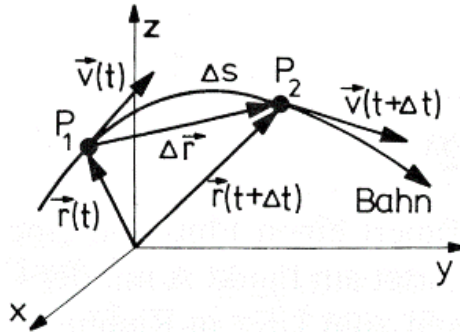
$$\bar{v}_{01} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{v}_{23} = \frac{4 \text{ m}}{3 \text{ s}}$$

$$\bar{v}_{02} = \frac{1 \cdot 60 + \frac{2}{3} \cdot 30}{60 + 30} = \frac{8 \text{ m}}{9 \text{ s}}$$

Beschleunigung \vec{a}

Jede ungleichförmige Bewegung ist beschleunigt $\hat{=}$ die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ ändert sich nach Betrag und/oder Richtung.



Die mittlere Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Momentane Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)$$

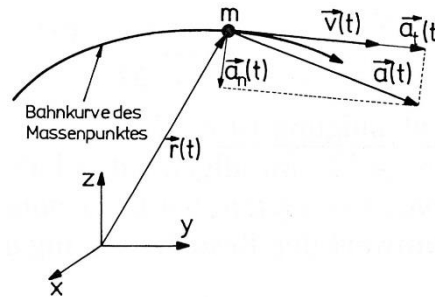
Einheit: $\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Beschleunigung \vec{a}

Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ist die erste zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit oder anders ausgedrückt, die zweite zeitliche Ableitung des Ortsvektors \vec{r} .

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = d\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) \frac{1}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Die Angabe der Richtung der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ relativ zur Bahnkurve.



Allgemeiner Fall: Die Beschleunigung zerlegt sich in eine zur Bahn tangentielle Komponente (also parallel zur Richtung der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$) und in eine zur Bahnkurve normale Komponente (also senkrecht zu $\vec{v}(t)$).

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t)$$

Ändert den Betrag $\vec{v}(t)$

Richtungsänderung $\vec{v}(t)$

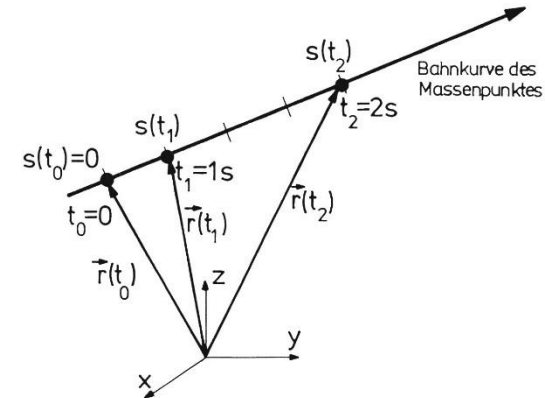
Beispiele: beschleunigte Bewegungen

Geradlinig beschleunigte Bewegung ($\vec{a}_n = 0, \vec{a}_t \neq 0$) [Kurve 3]

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{s}}(t)$$

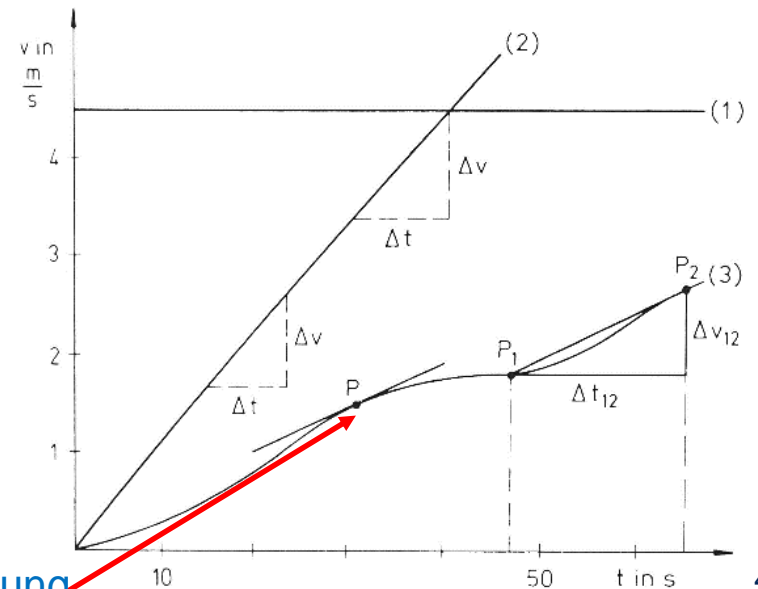
Gleichförmig beschleunigte Bewegung ($\vec{a} = \text{const.}$) [Kurve2]

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{const.}$$



Mittlere Beschleunigung bei ungleichförmig beschleunigter Bewegung [Kurve 3]

$$\bar{a} = \frac{\Delta v_{12}}{\Delta t_{12}}$$



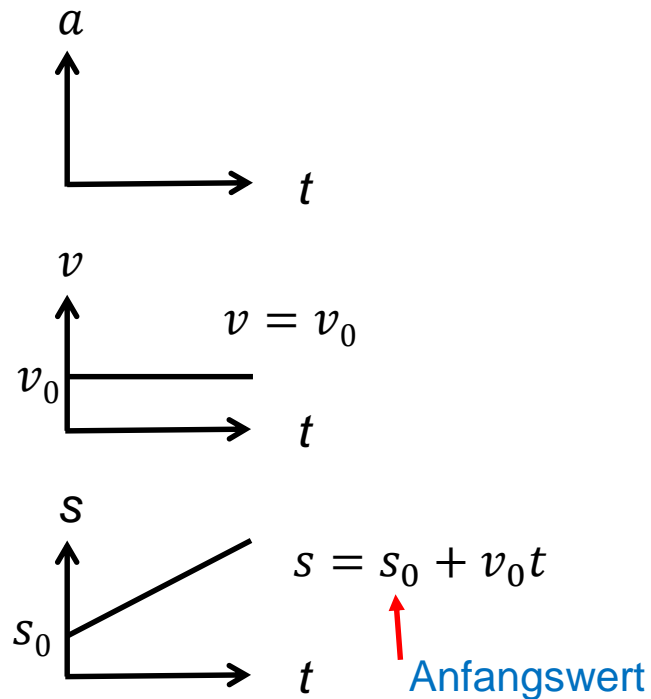
Steigung der Tangente = Betrag der Beschleunigung

Beispiele

gleichförmige Bewegung

($v = \text{const.} \leftrightarrow a = 0$)

Auto rollt ohne Reibung

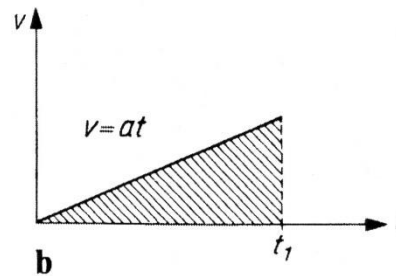
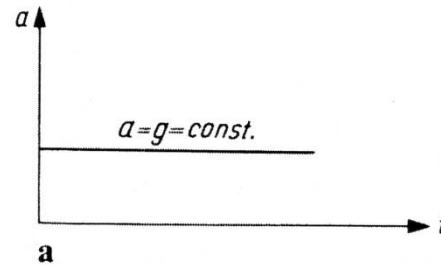


gleichförmig beschleunigte Bewegung (reibungsfrei)

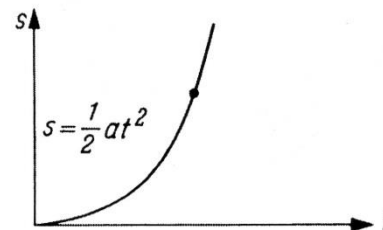
($a = \text{const.}$)

Apfel fällt vom Baum, $a_0 = g = 9,81 \text{ m/s}^2$

(Erdbeschleunigung)



Momentangeschwindigkeit: $v = \sqrt{2a \cdot s}$



Allgemein

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Horizontaler Wurf (reibungsfrei)

Bewegung des Körpers zusammengesetzt aus einer gleichförmig geradlinigen Bewegung in x -Richtung und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in y -Richtung

$$x_0 = y_0 = v_{0,y} = 0$$

Es gilt zur Zeit t :

in x -Richtung:

momentane Geschwindigkeit: $v_x = v_0$

zurückgelegter Weg: $x = v_0 t$

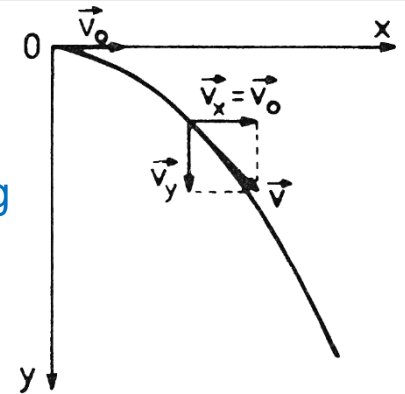
in y -Richtung:

momentane Geschwindigkeit: $v_y = gt$

zurückgelegter Weg: $y = \frac{1}{2}gt^2$

momentaner Betrag der Bahngeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$



Auflösen nach t und Einsetzen in y -Gleichung führt zu Bahnkurve (Parabelform):

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Schiefer Wurf nach oben

Beim „schiefen Wurf“ wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 unter dem Winkel α schräg nach oben geworfen.

$$v_{0,x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0,y} = v_0 \sin \alpha$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$x = v_0 (\cos \alpha)t \quad y = v_0 (\sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Eliminiert man die Zeit t aus beide Gleichungen, so ergibt sich als Gleichung der Bahnkurve:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

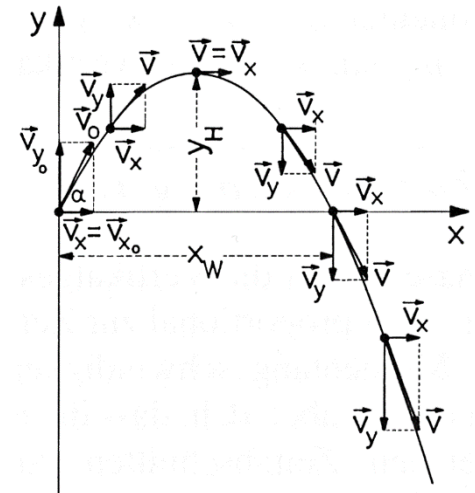
Das ist eine Parabel mit dem Scheitel S, mit der Koordinaten:

$$x_s = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right) \sin 2\alpha \quad y_s = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right) \sin^2 \alpha$$

y_s ist die Wurfhöhe
(max für $\alpha = 90^\circ$)

Die Wurfweite ($y = 0$):

$$\text{(max für } \alpha = 45^\circ\text{)} \quad x_w = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$



Rotationsbewegungen

Bisher: $\vec{a}_n = 0, \vec{a}_t \neq 0$

Beachte: Schon eine geringe Abweichung eines Körpers von der geradlinigen Bahn bedeutet aber das Auftreten einer Normalkomponente, d.h. eine Drehung des Geschwindigkeitsvektors und damit eine Richtungsänderung.

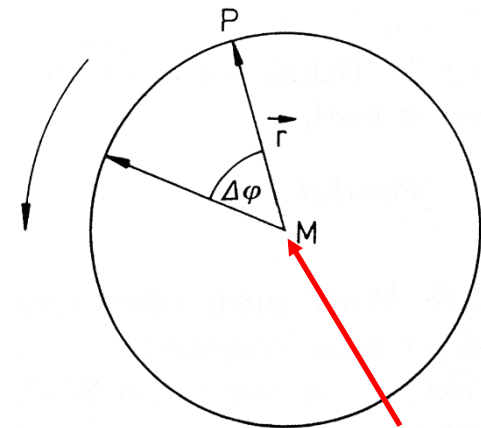
Zum Beispiel: jede Kurvenfahrt mit einem Fahrzeug bedeutet eine Richtungsänderung und enthält damit eine Rotationsbewegung.

Der spezielle Fall ist einer Rotation mit konstanter Krümmung der Bahnkurve ist die Bewegung auf einer Kreisbahn.

Winkel in Grad oder Bogenmaß $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} \quad \text{Einheit: Radiant (rad)}$$

$$\frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{\varphi^\circ \pi}{180^\circ}$$



Kreisbewegung

Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Einheit: $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, meistens aber s^{-1}

Vektor $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf der Bewegungsebene (Normalenvektor), d.h. aus der Zeichenebene heraus

Rechter-Daumen-Regel: Der Daumen der rechten Hand zeigt in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit, wenn die zur Handfläche gekrümmten Finger die Bewegung eines entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn rotierenden Körpers wiedergeben.

$\omega = \text{const.} \leftrightarrow$ gleichförmige Rotation

$\omega \neq \text{const.} \leftrightarrow$ ungleichförmige Rotation

Winkelbeschleunigung α :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Einheit: $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, oft s^{-2} $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

Gleichförmige Kreisbewegung

$$\omega = \text{const.} \leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Für endliche Zeitintervalle } \Delta t: \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$$

$$\text{Feste Umlaufzeit } T: \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

Winkelgeschwindigkeit:

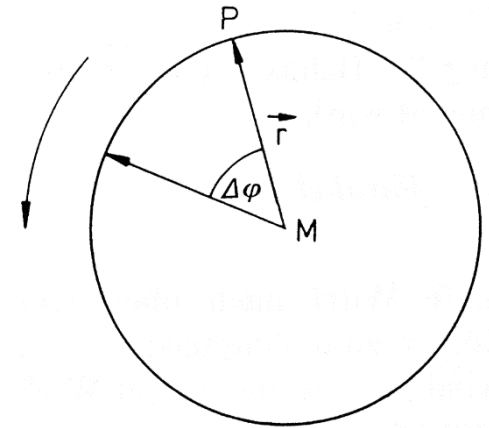
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Kehrwert: Anzahl Umläufe pro Zeit $\hat{=}$ Frequenz ν (oder auch f):

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Einheit: Hertz (Hz); $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

Da $\omega = 2\pi\nu$ heißt ω auch „Kreisfrequenz“



Bahngeschwindigkeit v

\vec{v} ist tangential

$$v = |\vec{v}| = \text{const.}$$

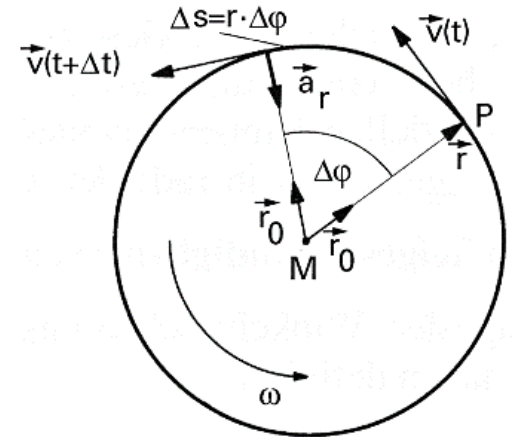
Der Geschwindigkeitsvektor ändert sich zwar nicht im Betrag aber kontinuierlich in der Richtung.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$v = \omega r$$

$$v = \frac{\text{Umfang des Kreises}}{\text{Umlaufdauer}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Die Bahngeschwindigkeit ist bei konstanten Winkelgeschwindigkeit proportional zum Radius des Kreisbahn.

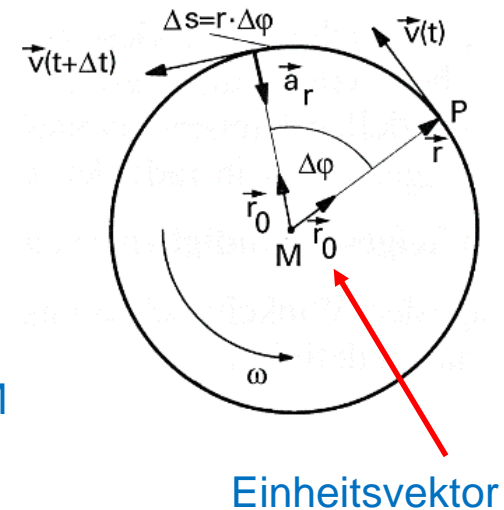


Radialbeschleunigung \vec{a}_r

Der Geschwindigkeitsvektor ändert sich zwar nicht im Betrag aber kontinuierlich in der Richtung

$$\vec{a}_t = 0, \vec{a}_n = \text{const.} \neq 0$$

Die Normalkomponente wirkt senkrecht zur Bahngeschwindigkeit in Punkt P radial zur Kreismitte M hin und wird als Radialbeschleunigung (oder auch Normalbeschleunigung) \vec{a}_r bezeichnet.



$$a_r = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

Der Vektor \vec{a}_r der Radialbeschleunigung zeigt in Richtung des Drehzentrums und ist daher dem Radiusvektor \vec{r} entgegengesetzt gerichtet.

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r} \cdot \vec{r}_0 = -v \cdot \omega \cdot \vec{r}_0 = -\omega^2 \cdot r \cdot \vec{r}_0$$

Zusammenhänge zwischen φ , ω und α

Betrachten wir einen Körper, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ aus der Ruhe heraus mit einer konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = \text{const.}$ in Rotation versetzt wird.

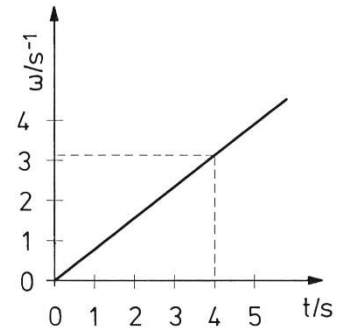
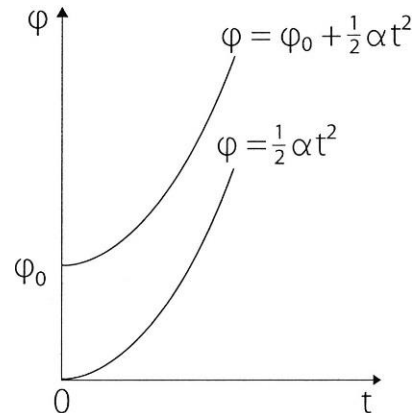
Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \alpha \cdot t$

Falls der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bereits mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotiert, gilt:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

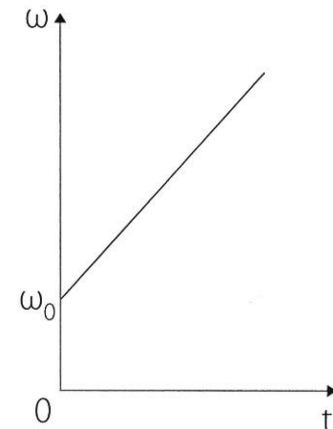
Der vom Radiusvektor überstrichenen Winkel φ

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$



Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \approx \frac{\pi}{4} \text{s}^{-2}$$



Kräfte und Drehmoment: Einleitung

Dynamik ist die Lehre der Bewegungen von Körpern unter dem Einfluss von Kräften.

Kräfte können durch ihre Wirkungen beobachtet und gemessen werden:

1. Änderung des Bewegungszustandes, d. h. beschleunigende (oder auch verzögernde) Wirkung einer Kraft auf bewegliche Körper (Dynamische Wirkung);
2. Formänderung eines Körpers, d.h. verformende Wirkung einer Kraft auf Körper (statische Wirkung).

Massenpunkt: idealisierte Vereinfachung eines Körpers, der zwar die Masse m , aber kein Volume V besitzt (mathematischer Punkt).

Starren Körper: idealisierte Vereinfachung eines endlich ausgedehnten Festkörpers mit Masse m , mit definiertem Volumen und definierter Gestalt. (Makroskopischer Körper aufgebaut aus vielen Massenpunkten, die auch unter der Wirkung von Kräften gegeneinander feste Relativabstände haben.)

Newton'sche Axiome

I. Trägheitsprinzip:

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung ($\vec{a} = 0$, $\vec{v} = \text{const.}$), solange die Summe der einwirkenden Kräfte Null ist.



Newton (1643-1727)

II. Aktionsprinzip:

Die Beschleunigung eines Körpers ist proportional der angreifenden Kraft,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

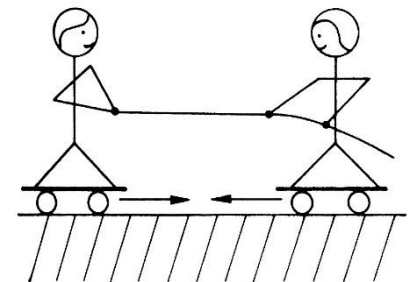
Einheit: $\text{kg m s}^{-2} = \text{N}$ (Newton)

Die proportionalitätskonstante ist die Masse m des Körpers.

III. Reaktionsprinzip (actio = reactio):

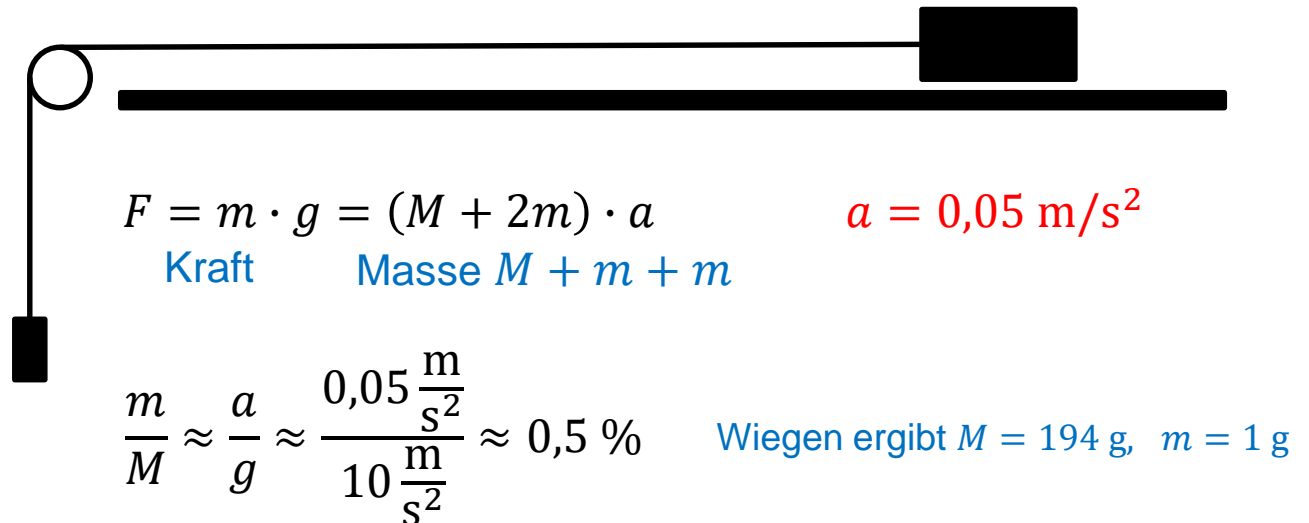
Wirken zwischen zwei Körpern A und B Kräfte, so gilt dass die Kraft F_{AB} , die der Körper A auf den Körper B ausübt, gleichgroß aber entgegengesetzt gerichtet ist zu der Kraft F_{BA} der Körper B auf den Körper A ausübt, also

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



Beschleunigung von Luftkissenwagen

Luftkissenwagen der Masse M wird beschleunigt durch Schwerkraft, die über eine Rolle an einem kleinen Gewicht der Masse m angreift.



Verdoppelung der Kraft: $2m \cdot g = (M + 2m) \cdot a \quad a = 0,10 \text{ m/s}^2$

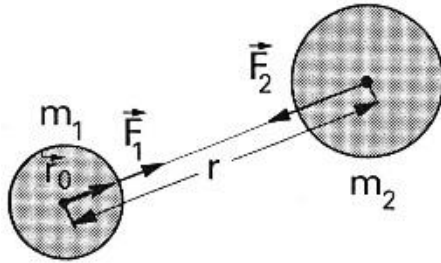
Erhöhung (fast Verdoppelung) der Trägheit (durch zweiten Wagen):

$$m \cdot g = (2M + 4m) \cdot a \quad a = 0,025 \text{ m/s}^2$$

Kombination: $2m \cdot g = (2M + 4m) \cdot a \quad a = 0,05 \text{ m/s}^2$

Bemerkung: Auch die Rolle wird beschleunigt!

Gravitationskraft



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$$

$$\vec{F}_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

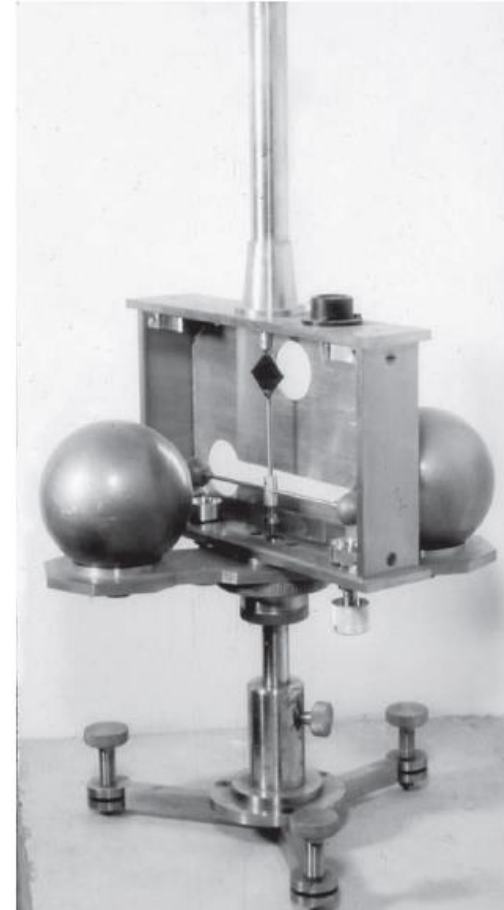
$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}}{\text{kg}^2}$

Ein **Feld** ordnet zu jedem Punkt des Raumes eine bestimmte physikalische Größe zu.

Hier: Schwerfeld (der Erde)

Bemerkung: Mit diesem Versuch wurde γ und damit die Masse der Erde bestimmt!
(Cavendish 1798)



Gravitations-Waage

Gewichtskraft

Im Gravitationsfeld (Schwerefeld) der Erde erfährt jeder Körper eine Kraft, die als **Schwerkraft** oder **Gewichtskraft** oder kurz als **Gewicht** \vec{G} des Körpers bezeichnet wird.

$$F = \gamma \frac{m_{Erde} m}{(r_{Erde} + h)^2}$$

Mit $r_{Erde} \gg h \rightarrow h \approx 0$

$$G = \gamma \frac{M}{r_{Erde}^2} m = mg$$

g = Fallbeschleunigung

Mit $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg und $r_{Erde} \approx 6,38 \cdot 10^6$ m = 6380 km: $g \approx 9,80$ m/s²

Genauer Wert ist ortsabhängig!

(Eigenrotation Erde, ihrer nicht gleichmäßigen Massenverteilung und ihrer Abplattung an den Polen)

Gemessen: Äquator 0°

$$g = 9,78 \text{ m/s}^2$$

Deutschland 50°

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Pol 90°

$$g = 9,83 \text{ m/s}^2$$

Fallversuch

Gemessen werden die Fallzeiten t für die Fallhöhen 0,2 m bzw. 0,8 m.

Zusätzlich Bestimmung der Fallgeschwindigkeit v nach der Beziehung $v = \Delta s / \Delta t$ (eigentlich Durchschnittsgeschwindigkeit!)

Hierbei ist Δt die (gemessene) Zeitspanne des Verdunkelns der Lichtschranke durch den Fallkörper vergeht.

(Länge des Fallkörpers $\Delta s = 20$ mm)

s in m	0,2	0,8	
t in s	0,2	0,4	→ $\delta t = 0,2$ s
Δt in ms	10	5	
v in m/s	2	4	→ $\delta v = 2$ m/s

Mithilfe dieser Werte erhält man für die Fallbeschleunigung den Wert

$$g = a = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{2 \text{ m/s}}{0,2 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Trägheitskräfte

Die Trägheit der Materie oder ihre träge Masse macht sich auch in den sog. **Trägheitskräften** bemerkbar.

Trägheitskräfte auf einen Massenpunkt wirken immer, wenn das System, in dem der Massenpunkt anfänglich ruhte (ein derartiges Inertialsystem existiert immer), beschleunigt wird. Ist a die Beschleunigung, dann beträgt die Trägheitskraft auf m :

$$\vec{F}_T = m\vec{a}$$

Bemerkung: Die Trägheitskraft (Scheinkraft) \vec{F}_T und die von außen vorgegebene reale Kraft \vec{F} sind einander entgegengesetzt, ihre Summe verschwindet. Die Trägheitskraft ruft selbst keine Beschleunigung eines Körpers hervor, sondern beschreibt nur das zeitabhängige Verhalten von Wechselwirkungen (z.B. Zentrifugalkraft, Corioliskraft).

Beachte: Die Trägheitskraft wird also nur von einer mitbewegten Person in einem beschleunigten System beobachtet, nie von einer außenstehenden, ruhenden.

Trägheitskräfte

Beispiele:

- Bei einem beschleunigenden Kraftfahrzeug, wenn wir in den Sitz gedrückt werden.
- Beim Abbremsen, wenn uns der Sicherheitsgurt vor einer weiteren Vorwärtsbewegung bewahrt, vor allem, wenn es sich um ein abruptes Bremsgeschehen handelt.
- Wenn ein Autobus anfährt und Mitfahrer hat ein Stehplatz. Er muss sich festhalten, um sie mit seiner Muskelkraft zu kompensieren, sonst „fällt“ er im Wagen nach hinten.
- Jeder frei fallende Körper (von Luftreibung sei abgesehen) ist daher gewichts- oder schwerelos, da wegen $\vec{a} = \vec{g}$ die Gewichts- und Trägheitskraft entgegengesetzt gleich groß sind (Parabelflug).
- Weitere Beispiele folgen...

Federkraft

Beispiel der verformende Wirkung von Kräften.

Gleichgewicht zwischen der angreifenden Kraft \vec{F} und der elastischen Rückstellkraft \vec{F}_{el} (Federkraft), die die Feder in die Ruhelage ($x = 0$) zurückzutreiben sucht.

Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage gilt:

$$\vec{F} = D \cdot \vec{x} = -\vec{F}_{el}$$

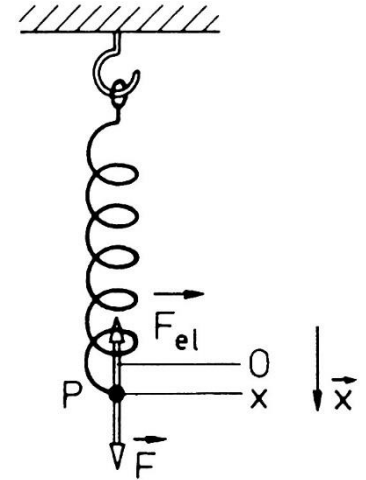
Hooke'sches Gesetz

D = Federkonstante

Einheit: $\frac{N}{M}$

Großes D → harte Feder

Kleines D → weiche Feder



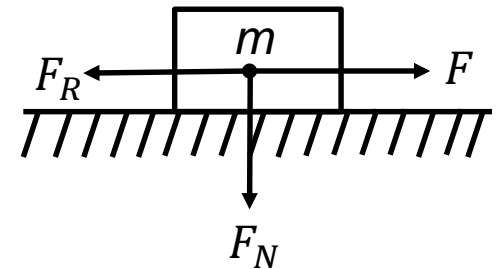
Reibungskraft

Reibung zwischen Festkörpern: wirkt einer gegenseitigen Verschiebung der Körper entgegen.

Die Reibungskraft hat folgenden Eigenschaften:

- Sie ist proportional zu F_N , der Stärke der Normalkraft (Senkrecht zur Auflage), die zwischen zwei sich berührenden Oberflächen wirkt.
- Sie wirkt immer entgegengesetzt zu der Bewegungsrichtung parallel zu den Oberflächen

$$F_R = \mu \cdot F_N$$



Der dimensionslose Reibungskoeffizient (oder die Reibungszahl) μ hängt vom Material und Oberflächenbeschaffenheit der Körper ab.

Die Reibungskraft zwischen Festkörper ist nahezu unabhängig von der Größe der sich berührenden Oberflächen.

Reibungskraft

- **Haftreibung**

$$F_{R,h} = \mu_h \cdot F_N$$

μ_h = Haftreibungskoeffizient

Für $F < F_{R,h}$, so haften die Körper

Für $F > F_{R,h}$, so gleiten die Körper

- **Gleitreibung**

$$F_{R,g} = \mu_g \cdot F_N$$

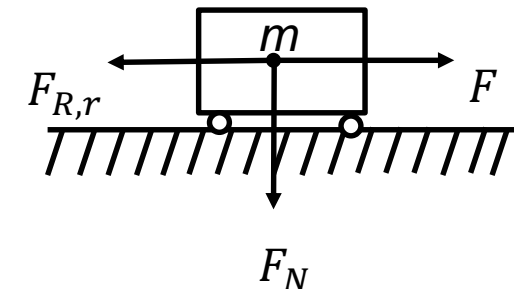
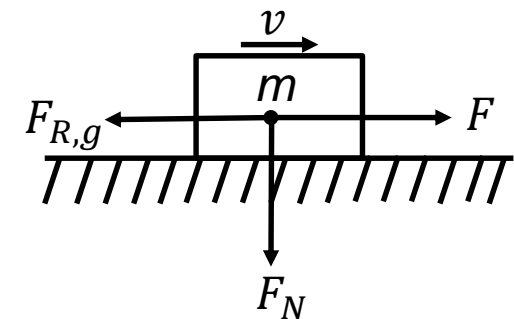
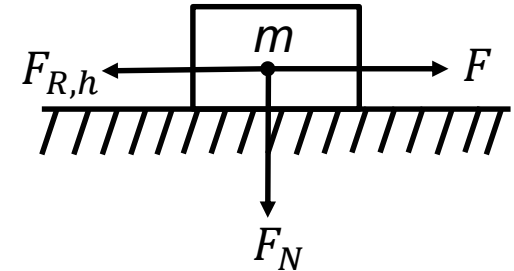
μ_g = Gleitreibungskoeffizient, $\mu_g < \mu_h$

$F = F_{R,g}$ ist notwendig, um ihn in Bewegung zu halten (beachte: unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit)

- **Rollreibung**

$$F_{R,r} = \mu_r \cdot F_N$$

μ_r = Rollreibungskoeffizient, $\mu_r \ll \mu_g$



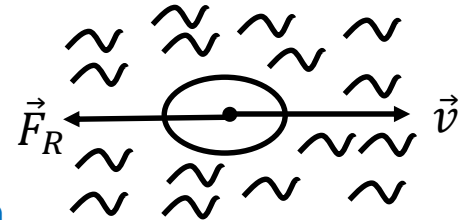
Reibungskraft

Viskose Reibung zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten oder Gasen:

Für die auf dem umströmten Körper wirkende Reibungskraft gilt:

$$F_R \sim v$$

v = die Relativgeschwindigkeit von Körper und Medium



$$F_R = \text{const.} \cdot v$$

abhängig von Form und Größe des Körpers, Viskosität des Fluides

Gilt unter folgenden Bedingungen:

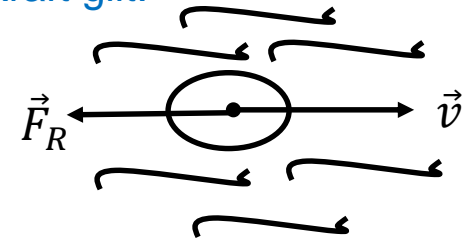
- Strömung ist laminar
- Für kleine v in Flüssigkeiten
- Für sehr kleine v in Gasen

Reibungskraft

Reibung in turbulenter Strömung

Für die auf dem umströmten Körper wirkende Reibungskraft gilt:

$$F_R \sim v^2$$



v = die Relativgeschwindigkeit von Körper und Medium

$$F_R = b \cdot v^2 \qquad b = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A$$

c_w = Widerstandsbeiwert, abhängig von der Form des umströmten Körper

ρ = Dichte des Mediums

A = Angriffsfläche der Strömung

Gilt unter folgenden Bedingungen:

- Strömung ist turbulent
- Für große v in Flüssigkeiten und Gasen
- Dominante Reibung in Luft

Beispiel Reibungskraft

Beispiel: Fall eines Körpers im Schwerfeld der Erde unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Konstant wirkende Kraft ist die Gewichtskraft: $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$

Entgegengerichtet ist der Luftwiderstand: $F_R = b \cdot v^2$

Die wirkende Gesamtkraft ist dann
(Koordinatenachse zähle positiv nach oben):

$$F_{ges} = m \cdot a = -m \cdot g + b \cdot v^2$$

1. Körper wird aus der Ruhe heraus beschleunigt, wobei v noch so klein ist, dass die Reibung vernachlässigbar ist.
2. Fallgeschwindigkeit steigt weiter an \rightarrow Reibungskraft nimmt proportional mit v^2 zu \rightarrow zunehmendem Maße verringert sich die effektive Beschleunigung a auf den Körper bis sie schließlich null wird.
3. Damit wird $b \cdot v^2 = m \cdot g$, es ist der so genannte „quasistationäre Zustand“ erreicht, der Körper fällt mit der konstanten Geschwindigkeit.

$$v_s = \sqrt{\frac{m \cdot g}{b}}$$

Kraftverteilung

Kraft ist ein Vektor: wie Vektoren kann man sie auch in ihre Komponenten zerlegen oder mehrere Einzelkräften nach den Regeln der Vektoraddition zu einer resultierende Kraft zusammensetzen.

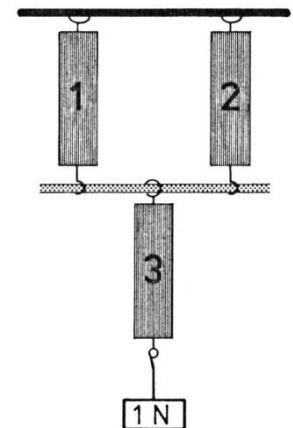
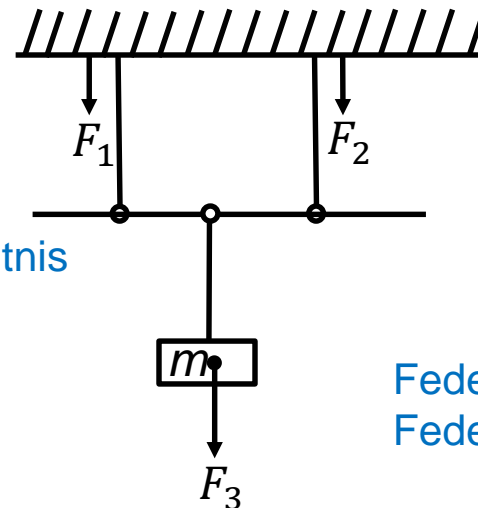
Beachte: Jede einzelne Kraftkomponente wirkt dabei unabhängig von den anderen und die Reihenfolge der Addition der Komponenten ist beliebig.

Wirken also auf einen frei beweglichen Körper mehrere Kräfte ein, so wird er immer in Richtung der Wirkungslinie der Resultierenden Gesamtkraft eine Beschleunigung \vec{a} erfahren.

- Kräfte, die auf parallele Zweige verteilt, eine Last halten

$$F_3 = F_1 + F_2$$

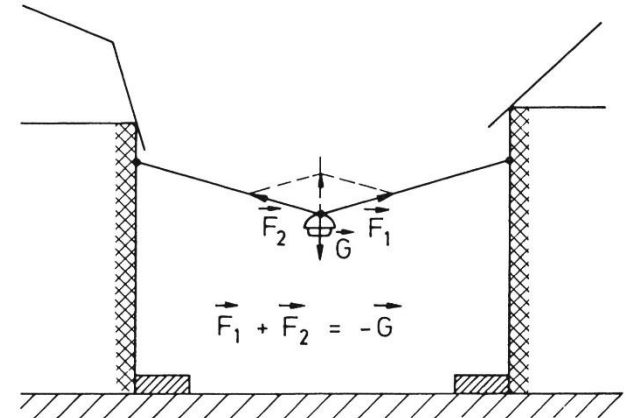
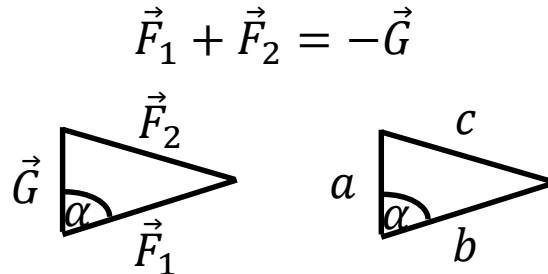
Verhältnis $\frac{F_1}{F_2}$ wird von Längenverhältnis auf der Stange bestimmt.



Federwaage 3: 1 N
Federwaagen 1, 2: 0,5 N

Kraftverteilung

- Kräfte, die das Gewicht einer Straßenlampe kompensieren.



Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

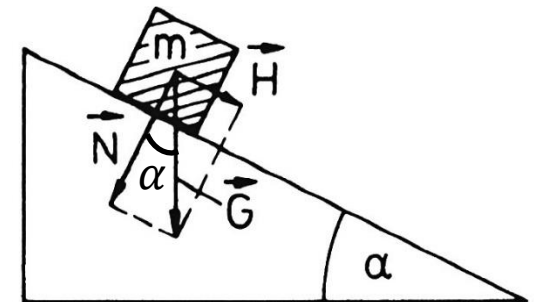
$$F_2^2 = F_1^2 + G^2 - 2F_1 G \cos \alpha$$

- Kräfte, die an einem Körper der Masse m auf der schiefen Ebene wirken.

$$\vec{N} + \vec{H} = -\vec{G} \quad \vec{F}_N + \vec{F}_H = -\vec{F}_G$$

Hangabtrieb: $H = G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha$

Normalkraft: $N = G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha$



Beachte:

$H < G$, mit Hilfe einer schiefen Ebene kann Kraft gespart werden
(Reibungsfreier Fall)

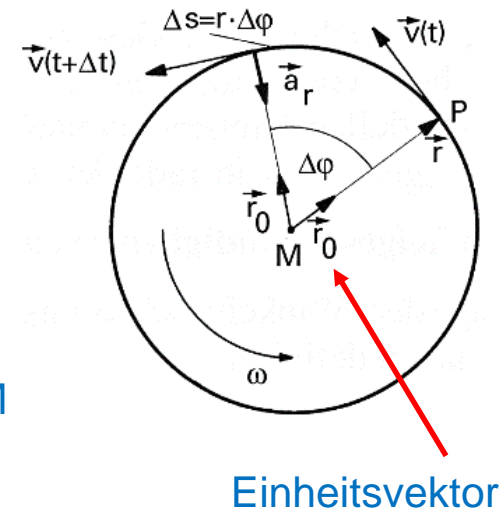
Der Körper erfährt durch die Hangabtriebskraft eine Beschleunigung $a < g$

Kreisbewegungen

Der Geschwindigkeitsvektor ändert sich zwar nicht im Betrag aber kontinuierlich in der Richtung

$$\vec{a}_t = 0, \vec{a}_n = \text{const.} \neq 0$$

Die Normalkomponente wirkt senkrecht zur Bahngeschwindigkeit in Punkt P radial zur Kreismitte M hin und wird als Radialbeschleunigung (oder auch Normalbeschleunigung) \vec{a}_r bezeichnet.



$$a_r = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

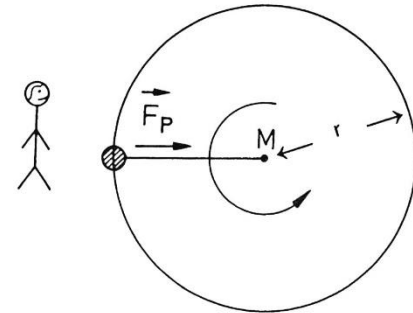
Der Vektor \vec{a}_r der Radialbeschleunigung zeigt in Richtung des Drehzentrums und ist daher dem Radiusvektor \vec{r} entgegengesetzt gerichtet.

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r} \cdot \vec{r}_0 = -v \cdot \omega \cdot \vec{r}_0 = -\omega^2 \cdot r \cdot \vec{r}_0$$

Zentripetalkraft

Auf jeden beschleunigten Körper muss aber nach Newton eine Kraft \vec{F} wirken, die durch das *zweite Newton'sche Axiom* gegeben ist.

Zentripetalkraft \vec{F}_P : die radial auf das Rotationszentrum gerichtete Kraft, welche der Trägheit der Masse überwindet und den Körper auf die Kreisbahn zwingt.



Zentripetalbeschleunigung \vec{a}_r : die radiale, zum Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtete Beschleunigung bedingt durch die Zentripetalkraft.

$$\vec{F}_p = m \cdot \vec{a}_r = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{r}_0$$

$$F_p = m \cdot a_r = m \cdot v \cdot \omega = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

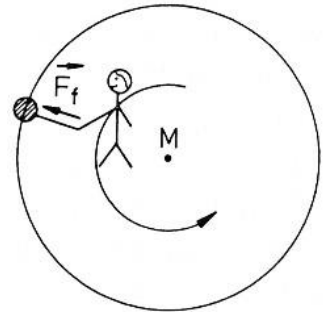
Eine „zentripetal“ wirkende Kraft kann ihrer Natur nach durch unterschiedliche Wechselwirkungen verursacht werden. Beispielsweise die elastische Kraft eines Seils, welche eine Kugel auf einer Kreisbahn um ein Drehzentrum hält.

Zentrifugalkraft

Für einen auf der Scheibe mitrotierenden Beobachter jedoch, bewegt sich der Körper der an dem Seil befestigt ist nicht. Für ihn wirkt in dem Seil, mit dem er den Körper zu halten sucht, eine radial nach außen gerichtete Kraft.

Zentrifugalkraft \vec{F}_f : Scheinkraft die Körper nach außen treibt

$$\vec{F}_f = -m \cdot \vec{a}_r = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{r}_0 = -\vec{F}_p$$



Bei sehr raschen Kurvenfahrten kann die Zentrifugalkraft ein vielfaches der Gewichtskraft betragen, die auf den Körper einwirkt.

Auf der Zentrifugalkraft beruht auch die Wirkungsweise einer Zentrifuge, mit deren Hilfe Massen voneinander getrennt werden können, da \vec{F}_f massenabhängig ist, z.B. zur Abscheidung von Bakterien oder zur Abtrennung der Blutkörperchen vom Serum

Corioliskraft

Corioliskraft: Trägheitskraft (Scheinkraft) die in einem rotierenden System und damit beschleunigten Bezugssystem auftritt, wenn der Massenpunkt in diesem System eine Geschwindigkeit \vec{v} besitzt.

Beispiel: Mitrotierende Beobachter möge eine Kugel von Zentrum aus mit der Geschwindigkeit \vec{v}_r nach außen stoßen.

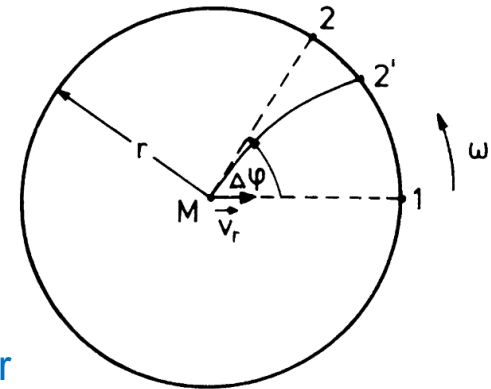
Nicht rotierenden System: Kugel würde sich auf einer geradlinigen Bahn radial in Richtung 1 bewegen und nach Zeit Δt dort ankommen.

Rotierenden System, mitrotierenden Beobachter:

Beobachter dreht sich in der Zeit Δt von der Ausgangsposition aus um den Winkel $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$.

Er erwartet Kugel in Position 2, sieht sie jedoch in 2' eintreffen. Für ihn bewegte sich die Kugel, relativ zur scheinbar beurteilt, auf einer gekrümmten Bahn nach 2' (\vec{v} ändert sich).

Dazu muss eine Kraft vorhanden sein, die aber nur er beobachtet: die Corioliskraft



Corioliskraft

Corioliskraft:

$$\vec{F}_c = 2m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$$

$$F_c = 2m \cdot v \cdot \omega$$

m = masse

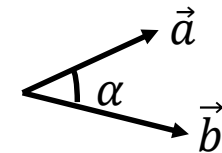
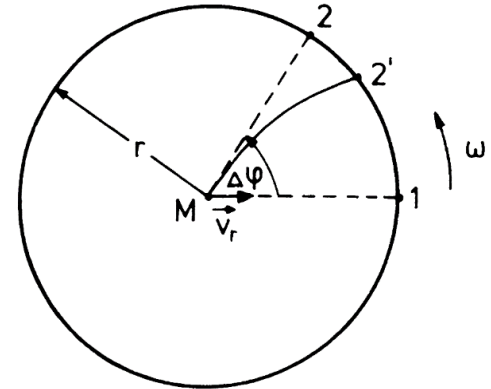
\vec{v} = Relativgeschwindigkeit des Objects zum rotierenden Bezugssystem

$\vec{\omega}$ = Kreisfrequenz des Bezugssystems

Kreuzprodukt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$



Rechter-hand-Regel: Der Daumen der rechten Hand zeigt in die Richtung des Vektors \vec{c} , wenn die zur Handfläche gekrümmten Finger die Bewegung von \vec{a} nach \vec{b} wiedergeben.

Vektor $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf der bewegungsebene, d.h. aus der Zeichenebene heraus.

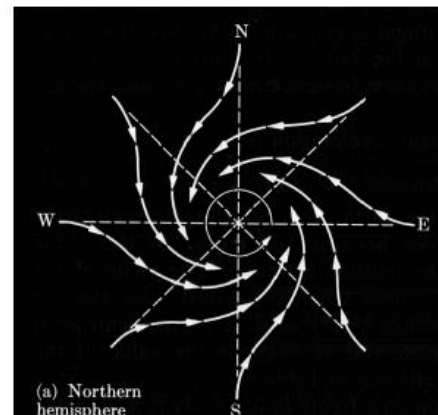
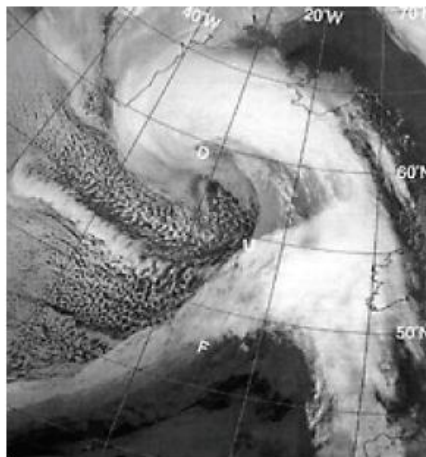
Corioliskraft

Ruhende Beobachter: Dieser wird nichts besonderes merken! Die Kugel rollt mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} auf ihn zu, nur dreht sich, während sie rollt, die Drehscheibe unter ihr um den Winkel $\Delta\varphi$ und die Kugel muss daher in 2' auftreffen.

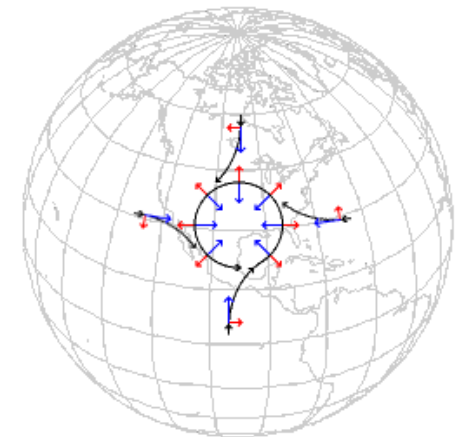
Fazit: Ein mitbewegter Beobachter auf einem rotierenden Bezugssystem beobachtet zwei Trägheitskräfte: die **Zentrifugalkraft** und die **Corioliskraft**.

Beispiel: Meteorologie

Auf der Nordhalbkugel: Ablenkung der Luftmassen nach rechts!
(Blickrichtung in Bewegungsrichtung des Körpers)



Linksdrehung bei Tiefdruckgebieten



Rot – horizontale Komponente der Corioliskraft, Blau – Druckgradientkraft

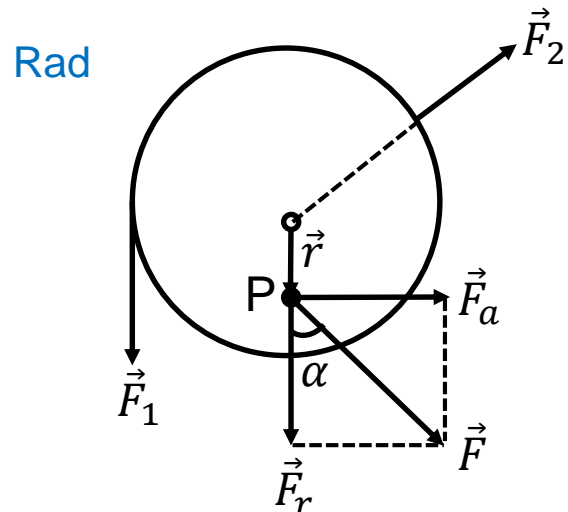
Drehmoment

Dynamik der Drehbewegungen: Kräfte die Drehungen erzeugen

Welche physikalische Größe verursacht bei einem rotierenden Körper eine Winkelbeschleunigung?

Die **Wirkungsrichtung der Kraft** und ihr **Abstand von der Drehachse** bestimmen die Winkelbeschleunigung und die erfolgende Drehbewegung.

Drehmoment: die analoge Größe zu Kraft bei Translationsbewegungen, d.h. das Drehmoment ist immer direkt mit einer Winkelbeschleunigung verknüpft analog zur Beschleunigung im Falle einer Kraft.



$\vec{F}_1 \rightarrow$ Drehung

$\vec{F}_2 \rightarrow$ keine Drehung

Allgemein: $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_a$
radial azimuthal

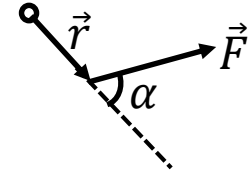
Nur \vec{F}_a erzeugt Drehung!

Drehmoment

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$



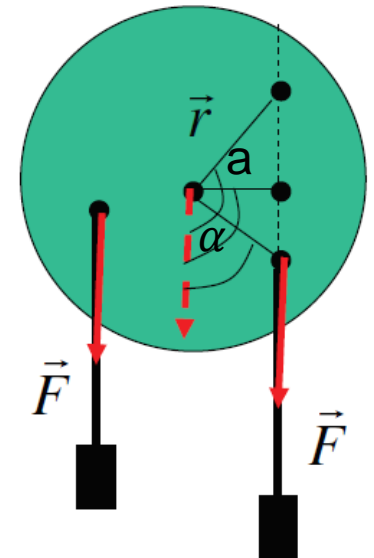
$$\text{Einheit: } N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

Die Größe $a = r \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$ ist die Komponente von \vec{r} , die senkrecht auf der Richtung der angreifenden Kraft \vec{F} steht und wird als **Kraftarm** bezeichnet.

Daher gilt:

Drehmoment $M = \text{Kraftarm mal Kraft}$

$$M = a \cdot F$$



Gleichgewicht

Jede Bewegung eines starren Körpers kann man aus einer Translations- und einer Rotationsbewegung zusammensetzen

Gleichgewichtsbedingungen:

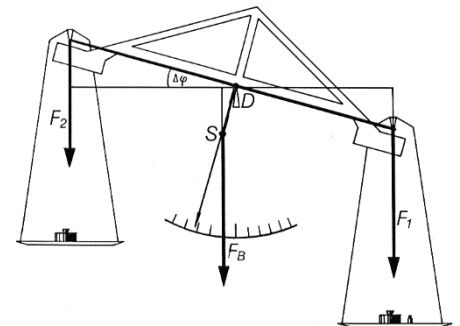
$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

Wird ein starrer Körper an einem Punkt im raum fixiert, dann werden alle äußeren Kräfte durch die Aufhängung kompensiert und reduziert die Gleichgewichtsbedingung zu:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

Waage: An dem Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der rechtsdrehenden Momente gleich der der linksdrehenden Momente ist.



Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

Ein Körper, der in seinem Schwerpunkt unterstützt wird, bleibt in jeder Lage im Gleichgewicht.

Starrer Körper aus Einzelmassen hat gleiches Drehmoment wie gedachte Einzelmasse

$$m_{ges} = m_1 + m_2 \text{ bei } x_s.$$

Im **Gravitationsfeld**

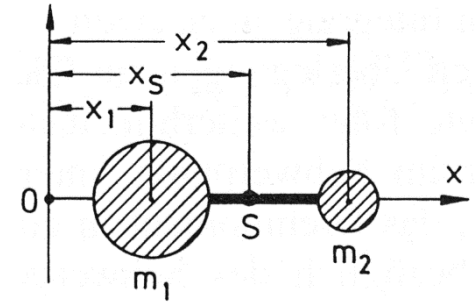
An jeder Masse m wirkt die Gewichtskraft: $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$

Im Massenmittelpunkt S, soll gelten: $\sum_i m_i \cdot \vec{g} = m_{ges} \cdot \vec{g} = \vec{G}_{ges}$

Schwerpunkt x_s :

$$m_1 \cdot g \cdot x_1 + m_2 \cdot g \cdot x_2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot x_s$$

$$x_s = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

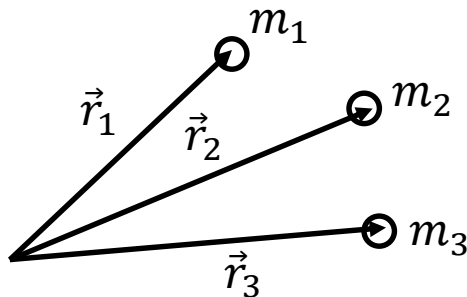


Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

Besteht das System aus mehrere Massenpunkten m_i , dann gilt für die x -Koordinate und analog auch für die beiden anderen Raumkoordinaten des Schwerpunktes:

$$x_s = \frac{\sum_i m_i \cdot x_i}{\sum_i m_i} \quad y_s = \frac{\sum_i m_i \cdot y_i}{\sum_i m_i} \quad z_s = \frac{\sum_i m_i \cdot z_i}{\sum_i m_i}$$

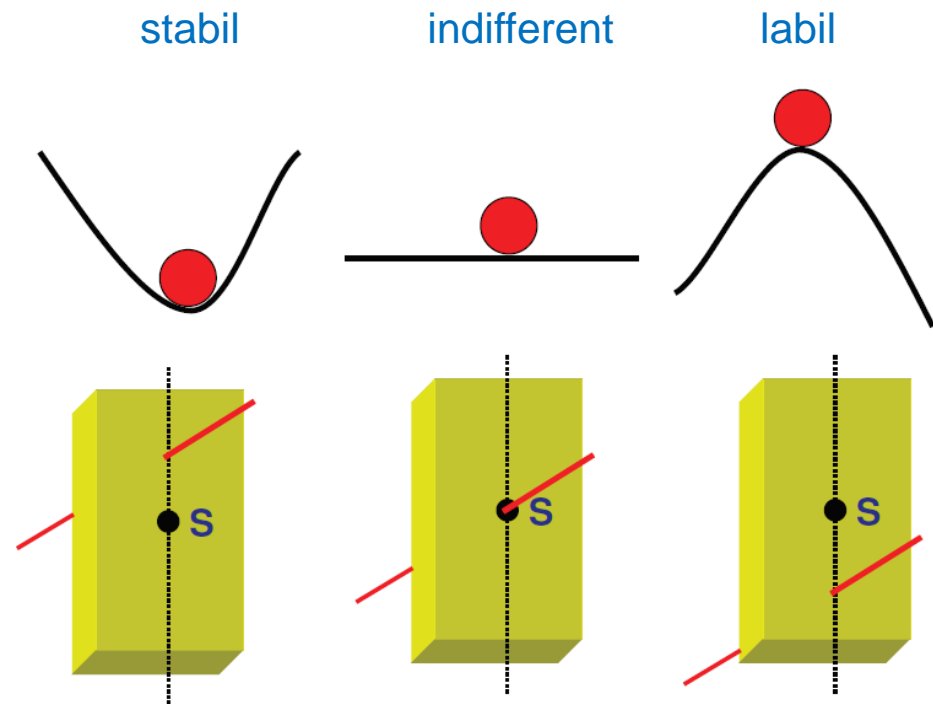
Vektoriell:



$$m_{ges} \cdot \vec{r}_s = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

Gleichgewichtslagen

- **Stabiles Gleichgewicht:** wenn der Schwerpunkt die tiefstmögliche Lage hat und sich daher bei jeder Bewegung des Körpers nur aufwärts bewegen kann.
- **Indifferentes Gleichgewicht:** wenn der Schwerpunkt sich bei Verschiebung des Körpers stets horizontal bewegt.
- **Labiles Gleichgewicht:** wenn der Schwerpunkt bei jeder Verschiebung des Körpers sinkt



Hebelgesetz

Hebel: Ein um eine Achse drehbarer Körper, an dem zwei oder mehrere parallele Kräfte angreifen

Gleichgewicht = kein Drehmoment

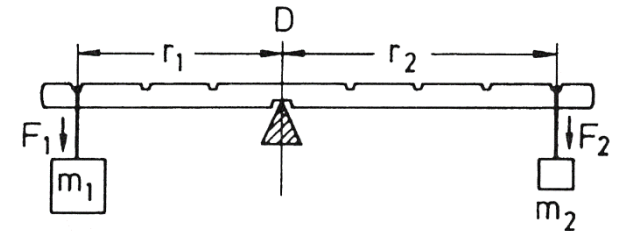
$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

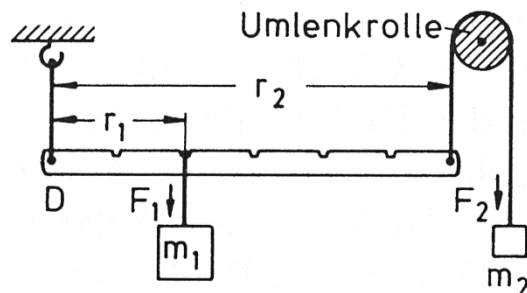
$$a_1 \cdot F_1 = a_2 \cdot F_2$$

Hebelgesetz:

Kraftarm mal Kraft = Lastarm mal Last



zweiarmiger Hebel:
Beiträge und Richtungen
 \vec{r}_1 und \vec{r}_2 verschieden



einarmiger Hebel
Beiträge und Richtungen
 \vec{F}_1 und \vec{F}_2 verschieden

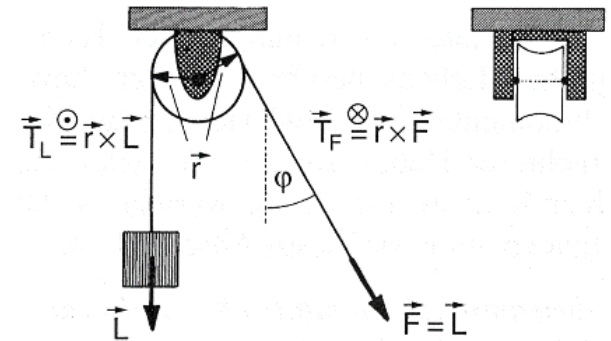
Die Rolle

▪ Feste Rolle

- Vektor \vec{T}_L zeigt aus der Zeichenebene heraus.
- Vektor \vec{T}_F zeigt in die Zeichenebene hinein.

$$\vec{T}_L + \vec{T}_F = 0$$

$$r \cdot L = r \cdot F \text{ oder } F = L$$

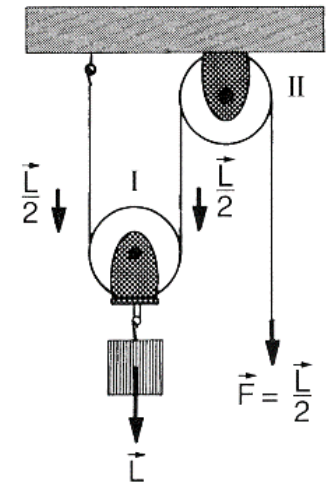


Bei der festen Rolle herrscht Gleichgewicht, wenn die Kraft gleich der Last ist.

▪ Lose Rolle

- Die an der losen Rolle I hängende Last L wird von den beiden Seilabschnitten zu gleichen Teilen getragen, womit im Fall des Gleichgewichtes die Kraft wie folgt ist:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{2} \vec{L}$$



An der losen Rolle herrscht Gleichgewicht, wenn die Kraft halb so groß ist wie die Last.

Drehmoment, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment

Translatorische Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{mit } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Rotatorische Beschleunigung: Es muss nicht die Masse als Gesamtgröße, sondern es müssen der Abstand der Massenelemente und ihre Verteilung bezüglich der Drehachse berücksichtigt werden.

Analog zum II. Newton'schen Axiom ist die Beziehung zwischen dem Drehmoment \vec{M} und der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \quad \text{mit } \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$$

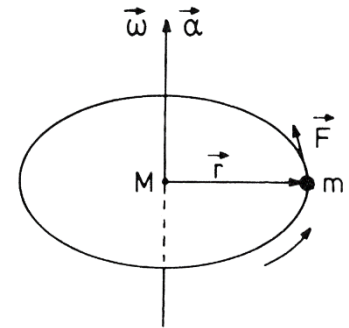
J = Trägheitsmoment

Drehmoment, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment

Drehmoment bei tangentialer Kraft auf kreisförmig umlaufendem Teilchen:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} M &= r \cdot F = r \cdot m \cdot a = r \cdot m \cdot \frac{dv}{dt} \\ &= r \cdot m \cdot r \cdot \frac{d\omega}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \alpha \end{aligned}$$



Trägheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r von der Drehachse:

$$J = m \cdot r^2$$

Einheit: kg m²

m : Mehr Masse → mehr Trägheit

r^2 : weiter außen → größere Bahngeschwindigkeit → mehr Trägheit

starr verbundene Massepunkte:

$$J = \sum_i^n m_i \cdot r_i^2$$

kontinuierliche Masseverteilung:

$\rho(r)$ = Dichte an Ort \vec{r}

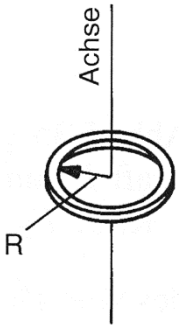
r = Abstand zur Drehachse

$$J = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \rho(r) dV$$

Einige Trägheitsmomente

Gesamtmasse m_{ges}

dünner Ring, dünner Hohlzylinder: $J = m_{ges} \cdot R^2$



Scheibe, Vollzylinder:

Scheibe zerlegen in eine Anzahl konzentrischer Ringe der Dicke h , der Breite dr und dem Abstand r von der Drehachse

→ Masse eines Kreisringes

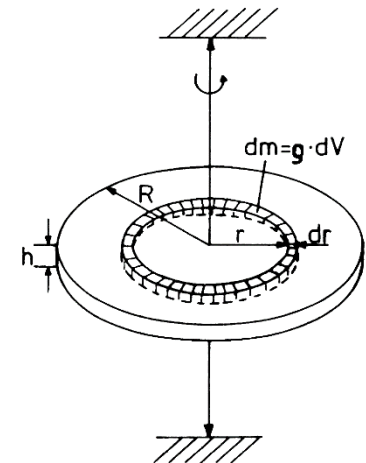
$$dm = \rho dV = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot \rho \cdot dr$$

$$J = \int r^2 \cdot dm = 2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr = \frac{2\pi \cdot h \cdot \rho}{4} \cdot r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi \cdot h \cdot \rho \cdot R^4$$

Volumen $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

Masse $m_{ges} = \rho \cdot V$ der Scheibe

$$J = \frac{1}{2} m_{ges} \cdot R^2$$



Einige Trägheitsmomente

Dünner Kreiskring (äquatorial):

$$J = \frac{1}{2} m_{ges} \cdot R^2$$

Hohlzylinder mit nicht vernachlässigbarer Wandstärke:

$$J = \frac{1}{2} m_{ges} \cdot (R_1^2 + R_2^2)$$

Homogener (Voll-)Zylinder oder eine dicke Scheibe (äquatorial):

$$J = \frac{1}{12} m_{ges} \cdot (3R^2 + h^2)$$

Dünner zylindrischer Stab ($R \ll h$):

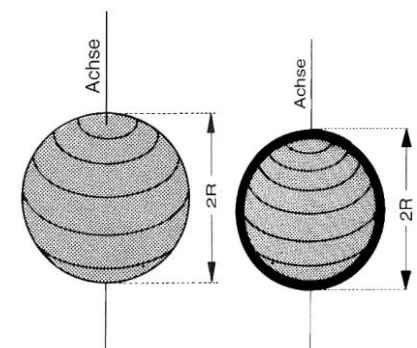
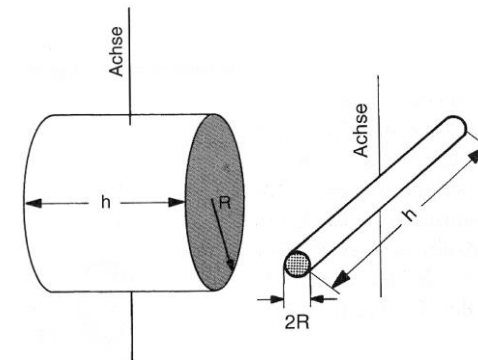
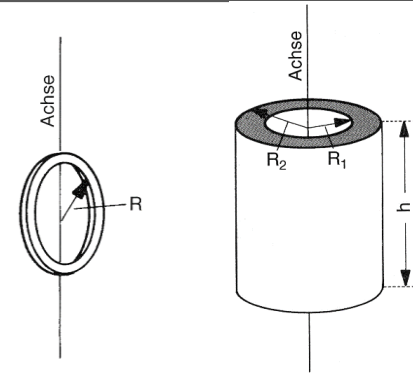
$$J = \frac{1}{12} m_{ges} \cdot h^2$$

Vollkugel:

$$J = \frac{2}{5} m_{ges} \cdot R^2$$

Dünnwandige Hohlkugel:

$$J = \frac{2}{3} m_{ges} \cdot R^2$$

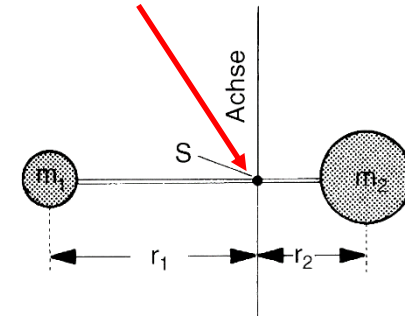


Beispiel Trägheitsmoment

Hantel (Modell eines zweiatomigen Moleküls):

Gemeinsamer Massenmittelpunkt

$$J = m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot R^2 = \mu \cdot R^2$$



$R = r_1 + r_2 =$ der Abstand der beide Massenmittelpunkte

$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} =$ die sogenannte reduzierte Masse

Satz von Steiner

Ist das Trägheitsmoment J_S für eine Achse durch den Massenmittelpunkt des Körpers bekannt, so lässt sich das Trägheitsmoment J_A bezüglich einer dazu parallelen aber sonst beliebigen Drehachse im Abstand a nach dem Steiner'schen Satz berechnen.

$$J_A = J_S + m_{ges} \cdot a^2$$

Arbeit, Energie und Leistung

Die **Energie** gehört zu den wichtigsten Größen der Physik.

Die **Energie** bleibt über alle Zustandsänderungen hinweg erhalten.

Größen, die ihren Wert – gleichgültig ob als Skalar oder Vektor – als Funktion der Zeit nicht verändern, heißen **Erhaltungsgrößen**; für sie gilt ein **Erhaltungssatz**.

Die **Arbeit W** (work) ist das Produkt aus der Kraft und dem Weg, den der Körper unter Wirkung der Kraft zurücklegt.

Unter **Energie** versteht man die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Die **Energie** ist, ebenso wie die Arbeit, **eine skalare Größe**, und beide werden in derselben SI-Einheit, dem **Joule (J)** gemessen.

Die **Leistung** (power) ist der Quotient aus der verrichteten Arbeit und der dazu benötigten Zeit.

Arbeit

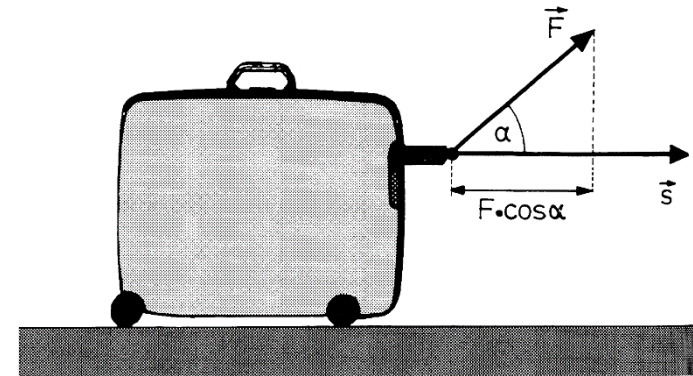
Arbeit = Kraft mal Weg

Wenn \vec{F} und \vec{s} parallel:

$$W = F \cdot s$$

Allgemein:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$



Einheit: $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{J (Joule)}$

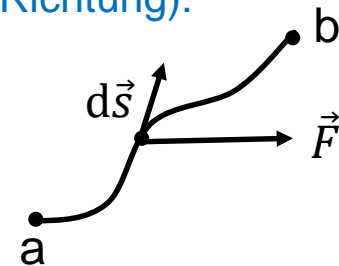
Beachte: Das Vorzeichen der Arbeit kann positiv oder negativ sein!

Eine die Bewegung antreibende Kraft (parallel zum Weg) verrichtet eine positive Arbeit, eine Bremskraft (antiparallel zum Weg) dagegen eine negative Arbeit.

Beliebige Bewegung (\vec{F} evtl. nicht konstant, s ändert Richtung):

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

„Linienintegral“

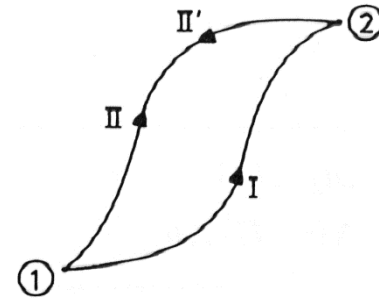


Potentielle Energie

Erfährt ein Körper in jedem Punkt des Raumes eine wohldefinierte, durch dessen Ortskoordinaten eindeutig bestimmte Kraft, so sagt man es liege ein **Kraftfeld** vor.

Konservatives Kraftfeld, bzw. Kraft: Arbeit unabhängig vom speziell gewählten Weg I oder II, d.h. $W_I = W_{II}$.

In einem konservativen Kraftfeld verschwindet die Arbeit bei der Verschiebung eines Körpers auf einem geschlossenen Weg, d.h. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$
(z.B. erst Weg I und dann Weg II')



Beispiele konservative Kräfte: Gravitationskraft, Federkraft

Nichtkonservatives Kraftfeld, bzw. Kraft: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$

Beispiel: Reibungskraft

Ein Teil der verrichteten Arbeit wird in Wärme umgewandelt, wenn ein Körper während seiner Bewegung eine Reibungskraft erfährt.

Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Die Arbeit ist unabhängig vom Weg und nur abhängig von der Lage des Anfangs- und Endpunktes bei der Verschiebung eines Körpers.

Hubarbeit:
$$W = \int_{h_1}^{h_2} G \cdot dh = \int_{h_1}^{h_2} m \cdot g \cdot dh = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Ein Körper im Schwerfeld der Erde, in der Höhe h über der Erdoberfläche, besitzt die **potentielle Energie**:

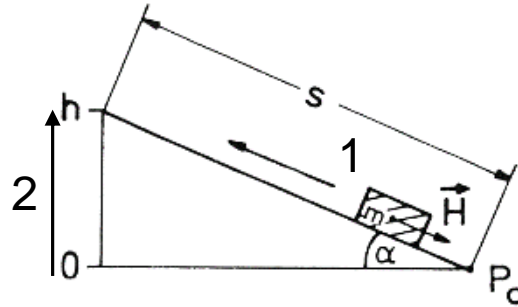
$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Bei festem Bezugspunkt für die potentielle Energie (in unserem Fall die Erdoberfläche) gilt:

Dem Raum wird außer dem Kraftfeld auch ein Potentialfeld und jedem Raumpunkt ein definiertes Potential, das **Gravitationspotential**, zugeordnet.

Beispiel: potentielle Energie im Gravitationsfeld

Bewegung Masse m nach oben auf einer schiefen Ebene



$$W_1 = \vec{H} \cdot \vec{s} = H \cdot s = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = m \cdot g \cdot h$$

$$W_2 = E_{pot}(h) - E_{pot}(0) = m \cdot g \cdot h$$

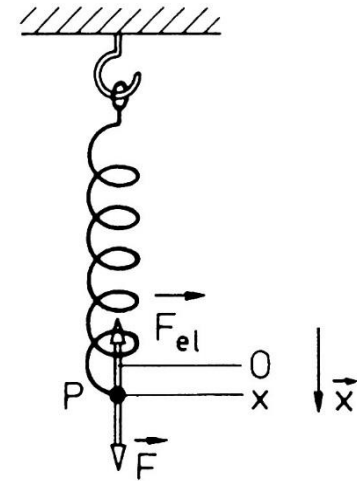
Goldene Regel der Mechanik: Die „Ersparnis“ an Kraft längs der schiefen Ebene geht zu „Lasten“ des Weges, denn das Produkt Kraft mal Weg bleibt erhalten.

Federpotential

Federkraft: $F = D \cdot x$

Verformungsarbeit:

$$W = \int_0^x F \cdot ds = \int_0^x D \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} D \cdot x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$



Die Verformungsarbeit wird in der Feder bezüglich ihre Ruhelage als potentielle Energie gespeichert.

$$E_{pot}(x = 0) = 0$$

$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

Kinetische Energie der Translation

Ein Körper, auf den beschleunigende Kräfte oder Drehmomente angreifen, die eine Änderung der translatorischen Geschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit verursachen, besitzt eine weitere mechanische Energieform, die **kinetische Energie**.

Translatorische Bewegung:

$$\begin{aligned}W_{s_1 \rightarrow s_2} &= \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} m \cdot a \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds \\&= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} \\&= \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \\W_{0 \rightarrow v} &= \frac{1}{2} m \cdot v^2\end{aligned}$$

Ein Körper der Masse m , welcher sich translatorisch mit der Geschwindigkeit v bewegt, besitzt die **kinetische Energie**:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Kinetische Energie der Rotation

Der i -te Massenpunkt m_i im senkrechten Abstand r_i von der Drehachse läuft bei der Winkelgeschwindigkeit ω mit der Bahngeschwindigkeit $v_i = \omega \cdot r_i$ auf einer Kreisbahn um.

$$E_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot \omega \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i \cdot r_i^2) \cdot \omega^2$$

Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Beschleunigungsarbeit:

$$\begin{aligned} W_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J \cdot \alpha \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{2} J \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \cdot \omega_1^2 \\ &= E_{rot}(\varphi_2) - E_{rot}(\varphi_1) = \Delta E_{rot} \end{aligned}$$

Beispiel: Rollender Körper

Körper, die bei einer translatorischen Bewegung auch noch eine Rotationsbewegung ausführen, besitzen sowohl kinetische Energie der Translation als auch der Rotation:

$$E_{kin} = E_{rot} + E_{trans}$$

Kinetische Energie bezüglich der momentanen Drehachse P:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_P \cdot \omega^2$$

Nach dem Satz von Steiner gilt:

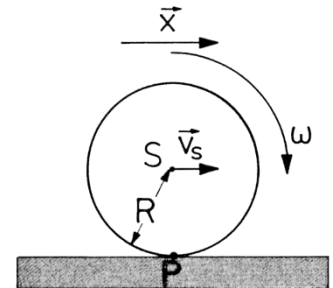
$$J_P = J_S + m_{ges} \cdot R^2$$

Die kinetische Energie folgt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_S \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_{ges} \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_S \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_{ges} \cdot v_S^2$$

$$E_{kin} = E_{rot} + E_{trans}$$



Energieerhaltung

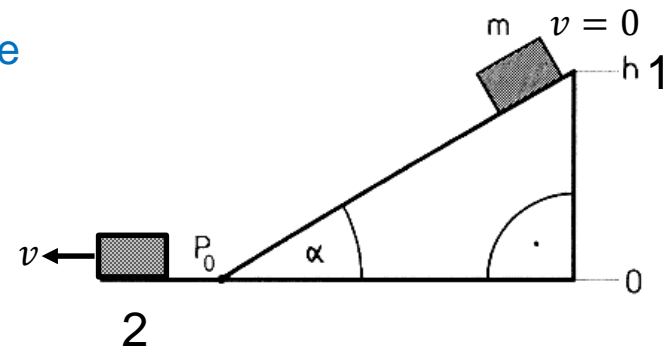
Energieerhaltungssatz der Mechanik: In jedem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie, das ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie, konstant.

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = \text{const.}$$

Abgeschlossenes System: Für den Körper sind nur systemeigene „innere Kräfte“ des vorgegebenen (konservativen) Kraftfeldes wirksam, es greifen keine „äußeren“ Kräfte ein.

Beispiel: Ein Körper gleitet eine schiefe Ebene aus der Höhe h reibungsfrei herab.

$$\begin{aligned} E_{ges,1} &= E_{ges,2} \\ m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 \\ v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \end{aligned}$$



Energieerhaltung

Treten allerdings nichtkonservative Kräfte auf, beispielsweise die Reibungskraft, ist der Energieerhaltungssatz nicht gültig.

Zum Beispiel: das auftreten von Reibungskräften verursacht Verlust an mechanische Energie in Wärme.

Im abgeschlossenen System gilt dann bei Anwesenheit nichtkonservativer Kräfte:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} + Q = \text{const.}$$

Wärmeenergie

In jedem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie konstant:

$$\sum_i E_i = \text{const.}$$

Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden; sie kann nur umgewandelt werden.

Geschwindigkeit nach freiem Fall

Wozu sind Energieerhaltungsgesetze gut?

- Verständnis der fundamentalen Zusammenhänge
- Erleichterung bei der Berechnung konkreter Größen

Beispiel: Geschwindigkeit nach freiem Fall

Aus Lösung der DGL

$$m \cdot a = m \cdot g$$

Jeweils durch
Integrieren



$$v = g \cdot t \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{g v^2}{2 g^2} = \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

über den Energieerhaltungssatz

$$E_{pot, vorher} = E_{kin, nachher}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Leistung

Beachte: Zur Berechnung der Arbeit spielt es bei gegebener Kraft keine Rolle, in welcher Zeit der Weg durchlaufen wird, es kommt nur auf den Weg an.

Die **Leistung** (power) ist der Quotient aus der verrichteten Arbeit und der dazu benötigten Zeit.

mittlere Leistung:

$$\bar{P} = \frac{\text{Gesamtarbeit}}{\text{Gesamtzeit}} = \frac{W}{t}$$

momentane Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Einheit: $\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ (Watt)

historisch: 1 PS \approx 736 W

Leistung

Außerdem gilt:

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt$$

Für konstante Leistung in der Zeit t bis t_0 , gilt für die Arbeit:

$$W = P \cdot t$$

Die Leistung ergibt sich auch als das Skalarprodukt aus Kraft \vec{F} und Geschwindigkeit \vec{v} .

$$dW = P \cdot dt$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$P \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Impuls

Der **Impuls** \vec{p} eines Körpers der Masse m , das sich translatorisch mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, ist das Produkt aus m und \vec{v} .

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\text{Einheit: } \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{s}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{konstante Masse})$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2. Newton'sches Axiom: (allgemeine Formulierung)

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte.

Impuls

Diese allgemeine Formulierung umfasst auch die Fälle bei denen sich außer der Geschwindigkeit auch die Masse eines Körpers zeitlich verändert.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

d.h. für konstante Masse: $\vec{F} = 0 + m \cdot \vec{a}$

Es gibt eine direkte Beziehung zwischen dem Impuls und der kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{m}{m} \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{(m \cdot v)^2}{2m}$$

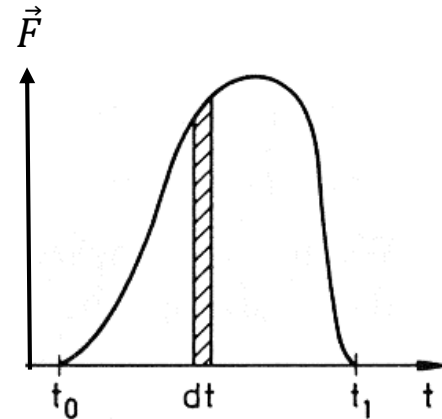
$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

Kraftstoß

Erfährt ein Körper eine Krafteinwirkung während einen Zeitintervall führt dies zu einer Änderung des Impulses.

Kraftstoß: Zeitintegral der Kraft

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \Delta\vec{p}$$



Der Kraftstoß ist gleich der gesamten Änderung des Impulses $\Delta\vec{p}$ zwischen den Zeiten t_0 und t_1 .

Für konstante Kraft im Intervall Δt :

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Impulserhaltung

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{ges} = const.$$

Bemerkung: Vorausgesetzt wird die Betrachtung eines „abgeschlossenen“ Systems, d.h. es wirken keine „äußeren Kräfte“.

Betrachte zwei Massen m_1 und m_2 auf die Gegenseitig die inneren Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 einwirken:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

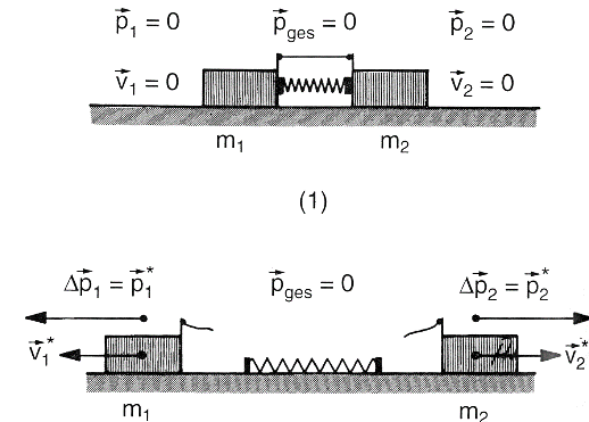
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

entspricht dem 3. Newton'sches Axiom!

Beispiel

Zu Beginn des Experiments werden die beiden Körper zusammengeschoben und die mit der Feder gegeneinander verspannten Körper fixiert man durch einen dünnen Faden zur Kräftekompensation \longrightarrow äußere Kräfte erforderlich, d.h. nicht abgeschlossenes System!



Zeitpunkt t_0 : der dünne Faden wird mittels einer Flamme durchgebrannt \longrightarrow das System bleibt sich nun selbst überlassen, d.h. es ist abgeschlossen.

Infolge bewirken die Federkräfte eine Beschleunigung und damit eine Impulsänderung für eine Zeitspanne Δt , bis die Feder völlig entspannt ist.

3. Newton'sches Axiom: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Impulsänderung:
$$d\vec{p}_1 = \vec{F}_1 \cdot dt = -\vec{F}_2 \cdot dt = -d\vec{p}_2$$

Kraftstoß:
$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}_1 \cdot dt = - \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}_2 \cdot dt = -\Delta\vec{p}_2$$

Impulserhaltung:
$$\Delta\vec{p}_{ges} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

Beispiel

Die Körper der Masse m_1 bzw. m_2 können jedoch durch den Kraftstoß Einzelimpulse \vec{p}_1^* bzw. \vec{p}_2^* besitzen, da gilt:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1^* - \vec{p}_1 = \vec{p}_1^* = m_1 \cdot \vec{v}_1^* \neq 0$$

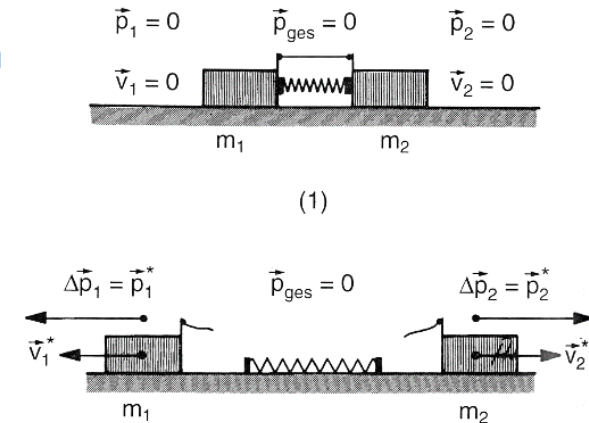
$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2^* - \vec{p}_2 = \vec{p}_2^* = m_2 \cdot \vec{v}_2^* \neq 0$$

Die Impulse \vec{p}_1^* und \vec{p}_2^* sind betragsmäßig gleich groß und antiparallel zueinander gerichtet:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = m_1 \cdot \vec{v}_1^* + m_2 \cdot \vec{v}_2^* = 0$$

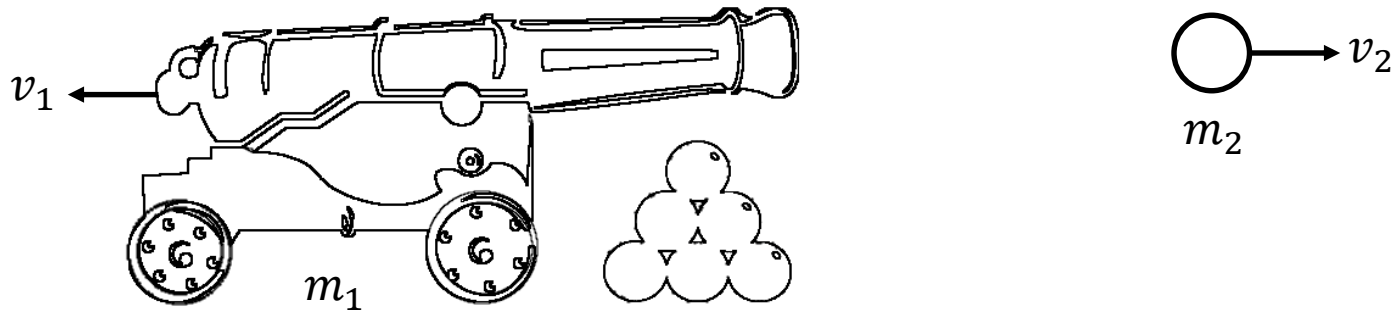
d.h. betragsmäßig: $m_1 \cdot v_1^* = m_2 \cdot v_2^*$

Der Körper mit der größeren Masse bewegt sich also mit der kleineren Geschwindigkeit und umgekehrt.



Rückstoß

Rückstoß beim Abfeuern einer Kugel aus eine Kanone:



keine Energieerhaltung (chemische Energie aus Explosion)

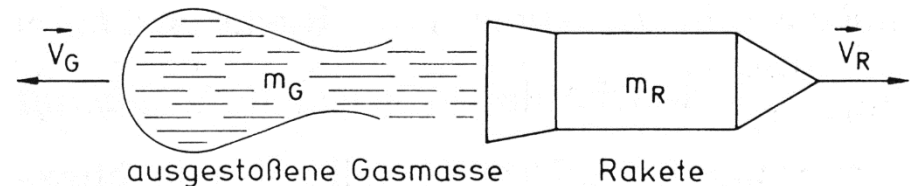
vorher: $v_1 = 0; v_2 = 0$

$$p_{ges} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0$$

nachher: $p_{ges} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0$

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{v_2}{v_1} \longrightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot v_2$$

Raketenantrieb



- Rakete (Masse $m_R(t)$, Geschwindigkeit $v_R(t)$) funktioniert nach dem Rückstoß-Prinzip, das auch der Impulserhaltung folgt.
- Das Treibmittel wird mit großer Geschwindigkeit \vec{v}_g in die Richtung entgegen der eigenen Beschleunigung ausgestoßen.
- Damit ändert sich die Raketenmasse m_R als Funktion der Zeit!

Impulserhaltung: $\vec{p}_G + \vec{p}_R = \text{const.} \longrightarrow \vec{F}_G + \vec{F}_R = 0.$

2. Newton'sches Axiom:
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Kraft auf Rakete:

$$F_R = m_R \cdot a_R = m_R \cdot \frac{dv_R}{dt} = v_G \cdot \left(-\frac{dm_R}{dt} \right)$$

Raketenantrieb

Daher ist der „Schub“ (sei hier konstant):

$$\frac{1}{m_R} \cdot \frac{dm_R}{dt} = -\frac{1}{v_G} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Lösung der Differentialgleichung:

$$\ln \frac{m_R}{m_0} = -\frac{v}{v_G}$$

d.h. $v(m_R(t)) = -v_G \ln \frac{m_R(t)}{m_0}$

d.h. $m_R(v(t)) = m_0 e^{-v(t)/v_G}$

Stoßgesetze

Stoß: Wechselwirkung zwischen Körpern oder Teilchen in Stoßzeiten, die klein gegenüber der Beobachtungszeit sind.

Betrachte Körper 1 und 2 mit Massen m_1 , bzw. m_2 und Geschwindigkeiten vorher $\vec{v}_{1,2}$ und nachher $\vec{u}_{1,2}$.

Abgeschlossenen Zwei-Körper-system: es wirken keine äußeren Kräfte. Dan gelten die Erhaltungssätze für Impuls und Energie:

Summe der Impulse vor dem Stoß gleich Summe der Impulse nach dem Stoß.

Summe der Energien vor dem Stoß gleich Summe der Energien nach dem Stoß.

Stoßgesetze: elastischer stoß

Elastischer Stoß: Summe kinetischen Energien vor und nach dem Stoß gleich, z.B. nur Übertragung kinetische Energie der Translation

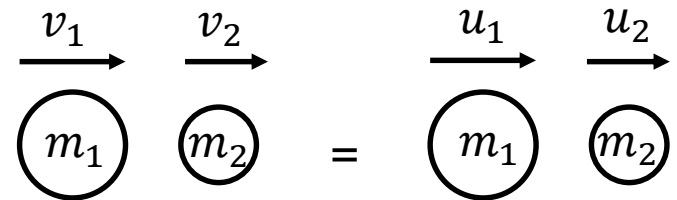
Impulserhaltungssatz:

$$m_1 \cdot \overset{\text{vorher}}{\vec{v}_1} + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \overset{\text{nachher}}{\vec{u}_1} + m_2 \cdot \vec{u}_2$$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2$$

Zusätzlich Beschränkung auf zentralen Stoß (Gegensatz zu exzentrisch), dann 1-dim. d.h. es reicht die Betrachtung einer Komponente der Vektoren



Stoßgesetze: zentraler elastischer stoß

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad \longrightarrow \quad m_1 \cdot (v_1 - u_1) = m_2 \cdot (u_2 - v_2)$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 \quad \longrightarrow \quad m_1 \cdot (v_1^2 - u_1^2) = m_2 \cdot (u_2^2 - v_2^2)$$

$$m_1 \cdot (v_1 - u_1) \cdot (v_1 + u_1) = m_2 \cdot (u_2 - v_2) \cdot (u_2 + v_2)$$

Also $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$

Oder $v_1 - v_2 = u_2 - u_1$

Der Betrag der Relativgeschwindigkeit ändert sich nicht.

Einsetzen von u_2 bzw. u_1 ergibt für die **Endgeschwindigkeiten**:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Stoßgesetze: zentraler elastischer stoß

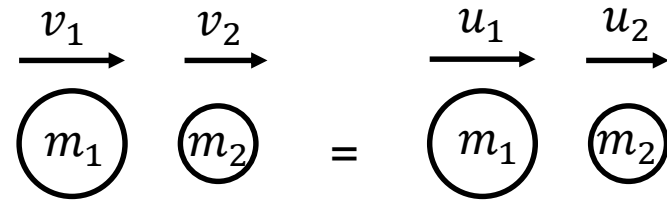
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Betrachte die Spezialfälle:

a) Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$

$$\longrightarrow u_1 = v_2 \quad u_2 = v_1$$

d.h. Austausch der Geschwindigkeiten



b) Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$ und $v_2 = 0$

$$\longrightarrow u_1 = 0 \quad u_2 = v_1$$

d.h. Austausch der Geschwindigkeiten

c) Bei sehr großer Projektilmasse $m_1 \gg m_2$ und $v_2 = 0$

$$\longrightarrow u_1 \approx v_1 \quad u_2 \approx 2v_1$$

d.h. kaum Energie- und Impulsübertrag, aber Teilchen 2 hat nach dem Stoß die doppelte Geschwindigkeit von Teilchen 1

d) Bei sehr großer Masse $m_2 \gg m_1$ und $v_2 = 0$

$$\longrightarrow u_1 \approx -v_1 \quad u_2 \approx 0$$

d.h. Übertrag des doppelten Impulses aber keine Energie-Übertragung

Stoßgesetze: elastische Reflexion an einer Wand

Spezialfall d) gilt auch für die elastische Reflektion einer Kugel an einer Wand bei senkrechten Einfall (Winkel $\alpha = 0^\circ$).

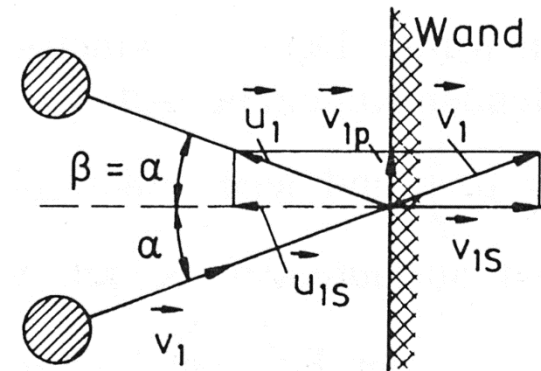
Schiefer stoß einer Kugel an einer Wand:

Reflexion einer Kugel, die unter dem Einfallswinkel α auf eine Wand elastisch stößt und unter dem Reflexionswinkel β von der Wand wieder zurückprallt.

Zerlegung der Geschwindigkeit \vec{v}_1 in Komponenten:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1p} + \vec{v}_{1s}$$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_{1p} - \vec{v}_{1s}$$



Beachte: die Wand nimmt keine Energie auf, doch erfährt einen Kraftstoß durch die Impulsänderung.

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \Delta t &= \Delta \vec{p} = m_1 \cdot \vec{u}_{1s} - m_1 \cdot \vec{v}_{1s} = -m_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \cos \alpha - m_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \cos \alpha \\ &= -2 \cdot m_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

Auf die Wand wird der doppelte Impuls der Kugel übertragen.

Stoßgesetze: inelastischer stoß

Inelastischer Stoß: Summe kinetischen Energien vor und nach dem Stoß nicht erhalten, z.B. durch auftreten von Wärme- oder Deformationsenergie.

Impulserhaltungssatz:

$$m_1 \cdot \overset{\text{vorher}}{\vec{v}_1} + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \overset{\text{nachher}}{\vec{u}_1} + m_2 \cdot \vec{u}_2$$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 + Q$$

Q: die Wärmetönung, d.h. der Anteil der Bewegungsenergie, der in eine andere Energieform umgewandelt wird.

Allgemeiner Fall: Q nicht bekannt, daher keine Energiebilanz möglich und daher können auch die Geschwindigkeiten nach dem Stoß nicht berechnet werden.

Spezialfall: Voll inelastischer oder plastischer Stoßprozess:

Körper bleiben nach dem Stoß zusammen und bewegen sich daher mit gleicher Geschwindigkeit.

Stoßgesetze: voll inelastischer stoß

Impulserhaltungssatz:

vorher

nachher

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \cdot u^2 + Q$

Endgeschwindigkeiten: $u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$

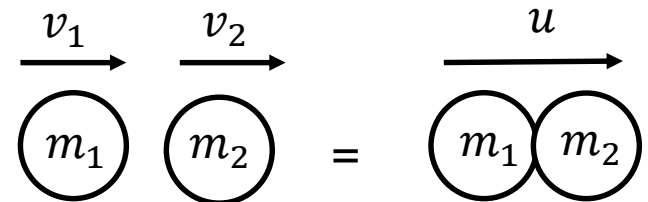
a) Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$

$\longrightarrow u_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$

d.h. Geschwindigkeit nach dem Stoß ist dem arithmetischen Mittel der beide Geschwindigkeiten vor dem Stoß

b) Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$ und $v_2 = 0$

$$u_1 = \frac{1}{2} v_1$$



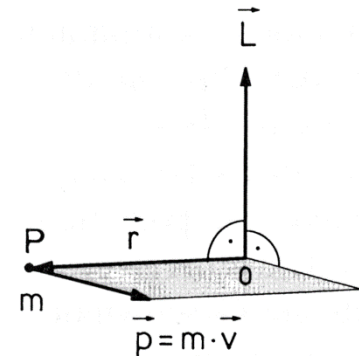
Drehimpuls

Der momentane Bewegungszustand eines Körpers wird bei der Translation durch den Impuls \vec{p} beschrieben und analog bei der Rotation durch den Drehimpuls \vec{L} .

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\text{Einheit: } \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} = \text{J} \cdot \text{s}$$



Drehimpuls bei gleichförmigen Bewegung der Masse auf einer Kreisbahn:

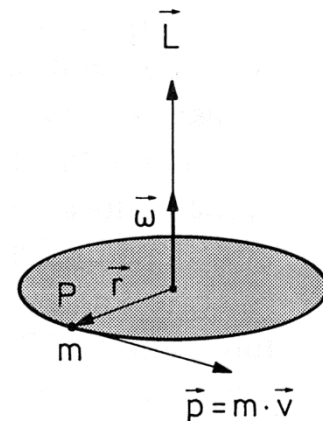
Der Drehimpuls zeigt immer in die Normalenrichtung senkrecht zur Kreisebene.

$$|\vec{L}| = L = m \cdot r \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega = J \cdot \omega$$

Im Fall der Kreisbewegung sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ parallel.

Starrer Körper, Trägheitsmoment J:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$



Drehung um eine feste Hauptträgheitsachse (Symmetrieachse)

Beachte: im allgemeinen Fall zeigt \vec{L} jedoch nicht in dieselbe Richtung wie $\vec{\omega}$. 121

Drehimpulserhaltung

Analog zur Beziehung zwischen Impuls und Kraft gibt es auch eine direkte Beziehung zwischen Drehimpuls und Drehmoment.

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \text{ mit } \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} \quad \vec{M} = J \cdot \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{L}} = \frac{dL}{dt}$$

Allgemeinen Formulierung:

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines Körpers ist gleich der Summe der angreifenden Drehmomente.

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} = \frac{dL}{dt}$$

keine äußeren Drehmomente: $\vec{M} = 0 \longrightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots = \sum_k \vec{L}_k = \vec{L}_{ges} = const.$$

Bemerkung: Vorausgesetzt wird die Betrachtung eines „abgeschlossenen“ Systems, d.h. es wirken keine „äußeren Drehmomente“.

Drehimpulserhaltung: Beispiele

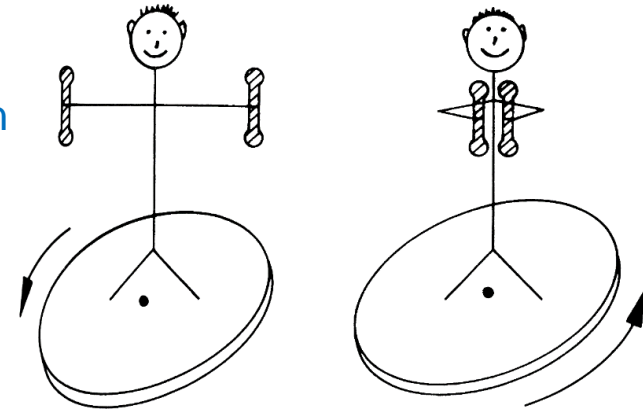
- Pirouetten einer Eiskunstläuferin

Wenn sie sich selber mit ausgestreckten Armen in Bewegung setzt ist der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}.$$

Zieht sie ihre Armen an ihren Körper heran, dann ändert sich die Massenverteilung; J wird kleiner.

Aber Drehimpuls muss erhalten werden; daher erhöht sich die Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Eiskunstläuferin.

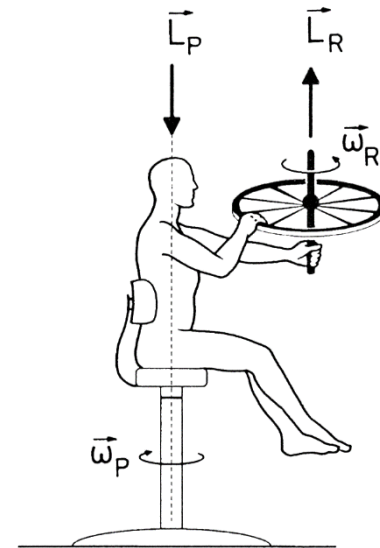


- Person sitzt auf Drehstuhl und hält das Rad eines Fahrrads

Drehimpuls Rad: $\vec{L}_R = J_R \cdot \vec{\omega}_R$

Drehimpuls Person und Drehstuhl: $\vec{L}_P = J_P \cdot \vec{\omega}_P$

Nach dem Drehimpulssatz: $\vec{L}_R + \vec{L}_P = 0 \rightarrow \vec{\omega}_P = -\vec{\omega}_R \cdot \frac{J_R}{J_P}$



Analogie zw. Translationen und Rotationen

Translationsbewegung

Rotationsbewegung

Ort	$\vec{x}(t)$	Winkel	$\vec{\varphi}(t)$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Masse	m	Trägheitsmoment	J
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Drehmoment	$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
Impulserhaltung	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots$ $= \sum_k \vec{p}_k = \text{const.}$	Drehimpulserhaltung	$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$ $= \sum_k \vec{L}_k = \text{const.}$
Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	Energie	$\frac{1}{2} J \omega^2$

Potentiale und Kräfte

Potential

$$E_{pot}(x) = - \int_0^x \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

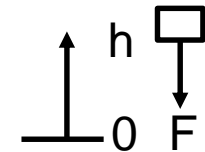
Kraft

$$\vec{F}(x) = - \frac{dE(x)}{dx}$$

Schwerefeld

$$E_{pot}(h) = m \cdot g \cdot h$$

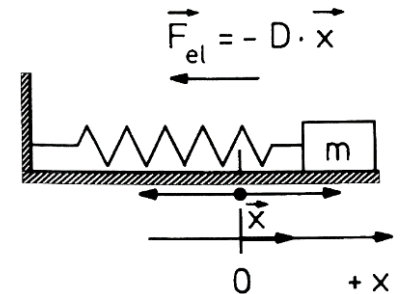
$$F_g = -m \cdot g$$



Feder

$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

$$F = -D \cdot x$$



Reibungskräfte

Nicht konservativ \rightarrow kein Potential

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Haft-, Gleitreibung

$$F_R \sim v$$

laminare Strömung

$$F_R \sim v^2$$

turbulente Strömung 125

Schwingungen

In der Natur, wie auch in vielen Bereichen der Naturwissenschaften und der Technik, gibt es zahlreiche **periodische Phänomene**, d.h. periodische Veränderungen bestimmter (physikalischer) Größen.

Periodische Vorgänge oder Bewegungen sind Vorgänge oder Bewegungen die sich in gleichen Zeitabschnitten wiederholen.

Solche periodischen Vorgänge in Abhängigkeit der Zeit bezeichnet man als **Schwingungen**.

Beispiele:

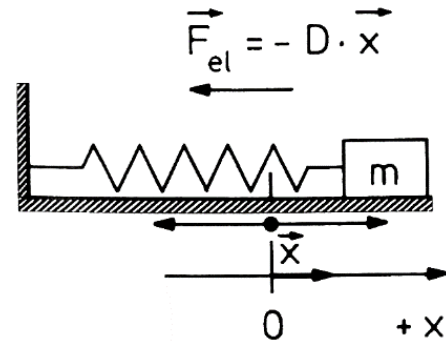
- Der Wechsel von Tag und Nacht aufgrund der Rotation der Erde um ihre eigene Achse
- (Langzeit-)Schwankungen in der Individuenzahl von Tierpopulationen
- Die Kontraktion des Herzmuskels
- Das Öffnen und Schließen der Ventile
- Der Hin- und Hergang eines Uhrenpendels

(Feder)-Schwingung

Federkraft (Rückstellkraft): $F = -D \cdot x$

Federkraft ist gleich der Trägheitskraft:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x$$



Beschreibung der Bewegung $x(t)$ durch Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x = 0$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators.

Lösungen für $x(t)$: $x(t) = A \sin(\omega \cdot t)$ und $x(t) = A \cos(\omega \cdot t)$

A = Amplitude

ω = Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Die Amplitude A ist beliebig, während die Kreisfrequenz durch den mechanischen Aufbau bestimmt wird.

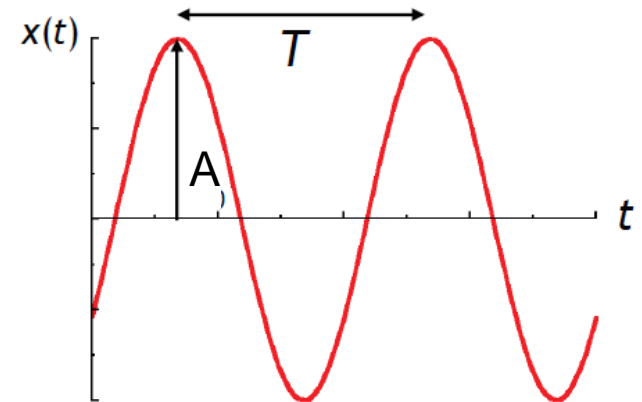
(Feder)-Schwingung

Äquivalente Schreibweisen zur Darstellung einer freien ungedämpften harmonischen (sinusförmigen) Schwingung:

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t)$$

$$x(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$



A = Amplitude in m

T = Schwingungsdauer in s

f = (Schwingungs-)Frequenz = $\frac{1}{T}$ in Hz = 1/s

ω = Kreisfrequenz = $2\pi \cdot f$ in Hz

Betrachte Federpendel: Dann ist A die Maximalauslenkung von der „Ruhelage“ des Pendels, d.h. die Position der Umkehrpunkte.

Federpendel und Drehpendel

Masse-Feder-Pendel:

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$

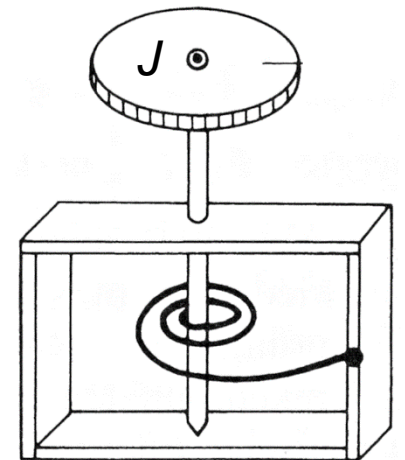
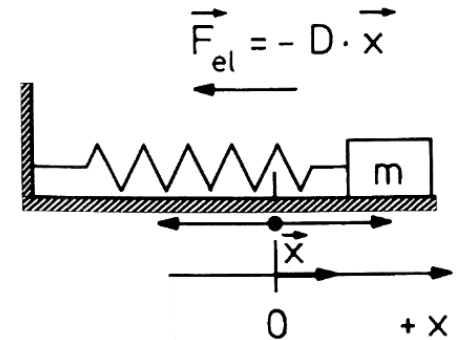
Schwingungsdauer: $T = \frac{1}{f} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

Drehpendel:

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$

Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$

Schwingungsdauer: $T = \frac{1}{f} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$



Drehfeder

$$M = D \cdot \varphi$$

Masse-Feder Pendel

Bei einem Pendel findet dauernd eine Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie und umgekehrt statt.

Voraussetzung: Änderung der Lageenergie im Schwerfeld der Erde ist klein gegenüber der Spannenergie der Feder bei der Oszillation um die Gleichgewichtslage.

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} D \cdot x^2 = E_{ges} = const.$$

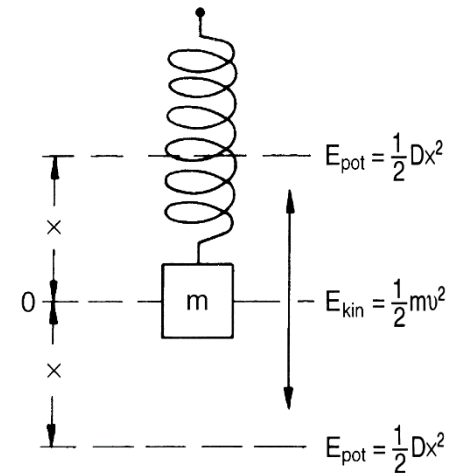
E_{kin}

E_{pot}

Mit $v = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{1}{2} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2} D \cdot x^2 = E_{ges} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} = 0$$

Die bisherigen Gleichungen sind für jedes Pendel gültig, solange die wirkenden Kräfte harmonische Kräfte sind, d.h. Rückstellkräfte, die betragsmäßig linear mit der Auslenkung aus der Ruhelage anwachsen.



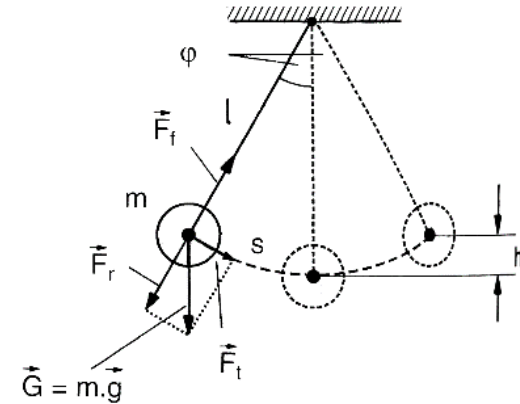
Fadenpendel

Idealisierte Form des mathematischen Pendels:

Bewegung auf Kreisbogen s bei Pendellänge l

$$m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = F(s) = -F_t$$

$$F_t = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$$



Beschreibung der Bewegung $s(t)$ durch Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0$$

Für kleine Winkel φ : $\sin \varphi \approx \varphi = \frac{s}{l}$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot s = 0$$

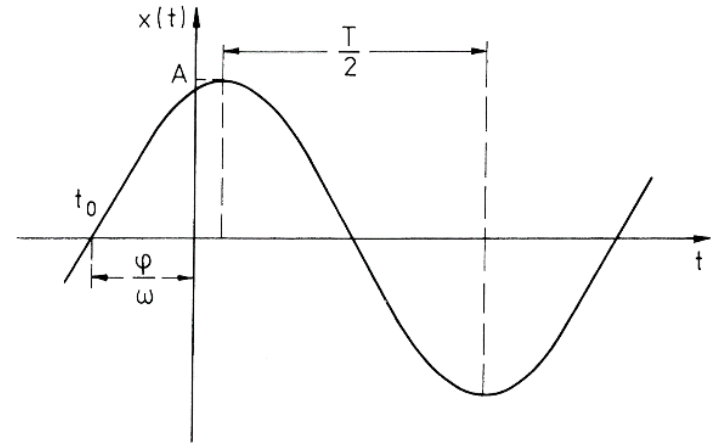
Lösung: $s(t) = A \sin(\omega \cdot t)$ und $s(t) = A \cos(\omega \cdot t)$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Harmonische Schwingung

Allgemeine Formulierung:

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



A = Amplitude: maximaler Absolutwert der Auslenkung

T = Schwingungsdauer: $x(t + T) = x(t)$

f = (Schwingungs-)Frequenz = $\frac{1}{T}$

ω = Kreisfrequenz = $2\pi \cdot f$

φ = (Anfangs-)Phase zum Zeitpunkt $t = 0$ bzw. Phasenwinkel bezüglich des Zeitnullpunktes

In Abbildung: Zeitpunkt des Nulldurchgangs: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

Gedämpfte Schwingungen

Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen: Systeme wobei keine Energieverluste auftreten.

Meistens treten jedoch Verluste in Form von Reibung auf, z.B. beim mechanischen Pendel durch Luftreibung oder Reibung bei der Aufhängung.

Freie gedämpfte Schwingungen: Infolge dieser Reibungsverluste klingt die Amplitude der freien Schwingung immer mehr ab.

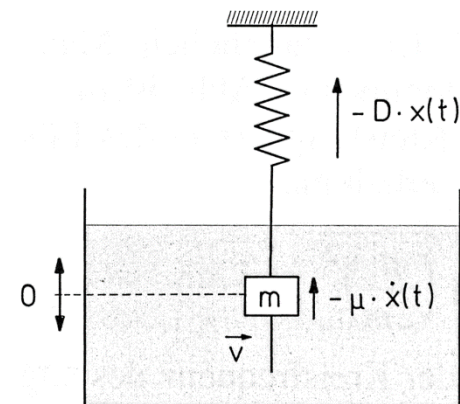
Beispiel: Masse-Feder-Pendel mit Masse m in einer Flüssigkeit

Reibungskraft:
$$F_R = -\mu \cdot v = \mu \cdot \frac{dx}{dt}$$

Die Bewegungsgleichung der gedämpften harmonischen Schwingung ist:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D \cdot x - \mu \cdot \frac{dx}{dt}$$

Impulsänderung = rücktreibende Kraft + Reibungskraft



Gedämpfte Schwingungen

Die Bewegungsgleichung der gedämpften harmonischen Schwingung ist:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dx}{dt} + D \cdot x = 0$$

Homogene
Differentialgleichung

Lösung im Allgemeinen:

$$x(t) = A(t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Auch die Amplitude ist jetzt eine Funktion der Zeit:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A_0 \cdot e^{-\frac{\mu}{2m} t}$$

$A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ = die als Funktion der Zeit exponentiell abnehmende
Schwingungsamplitude

$\delta = \frac{\mu}{2m}$ = Dämpfungskonstante

$\tau = \frac{1}{\delta}$ = Abklingzeit (Zeitkonstante), ein Maß für die Dämpfung und die Zeit, in
der Amplitude auf $1/e$ ($\approx 1/3$) des Anfangswertes abfällt

Gedämpfte Schwingungen

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maxima, deren zeitlicher Abstand gleich der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ der gedämpften Schwingung ist:

$$\frac{x(t + T)}{x(t)} = e^{-\delta \cdot T}$$

d.h. dieses Amplitudenverhältnis ist konstant

Die Kreisfrequenz ω ist kleiner als im ungedämpften Fall:

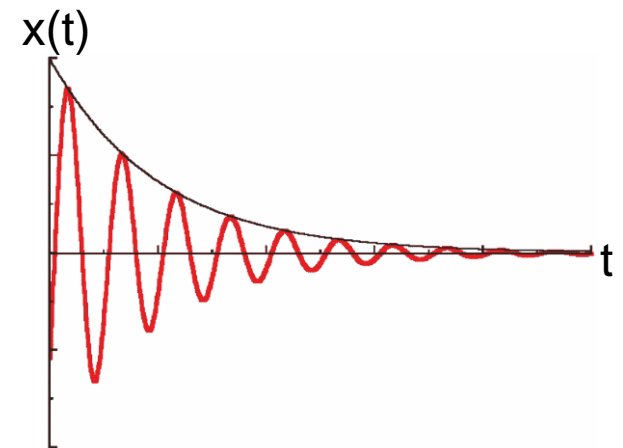
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}$$

oder

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

ω_0 = Kreisfrequenz des ungedämpften Masse-Feder-Pendels

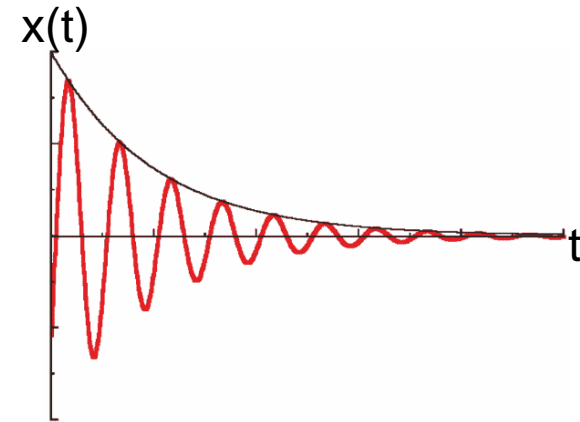
D.h. die Frequenzverschiebung nimmt mit steigender Dämpfung zu.



Gedämpfte Schwingungen

Stärke der Dämpfung:

$\omega_0 > \delta$: schwache (unterkritische) Dämpfung, d.h. eine in der Amplitude allmählich abklingende Schwingung

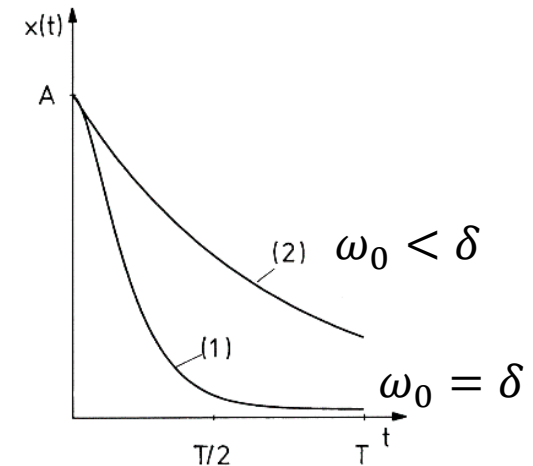


$\omega_0 = \delta$: kritische Dämpfung oder aperiodischer Grenzfall, d.h. es kommt nur zu einer Auslenkung, die sich asymptotisch der Ruhelage annähert

- keine Schwingung
- Schnellst mögliches Abklingen

$\omega_0 < \delta$: starke (überkritische) Dämpfung oder Kriechfall, d.h. die Amplitude kehrt nach Erreichen ihres Maximums nur sehr langsam – langsamer als im Falle des aperiodischen Grenzfalls – in die Ruhelage zurück („kriecht“ gegen Null)

- keine Schwingung
- langsames Abklingen



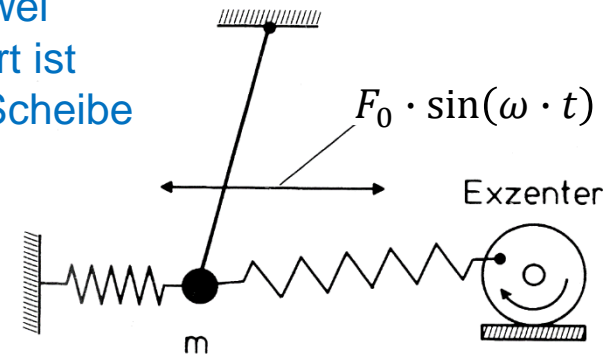
Erzwungene Schwingungen

Erzwungene Schwingungen treten immer dort auf, wo äußere periodische Kräfte auf ein schwingungsfähiges System einwirken, d.h. auf mechanische Oszillatoren oder oszillierende Atome und Moleküle.

Beispiel: Eine Pendelmasse m kann zwischen zwei Federn schwingen, wobei eine Feder fest montiert ist und die andere exzentrisch an einer rotierenden Scheibe befestigt ist.

äußere, periodische erregenden Kraft:

$$F_{err}(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



Die Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung ist:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dx}{dt} + D \cdot x = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Reibung

Rückstellkraft

periodisch treibende Kraft

Erzwungene Schwingungen

Lösung stationärer Fall (eingeschwungener Zustand):

$$x(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

$A(\omega)$ = Amplitude abhängig von der Kreisfrequenz

ω = Anregungsfrequenz, ist die Frequenz der treibenden Kraft, daher erzwungene Schwingung

φ = Phasenwinkel zwischen Anregung und Schwingung (frequenzabhängig)

$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega}$ = Zeitversatz zwischen Anregung und Schwingung (frequenzabhängig)

Amplitude:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta \cdot \omega)^2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad \delta = \frac{\mu}{2m}$$

Phase:

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{2\delta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Erzwungene Schwingungen: Resonanz

Die für unterschiedliche Dämpfungen dargestellten **Resonanzkurven**:

Bei konstanter, zeitunabhängiger Erregerkraft (bei $\omega = 0$) ist die statische Auslenkung F_0/D .

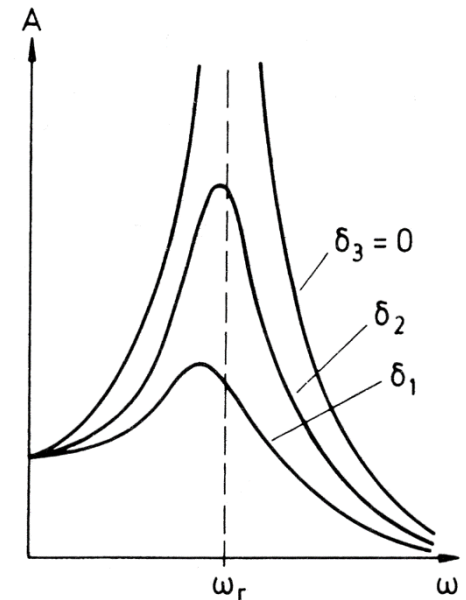
Mit steigender Erregerfrequenz ω nimmt die Amplitude des Systems zu und erreicht für $\omega = \omega_r$ ein Maximum, das **Resonanzmaximum**.

Resonanzfrequenz ω_r :
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

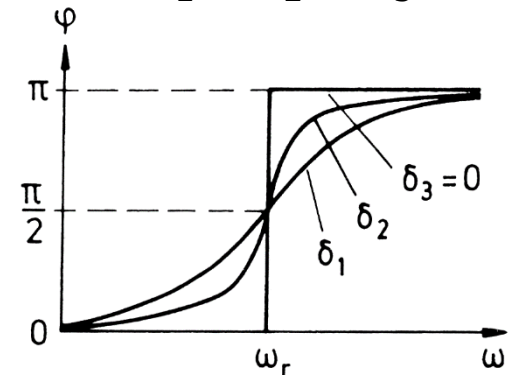
Bei einem ungedämpften System ($\delta = 0$) steigt die Amplitude der Schwingung ins Unendliche an, wenn $\omega = \omega_r = \omega_0$ (**Resonanzkatastrophe**).

Der Phasenwinkel zeigt einen Sprunghaften Verlauf für $\delta = 0$ und mit steigender Dämpfung wird der Übergang stetig und zunehmend breiter.

Im Resonanzfall $\omega = \omega_r$ hinkt die erzwungene der erregenden Schwingung um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nach.



$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$$



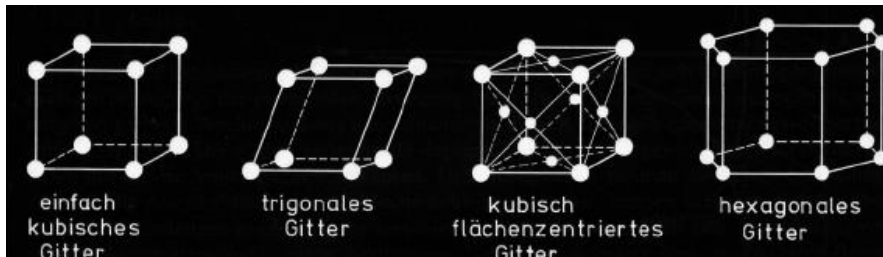
Deformierbare feste Körper

Die **Deformation des Körpers** ist die Änderung seiner Abmessungen und seines Volumens, wobei die Form des Körpers vollkommen geändert werden kann oder wie bei der allseitigen Expansion oder Kompression erhalten bleibt.

Bei einer **elastischen Deformation** verschwindet die Deformation wieder, sobald die sie erzeugenden Kräfte nicht mehr wirken.

Bei einer **plastischen Deformation** bleiben die Volumen- und Gestaltänderungen erhalten, auch wenn die sie erzeugenden Kräfte nicht mehr wirken.

Die **elastischen Eigenschaften** fester Körper liegen im inneren Aufbau, im Zusammenhalt der den Körper aufbauenden Atome und Moleküle.

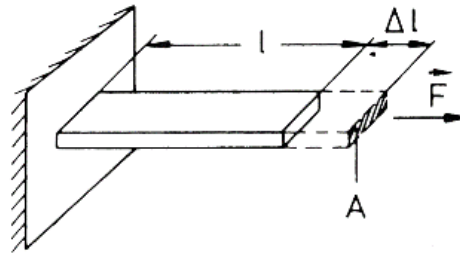


Geordnete Strukturen
von Festkörpern

Dehnung / Kompression

Ein Körper erfahre durch eine an ihm angreifende Kraft eine Längenänderung.

Beispiel:



Relative Längenänderung innerhalb des Elastizitätsbereiches:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

E = Elastizitätsmodul (Dehnungsmodul), dies ist eine Materialkonstante
Einheit: $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

A = Querschnittsfläche

Dehnung / Kompression

Normalspannung (Druck oder Zug): $\sigma = \frac{F}{A}$ Einheit: $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

F ist die senkrecht auf die Fläche A wirkende Zug- oder Druckkraft (Normalkraft).

Relative Dehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Hooke'sches Gesetz für elastische Deformationen:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

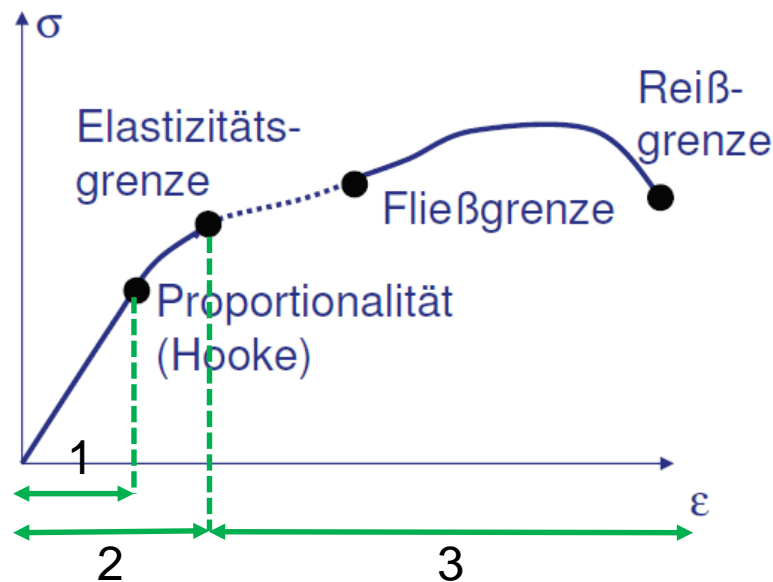
d.h. die Spannung ist der relativen Deformation proportional

Dehnung / Kompression

Spannungs-Dehnungskurve:

1. Proportionalitätsbereich: Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes
2. Elastizitätsbereich (schließt Proportionalbereich ein): bis an der Elastizitätsgrenze wird der Körper seine ursprüngliche Gestalt wieder annehmen, sobald die Krafteinwirkung aufhört.
3. plastische Verformung: auftretende irreversible Deformation

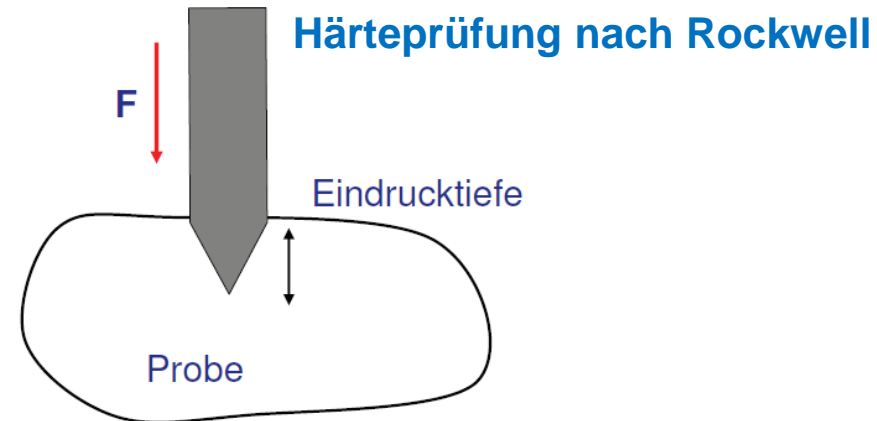
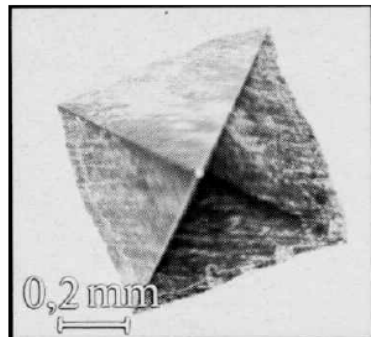
Ab der Fließgrenze beginnt das Material bei starker Querschnittsverkleinerung zu fließen, um schließlich bei der Reißgrenze zu brechen.



Härte

Sprödes Material: Material mit nur einen sehr engen Bereich der plastischen Deformation und bei weiterer Belastung sehr schnell zu Buch geht (Z.B. Glas, Porzellan)

Härte eines Materials: Widerstand eines Körpers gegen Eindringen eines Probekörpers



Mikrohärteprüfung nach Vickers:

Diamantpyramide mit quadratischer Grundfläche

Man misst unter dem Mikroskop die Länge der Diagonale

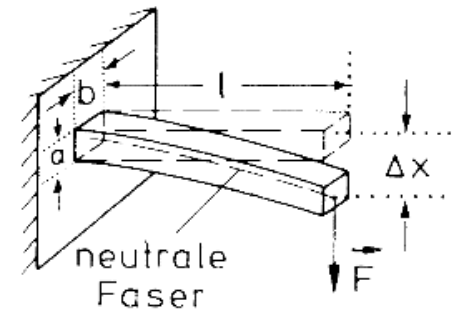
Biegung

Im Allgemeinen: Die Berechnung von Biegungen von Körpern beliebigen Querschnitts ist kompliziert und kann oft nur numerisch durchgeführt werden.

Hier: Beschränkung auf einfache Formen von Balken und Trägern, die eine senkrecht zur Längsachse der Körper angreifenden Kraft erfahren

Einseitig eingespannter Balken:

Der Balken biegt so weit, bis das rücktreibende Drehmoment der elastischen Kräfte im Balkenmaterial jenes der von außen angreifenden Kraft kompensiert.



Dadurch:

- die oberen Schichten des Balkens werden gedehnt \longrightarrow Zugspannung
- die unteren Schichten des Balkens werden gestaucht \longrightarrow Druckspannung
- die Mittelebene, die „neutrale Faser“ behält ihre ursprüngliche Länge

$$\Delta x = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot a^3} \quad \text{„hochkant“ ist besser: } a^3 \text{ zu } b$$

Biegung

Runder Stab:

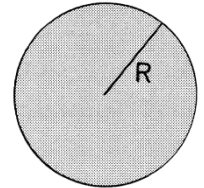
$$\Delta x = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{3\pi \cdot E \cdot R^4}$$

je größer der Durchmesser desto weniger biegt er sich durch

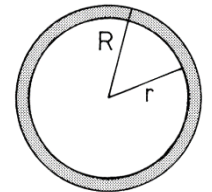
Rohr:

$$\Delta x = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{3\pi \cdot E \cdot (R^4 - r^4)}$$

Runder Stab:



Rohr:

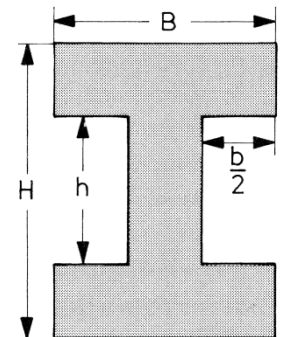


Verhältnis Material zu Belastbarkeit besser.

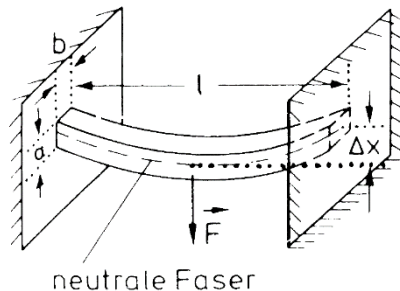
Doppel-T-Träger:

$$\Delta x = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)}$$

Doppel-T-Träger:



Zweiseitig eingespannter Balken:



$$\Delta x = \frac{F \cdot l^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot a^3}$$

**Durchbiegung 16 mal kleiner
in Vergleich zu einseitig
eingespannter Balken!**

Querkontraktion / Querdehnung

Jede elastische einseitige Deformation ist mit einer Änderung in der zur Deformationsrichtung senkrechten Querdimension verbunden.

Die einseitige Dehnung eines Materials hat daher stets eine **Querkontraktion** und entsprechend die einseitige Stauchung eine **Querdehnung** (d.h. Querschnittsvergrößerung) des Materials zur Folge.

innerhalb gewisser grenzen gilt:

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

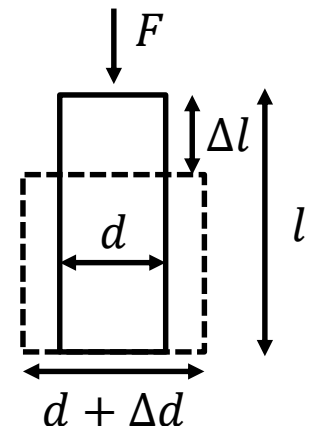
μ = Poisson-Zahl (Querdehnungs- oder Querkontraktionszahl)

Die Poisson-Zahl ist nur vom Material abhängig

typische Werte:

0,3 für Metall, Kunststoff

0,5 für Gummi



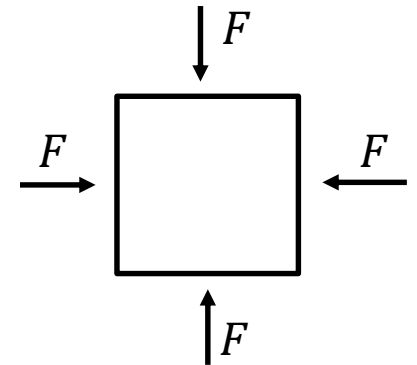
Allseitige Dehnung / Kompression

Eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Volumens des Körpers, ohne eine Änderung seiner Gestalt, unter dem Einfluss in allen drei Raumrichtungen wirkender Zug- oder Druckkräfte.

Voraussetzung: Die Kraft pro Fläche sei konstant.

Spannung:

$$\sigma = K \cdot \frac{\Delta V}{V}$$



K = Kompressionsmodul, Einheit: $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

V = Volumen

D.h. Stoffe mit kleinem (großem) Kompressionsmodul sind leicht (schwer) komprimierbar.

Den Kehrwert ist die Kompressibilität: $1/K$

(wird vorzugsweise bei Gasen und Flüssigkeiten verwendet)

Scherung

Bei der **Scherung** bleiben bei Krafteinwirkung die zu einer festgehaltenen Ebene im Körper parallelen Schichten eben und verschieben sich relativ zueinander parallel ohne ihre Dimension zu ändern.

Alle zur angreifende Kraft senkrechten Kanten des Körpers erfahren eine Neigung um den Winkel γ .

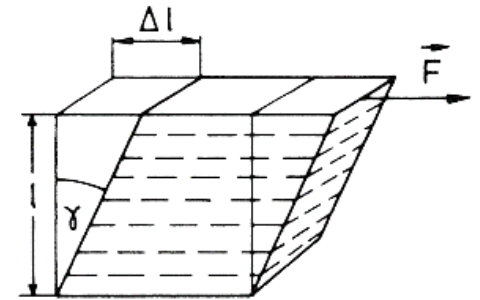
Scherwinkel γ : $\gamma = \tan \gamma = \frac{\Delta l}{l}$

Scherspannung τ : $\tau = \frac{F}{A}$

Die Schub- oder Scherspannung ist proportional zum Scherwinkel:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G = Schub-/Scherungs-/Torsionsmodul, Einheit: $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$



Torsion

Torsion: die Deformation eines Körpers, der an einem Ende festgehalten wird und an dem um eine zur festgehaltenen Grundebene senkrechten Achse ein Kräftepaar angreift.

Torsionsmoment: das erzeugte Drehmoment

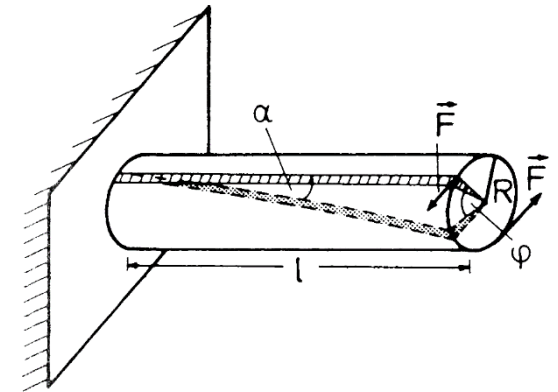
Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Scherspannung:

$$\tau = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{l}$$

Torsionswinkel:

$$\varphi = \frac{2l \cdot M}{\pi \cdot g \cdot R^4}$$



d.h. $R^4 \rightarrow$ Hohlrohre sind besser!

Die Röhrenknochen von Mensch und Tier besitzen als Hohlrohre eine optimale Stabilität gegen Biegung und Torsion.

Aggregatzustände

Es existieren in der Natur drei klassischen **Aggregatzustände** der Materie: Der **feste** Zustand, der **flüssige** Zustand und der **gasförmige** Zustand.

In der Physik gibt es einen weiteren nicht klassischen Zustand, das **Plasma**.

Materie kann von einem Aggregatzustand in einen anderen wechseln. Diesen Wechsel bezeichnet man als **Phasenübergang**. Dieser Phasenübergang wird durch die äußeren Bedingungen, die durch Druck und Temperatur festgelegt werden, verursacht.

Man spricht auch von verschiedenen Zustandsformen oder Phasen der Materie.

	Festkörper	Flüssigkeit	Gas	Plasma
Struktur	Struktur	Nahordnung	keine	keine
Formbeständigkeit	ja	schwach	keine	keine
Energie	$E_{th} \ll E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} \sim E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} > E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} \gg E_{\text{Bindung}}$



$T=300 \text{ K}$

$T=100.000 \text{ K}$

Aggregatzustände

- **Festkörper**

- bestimmte Gestalt
- festes Volumen
- feste Oberfläche
- Eigenschaften können nur unter Wirkung sehr starker äußerer Kräfte in geringem Maße verändert werden

- **Flüssigkeit**

- keine feste Gestalt
- festes Volumen
- freie Oberfläche
- Zur Veränderung des Flüssigkeitsvolumens bedarf es starker äußerer Kräfte, dagegen besitzt die Flüssigkeitsoberfläche keine feste Form
- Die Form wird erst definiert durch ein Gefäß, in dem sich die Flüssigkeit befindet

- **Gas**

- Weder eine bestimmte Gestalt, ein festes Volumen noch eine feste Oberfläche
- Beide werden erst definiert, wenn sich das Gas in einem Behälter befindet.

Flüssigkeiten und Gase

Flüssigkeit:

- Teilchen (Moleküle) sind frei gegeneinander Verschiebbar
- Flüssigkeiten besitzen im Gegensatz zu festen Körpern keine Formelastizität
- Teilchenabstand fast wie in Festkörper
- Großer Widerstand gegen Volumenänderungen
- Besitzen eine sehr ausgeprägte Volumenelastizität → kleiner Kompressionsmodul → praktisch inkompressibel, sie verändern ihr Volumen auch unter Wirkung sehr starker (Normal)Kräfte nur geringfügig
- die Flüssigkeitsoberfläche steht immer senkrecht zur wirkenden Kraft, d.h. nur äußeren Normalkräfte können auf sie wirken

Gase:

- Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen vernachlässigbar
- Abstände zwischen den Teilchen um ein Vielfaches größer als bei Flüssigkeiten
- besitzen eine große Kompressibilität

Druck-Definition

Der **Druck** ist die Kraft, die eine Flüssigkeit auf eine gegebene Fläche ausübt.

Druck = Kraft pro Fläche

$$p = \frac{F}{A}$$

Einheit: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (Pascal)

Bislang verwendete Einheiten:

Bar: 1 bar = 100.000 Pa = 10^5 Pa

Atmosphäre: 1 atm = 1013,25 hPa = 1,01325 bar = 1013,25 mbar
(Normaldruck)

Torr (mm Hg): 1 Torr = $\frac{1013,25}{760} = 1,333224$ mbar

(760 mm Quecksilbersäule entspricht Normaldruck; 1 bar ~ 750 Torr)

Kompressibilität

Flüssigkeiten und Gase besitzen im Gegensatz zu den Festkörpern nur einen elastischen Modul, den Kompressionsmodul K

Analog zu Festkörper (Spannung σ heißt nun Druck p):

$$\Delta p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

K = Kompressionsmodul, Einheit: $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

V = Volumen

Bei Flüssigkeiten und Gase verwendet man vorzugsweise den Kehrwert, die Kompressibilität κ ($1/K$):

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

$$\text{Einheit: } \frac{1}{\text{Pa}} = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$$

Die Kompressibilität ist im allgemeinen von der Temperatur und vom Druck abhängig.

Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik)

Die **Hydrostatik** ist die Lehre von unbewegten, strömungsfreien Flüssigkeiten, d.h. die Lehre der Gleichgewichtsbedingungen und -gesetze für Flüssigkeiten, auf welche Kräfte einwirken.

Ideale Flüssigkeiten: keine Reibungskräfte (keine Reibung beim Fließen), keine Grenzflächeneffekte und die Flüssigkeiten sind inkompressibel ($\kappa \approx 0$; $K = \infty$).

Reale Flüssigkeiten: wenn zusätzliche innere Kräfte, insbesondere welche die freie Bewegung der Teilchen in der Flüssigkeit behindern, nicht vernachlässigt werden können.

Annahme: zur einfache Beschreibung der Beobachtungen wird die Flüssigkeit als masselos betrachtet, so das die Wirkung der Gravitationskraft auf die Flüssigkeit unberücksichtigt bleiben kann. (Die Annahme der Masselosigkeit ist aber nicht essentiell für die Beschreibung)

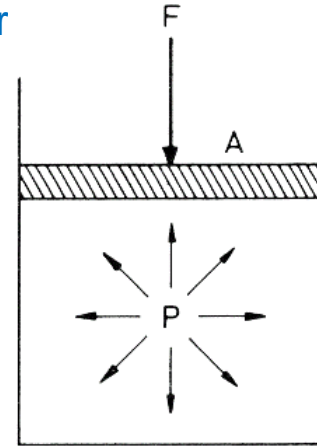
Stempeldruck

Durch den Stempel wird auf die Flüssigkeit ein Druck ausgeübt und es herrscht überall im Inneren sowie an den Grenzflächen der Flüssigkeit der hydrostatische Druck $p = F/A$.

Der Druck ist **kein Vektor!**

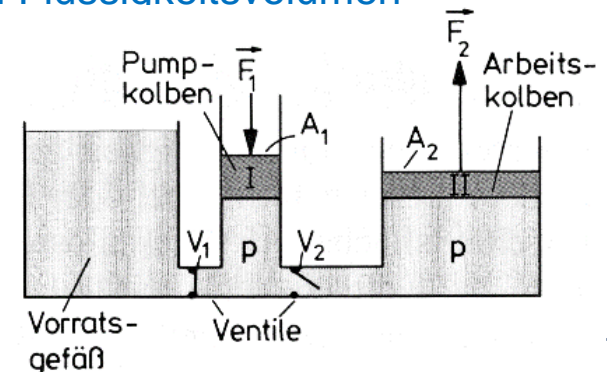
Er wirkt in alle Richtungen

Anwendung: hydraulische Presse



- 1) In den Pumpkolben I strömt zunächst beim Hochziehen Flüssigkeit aus dem Vorratsgefäß ein, wobei zum Vorratsgefäß hin Ventil V_1 öffnet und Ventil V_2 zum Arbeitskolben II hin schließt.
- 2) Bewegt nun die Kraft $F_1 = |\vec{F}_1|$ den Kolben wieder abwärts (Ventil V_1 schließt, V_2 öffnet), dann wird im gesamten Flüssigkeitsvolumen von Pump- und Arbeitskolben der hydrostatische Druck p erzeugt:

$$p = \frac{F_1}{A_1}$$



Hydraulische Presse

3) Dieser Druck übt auf den Kolben II eine Kraft $F_2 = |\vec{F}_2|$ aus:

$$F_2 = p \cdot A_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} = F_1 \cdot X$$

Der Verstärkungsfaktor X der Kraft ist also gegeben durch des Flächenverhältnis.

D.h. der Druck ist überall in der Flüssigkeit Gleich und für die Normalkräfte auf die zwei verschiedene Oberflächen gilt:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Wegen des Energieerhaltungssatzes ist die Arbeit und damit auch die Leistung beider Kolben gleich:

$$W = F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Daraus folgt:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Hydraulik: Wie beim Hebel wird bei gleicher Arbeit die Kraftverringerng kompensiert durch Wegverlängerung.

Hydraulische Presse

Bei jeder Bewegung des Pumpkolbens wird das Flüssigkeitsvolumen um ΔV geändert:

$$\Delta V = A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2$$

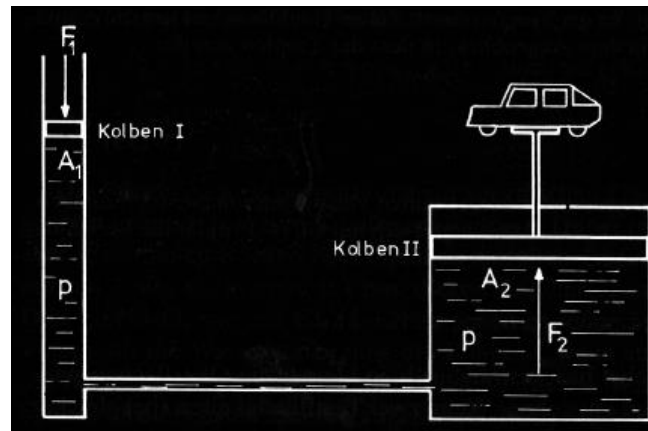
Verrichtete Arbeit W der Kolben:

$$W = W_1 = F_1 \cdot s_1 = p \cdot A_1 \cdot s_1 = p \cdot A_2 \cdot s_2 = F_2 \cdot s_2 = W_2$$

Volumenarbeit:

$$W = p \cdot \Delta V$$

Hydraulische Presse werden in der Technik viel verwendet zum Heben schwerer Lasten, z.B. Wagenheber für Pkw.



$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} \cdot F_2$$

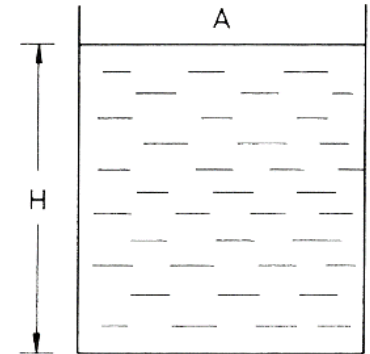
Schweredruck

Schweredruck: einen zusätzlichen Beitrag zum hydrostatischen Druck auf den tieferen Schichten einer Flüssigkeit verursacht durch das Gewicht der darüber befindlichen Schichten, die Flüssigkeitssäule.

Beispiel: In einem Zylinder befinde sich eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ρ .

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Einheit: $\frac{kg}{m^3}$



Gewicht G der Flüssigkeitssäule der Höhe H :

$$G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot H \cdot A \cdot g$$

Schweredruck am Boden des Zylinders:

$$p = \frac{G}{A} = \rho \cdot g \cdot H$$

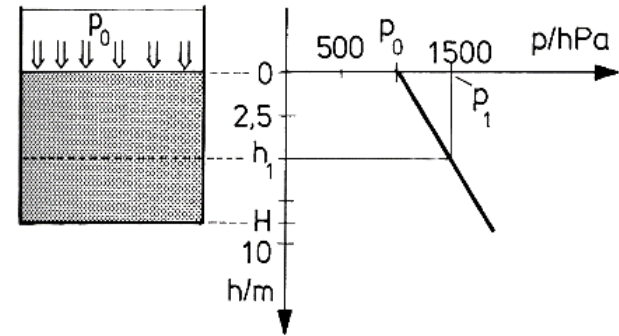
Druck in der Tiefe h :

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

Hydrostatischer Druck

Wird auf der freien Flüssigkeitsoberfläche einen äußeren Druck p_0 ausgeübt (z.B. Luftdruck oder Kolben), dann ist der **gesamte hydrostatische Druck p** in der Tiefe h unter der Flüssigkeitsoberfläche:

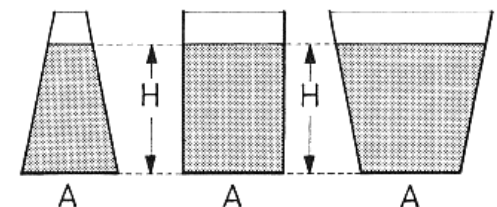
$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$



Beachte: Der Schweredruck einer Flüssigkeit ist allein abhängig von der Höhe h der Flüssigkeitssäule und der Dichte ρ der Flüssigkeit, also unabhängig von der Form des Gefäßes!

Hydrostatische Paradoxen: Der Bodendruck ist bei gleicher Bodenfläche A und gleicher Füllhöhe H einer Flüssigkeit der Dichte ρ der Gleiche, unabhängig von der Form des Gefäßes.

Beispiel: in den einzelnen Gefäßen ist jeweils die Menge und somit auch das Gewicht der Flüssigkeit unterschiedlich.

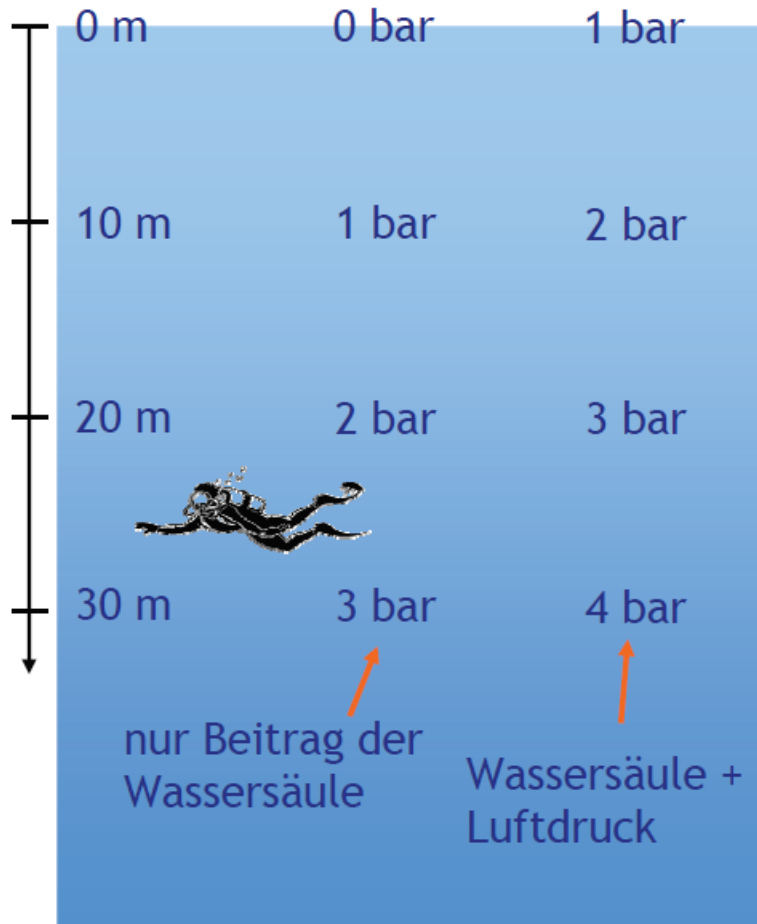


Druck unter einer Flüssigkeitssäule

Flüssigkeiten im Gravitationsfeld der Erde:

Mit zunehmender Tiefe in der Flüssigkeit nimmt der Druck linear zu
(Flüssigkeiten sind inkompressibel)

Im Wasser: je 10 m Wassertiefe um 1 bar



Tiefe von 1000 m: $p = 10^7$ Pa

Marianengraben (11 km): $p = 10^8$ Pa

Kommunizierende Röhren

Ein U-förmig gebogenes Rohr ist mit einer homogenen Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt.

Am Ort des Kräftegleichgewichts, an der tiefsten Stelle:

$$F_1 = F_2$$

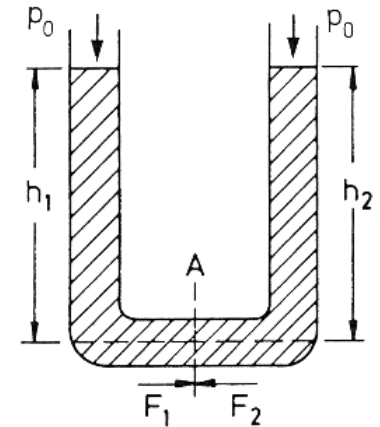
$$p_1 \cdot A = p_2 \cdot A$$

Druck am Boden:

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 = p_2$$

Daher gilt:

$$h_1 = h_2$$



Sind derartige miteinander verbundene Gefäße mit derselben Flüssigkeit gefüllt, dann stehen auch bei unterschiedlicher Gestalt und Querschnittsfläche der beiden Schenkel deren Flüssigkeitssäulen gleich hoch.

Ruhende Gase (Aerostatik)

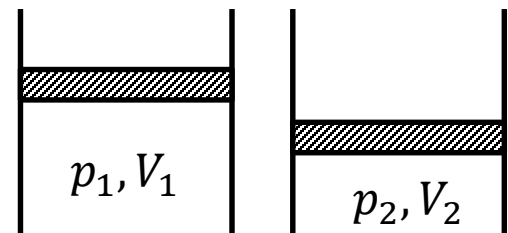
- Die Dichte der Gase sind viel geringer als die der Flüssigkeiten:
 - Gasdichten typisch ca. 1000-mal kleiner als im kondensierten Aggregatzustand (nah an der Erdoberfläche)
 - stark von der Temperatur und dem Druck abhängig
- Der Druck in einem ruhenden Gas wirkt wie bei den Flüssigkeiten „allseitig“.
- Gase sind im Gegensatz zu Flüssigkeiten sehr leicht kompressibel, d.h. bei Druckänderung ändert sich das Volumen des Gases merklich.

Ideale Gase folgen dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{bei konstanter Temperatur}$$

Allgemein:

$$p \cdot V = \text{const.} \quad \text{bei } T = \text{const.}$$



Schweredruck - Atmosphärendruck

Atmosphärische Luftdruck: der Luftdruck an irgendeiner Stelle in der Atmosphäre ist gleich dem Druck, der sich als Quotient aus dem Gewicht einer Luftsäule, die sich von dem betreffenden Punkt aus bis zum oberen Ende der Atmosphäre erstreckt, und der Querschnittsfläche jener Säule ergibt.

Luftdruck auf Meereshöhe: $p_0 = 1013 \text{ hPa}$ (bei 0°C)

Experiment von Torricelli (1644): Messung Höhe Quecksilbersäule bei 0°C

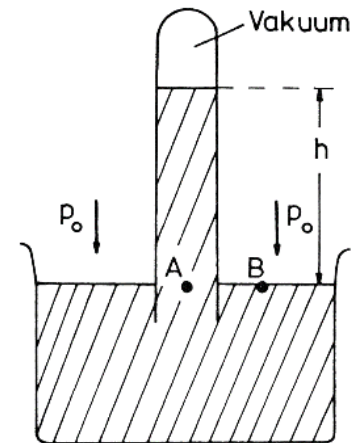
Hydrostatischer Druck: $p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h = \text{const.}$

Punkt A: $p_A = \rho \cdot g \cdot h$

Punkt B: $p_B = p_0$

Woraus folgt: $p_0 = \rho \cdot g \cdot h$

$$h = \frac{p_0}{\rho \cdot g} = 0,76 \text{ m}$$



10 m Wassersäule entsprechen etwa 1 bar Druckdifferenz

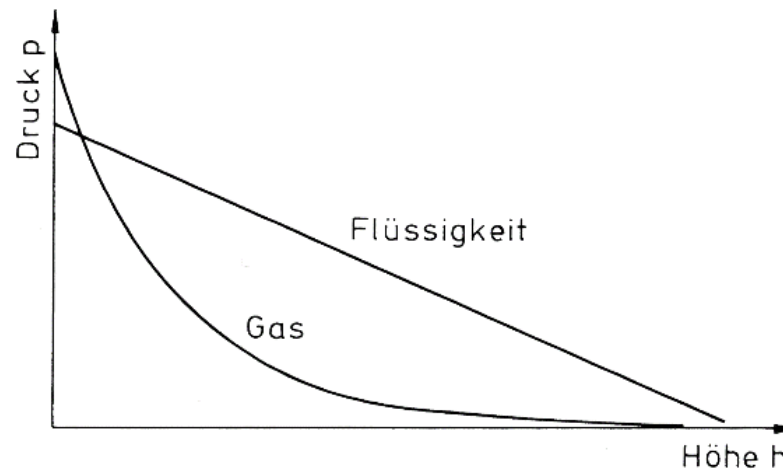
Druck unter eine Flüssigkeitssäule versus Luftdruck

- **Flüssigkeiten im Gravitationsfeld der Erde:**

Mit zunehmender Höhe über dem Boden des Flüssigkeitsgefäßes nimmt der Druck linear ab, denn Flüssigkeiten sind in erste Näherung inkompressibel.

- **Vergleiche dagegen die Erdatmosphäre:**

Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Höhe zunächst stark, dann immer schwächer, denn Gase sind kompressibel, auch unter dem eigenen Gewicht.



Barometrische Höhenformel

Annahme: konstante Temperatur T in der gesamten Atmosphäre

Für ein Luftvolumen V unter dem Druck p in beliebige Höhe h über Meeresniveau gilt:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

wobei p_0 und V_0 Druck und Volumen in Meereshöhe ($h_0 = 0$) sind.

Daraus folgt:

$$\frac{p \cdot V}{m} = \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p_0 \cdot V_0}{m}$$

Dichte des Gases ist druckabhängig:

$$\rho = \rho(p) = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p$$

Barometrische Höhenformel

In beliebiger Höhe h nimmt in einem kleinen Volumenelement der Höhe dh der Schweredruck wie folgt ab:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh = -p \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

Integration zwischen den Grenzen $h = h_0$ (Druck p_0) und h (Druck p_h):

$$\int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_h}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

Barometrische Höhenformel:

$$p_h = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

bzw.

$$p_h = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$$

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 \cdot g} \approx 8 \text{ km}$$

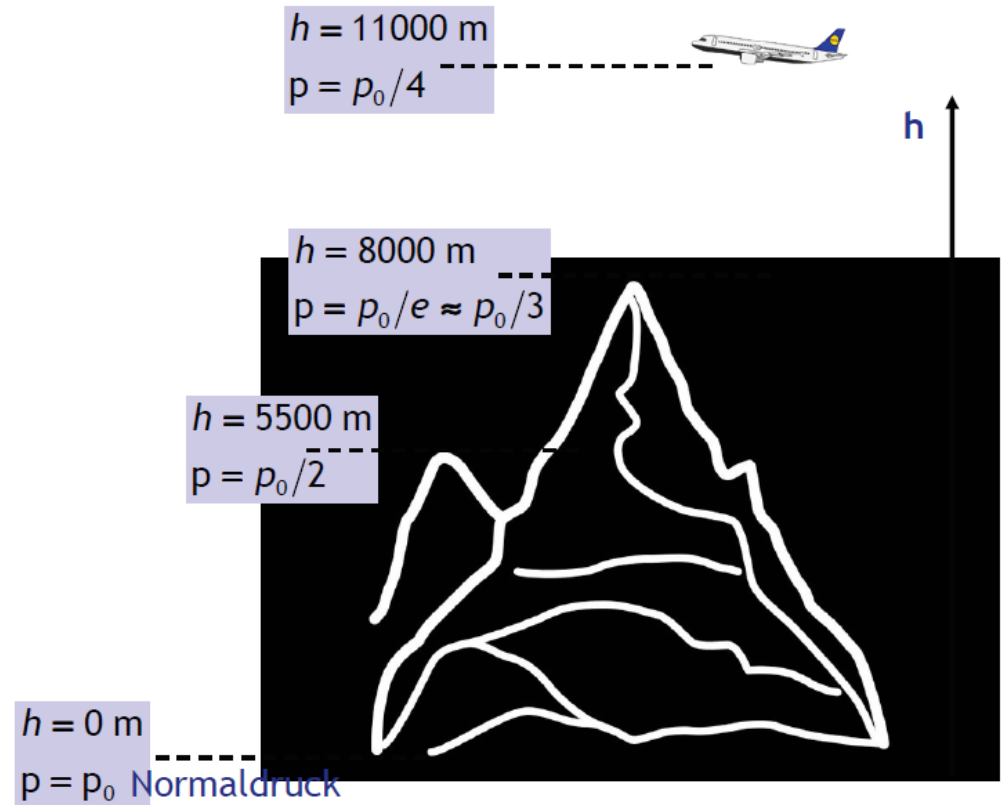
Barometrische Höhenformel

Die Atmosphäre wird von ihrem eigenen Gewicht zusammengedrückt.

Alternative Beschreibung der barometrische Höhenformel:

Mit je 5,5 km Höhe halbiert sich der Druck (bei konstanter Temperatur)

→ Halbwertshöhe: 5,5 km



Gasgemische - Partialdruck

Gase, die nicht chemisch miteinander reagieren, lassen sich beliebig mischen.

Dalton'sches Gesetz: Der Druck des Gasgemisch ist gleich der summe der Drücke, die jedes einzelne Gas ausüben würde, wenn es das gesamte Volumen, welches das Gasgemisch einnimmt, ausfüllen würde.

Der Gesamtdruck eines Gasgemisches:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

d.h. der Gesamtdruck eines Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke der einzelnen Komponenten.

mit die partialdrücke:

$$p_1 = p \cdot \frac{V_1}{V}; p_2 = p \cdot \frac{V_2}{V}; \dots$$

wobei p der Druck des Gasgemisches und der Einzelgase vor der Mischung ist. V, V_2, \dots sind die Volumina vor der Mischung und $V = V_1 + V_2 + \dots$ ist das Volumen der Mischung.

Auftrieb in Flüssigkeiten und Gasen

Würfel der Kantenlänge a in einer Flüssigkeit

Fläche Würfel: $A = a^2$

Volume Würfel: $V = a^3 = a \cdot A$

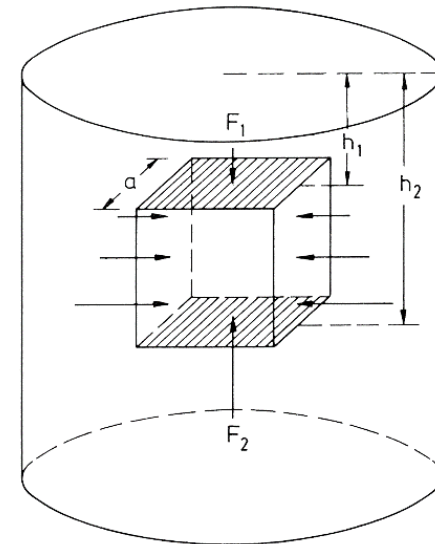
Höhe Würfel: $h_2 = h_1 + a \leftrightarrow a = h_2 - h_1$

Die Seitenkräfte kompensieren sich in jeder Höhe paarweise.

Kraft von oben auf Würfel: $F_1 = p_1 \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A$

Kraft auf Bodenfläche des Würfels: $F_2 = p_2 \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A$

Die vektorielle Addition der antiparallel gerichtete Kräfte ergibt eine resultierende Kraft senkrecht nach oben, da in der Tiefe $h_2 > h_1$ der Schweredruck $p_2 > p_1$ ist und somit für den Betrag der Kraft $F_2 > F_1$ folgt.



Auftrieb in Flüssigkeiten und Gasen

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A - \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A$$

$$F_A = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1) = \rho \cdot g \cdot A \cdot a$$

Auftriebskraft F_A :

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V$$

Diese Beziehung gilt auch für Körper beliebiger Gestalt mit Volumen V .

Masse der verdrängten Flüssigkeit: $m_{Fl} = \rho_{Fl} \cdot V$

Archimedisches Prinzip: Die Auftriebskraft an einem Körper ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit:

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V \cdot g = m_{Fl} \cdot g$$

d.h. durch den Auftrieb erfährt ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper einen (scheinbaren) Gewichtsverlust, welcher gleich dem Gewicht des durch den Körper verdrängten Flüssigkeitsvolumens ist.

Sinken, Schwimmen, Schweben, Steigen

Scheinbares Gewicht G^* eines völlig in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers der Dichte ρ_K , des Volumens V_K und Gewicht G :

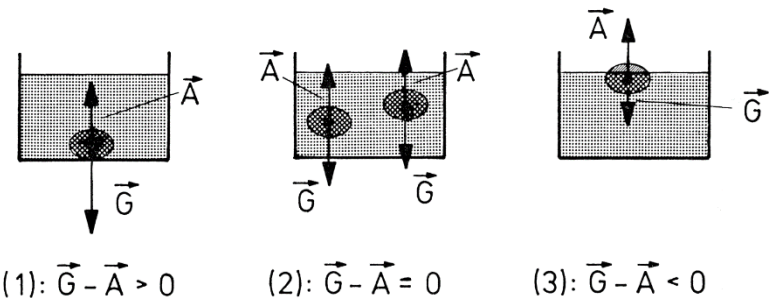
$$G^* = G - F_A = (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot V_K \cdot g$$

Drei Fälle:

Sinken: $G > F_A$ $\rho > \rho_{Fl}$ $G^* > 0$

Schwimmen/Schweben: $G = F_A$ $\rho = \rho_{Fl}$ $G^* = 0$

Steigen: $G < F_A$ $\rho < \rho_{Fl}$ $G^* < 0$

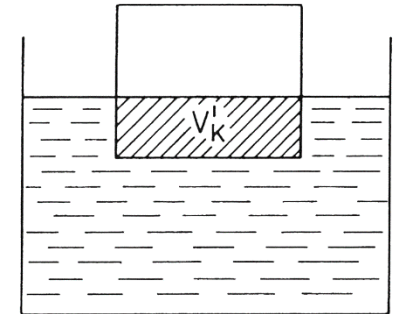


Eintauchen eines Körpers in eine Flüssigkeit

In einer Flüssigkeit schwimme ein Körper mit dem Volumen V_K und der Dichte ρ_K .

Das Teilvolumen V'_K befinde sich unter der Flüssigkeitsoberfläche.

Das Gewicht G des schwimmenden Körpers ist in Gleichgewicht mit dem Auftrieb F'_A den das eingetauchte Teilvolumen V'_K des Körpers in der Flüssigkeit erfährt:



$$G = V_K \cdot \rho_K \cdot g = V'_K \cdot \rho_{Fl} \cdot g = F'_A$$

Verhältnis des eingetauchten Teilvolumens zum Gesamtvolumen des Körpers

$$\frac{V'_K}{V_K} = \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}}$$

Druckmessung

Zur Druckmessung von Flüssigkeiten und Gasen verwendet man so genannte **Manometer**.

Zwei Arten von Manometer:

- Direkt anzeigenden Manometer, z.B. Flüssigkeitsmanometern
- Druckwandlern (Transducer) Geräten, die den Druck in eine elektrische Messgröße umwandeln

Manometern ermöglichen Druckmessungen in Bereich von etwa 10^{-8} Pa (Ultrahochvakuum) bis 10^{11} Pa (10^6 bar).

Druckmessgeräte zur Messung des Luftdruckes heißen **Barometer**.

Überdruck: Druck eines Gases ist größer als der äußere Luftdruck p_0

Unterdruck: Druck eines Gases ist kleiner als der äußere Luftdruck p_0

Flüssigkeitsmanometer

Zur Druckmessung von Gasen wird oft das Flüssigkeitsmanometer verwendet.

Es handelt sich um kommunizierende Röhren, deren Flüssigkeitssäulen in den beiden Schenkeln gleich hoch sind, wenn der äußere Druck über den offenen Rohrenden gleich ist.

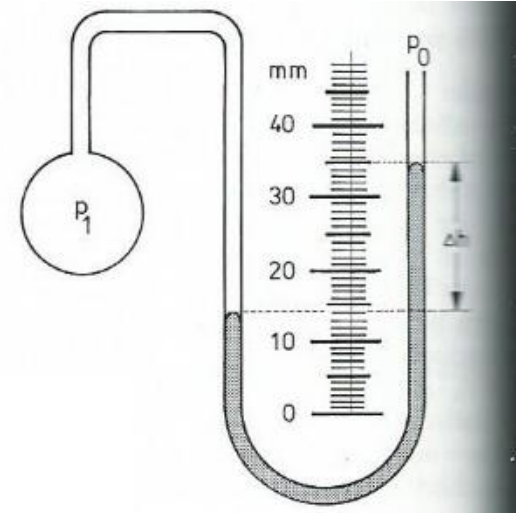
Beispiel: Aus dem Höheunterschied Δh der Flüssigkeitsspiegel kann auf die Druckdifferenz Δp an den Rohrenden rückgeschlossen werden.

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Bei bekanntem Gasdruck p_0 folgt für den Druck p_1 :

$$p_1 = p_0 + \Delta p = p_0 + \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Da es sich im Beispiel um einen Überdruck im angeschlossenen Gefäß handelt ($p_1 > p_0$), ist Δp positiv.



Auftrieb / Dichtemessungen

Die Dichte von Feststoffen kann durch Wägung am einfachsten unter Anwendung des archimedischen Prinzips mittels der Messung des Auftriebs in einer Flüssigkeit bestimmt werden.

Bei Festkörpern: Messung von „Gewicht“ außerhalb und in Flüssigkeit bekannter Dichte

Gewicht in Luft (ohne Auftrieb): $G = m_K \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$

Auftrieb: $A = G - G_{Fl} = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$

Für die Dichte des Körpers gilt dann: $\rho_K = \frac{G}{A} \cdot \rho_{Fl}$

Bewegte Flüssigkeiten und Gase (Hydro- und Aerodynamik)

Die **Hydro- und Aerodynamik** ist die Lehre der Bewegungen von Flüssigkeiten bzw. Gasen.

Ideale Fluide: keine Reibungskräfte (keine Reibung beim Fließen), keine Grenzflächeneffekte und die Flüssigkeiten sind inkompressibel.

Reale Fluide: wenn zusätzliche innere Kräfte, insbesondere welche die freie Bewegung der Teilchen in der Flüssigkeit behindern, nicht vernachlässigt werden können.

Der **Bewegungszustand** einer Flüssigkeit oder eines Gases lässt sich durch die Geschwindigkeit \vec{v} , die Dichte ρ und den Druck p in jedem Punkt (x, y, z) des Raumes und zu jeder Zeit (t) angeben.

Die **Strömung** von Flüssigkeiten oder Gasen wird durch die Einwirkung von Kräften verursacht, die auf jedes Volumenelement ΔV der Masse $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ eines gewissen Volumens V des Fluids wirken.

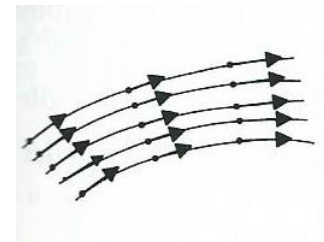
Hydro- und Aerodynamik

Wichtige äußere und innere Kräften:

- **Schwerkraft \vec{F}_g** : verursacht eine Beschleunigung des Volumenelementes ΔV , wenn die Strömungen eine vertikale Geschwindigkeitskomponente enthalten.
- **Druckkraft \vec{F}_p** : Auf das Volumenelement ΔV wirken Druckkräfte, wenn zwischen verschiedenen Raumpunkten des Fluids eine Druckdifferenz (Druckgradient $\text{grad } p$) herrscht.
- **Reibungskraft \vec{F}_R** : Reibungskräfte zwischen einzelnen Schichten des Fluids, also innere Kräfte, haben eine Energiedissipation in Medium zur Folge und damit eine nicht räumlich konstante Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} .
Reibungskräfte sind auch verantwortlich für die Viskosität der Flüssigkeiten oder Gase.
- **II. Newton'schen Axiom:**
$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_R = \Delta m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \cdot \Delta V \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

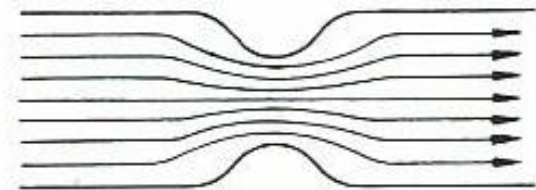
Beschreibung von strömender Materie

- Die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen lässt sich durch die Angabe der **Strömungsgeschwindigkeit** $\vec{v}(x, y, z, t)$ zu jeder Zeit t und in jedem Punkt (x, y, z) des von dem Fluids eingenommenen Raumes beschreiben.
- Bei Flüssigkeiten kann man die Strömung beobachten durch kleine darin schwebende Partikeln (Aluminiumpulver oder Kunststoff) bzw. durch eingebrachte Farbstoffen oder bei Gasen mittels Rauch bzw. nebeln.
- Diese zeigen dann die als Funktion der Zeit die **Bahnkurven** oder **-linien** der Flüssigkeits- bzw. Gasteilchen.
- **Strömungsfeldes** (Strömungsgeschehen des gesamten Fluids): die Geschwindigkeiten $\vec{v}(x, y, z, t)$ aller Teilchen an ihren jeweiligen Orten zu einem bestimmten Zeitpunkt t (Momentaufnahme).
- **Stromlinien**: jenen Kurven, deren Tangente in jedem Punkt des Fluids die Richtung der dort vorliegenden momentane Geschwindigkeit \vec{v} der Fluidteilchen angibt.



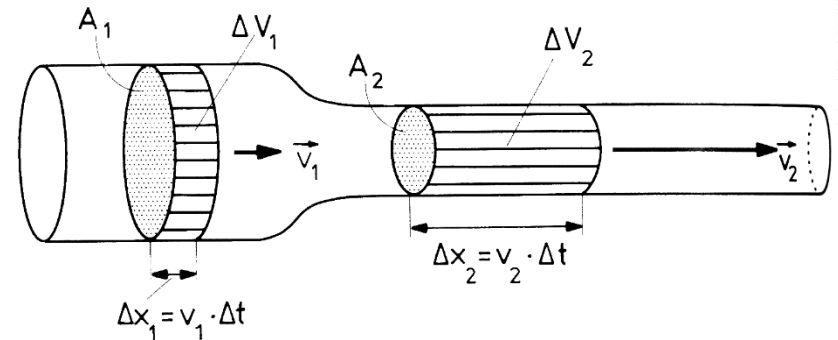
Beschreibung von strömender Materie

- **Stationäre Strömung:** unabhängig von der Zeit t ist an jeder Stelle des vom Fluid eingenommenen Raumes die Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} der dort zeitlich aufeinander folgenden Fluidteilchen die gleiche.
- D.h. am gegebenen Punkt besitzt jedes Teilchen die gleiche Geschwindigkeit \vec{v} in die gleiche Richtung wie ein vorhergehendes, wobei diese doch an unterschiedlichen Punkten sehr wohl verschieden sein kann.
- Bei stationäre Strömung sind die Stromlinien mit den Bahnlinien der Einzelteilchen identisch im Gegensatz zu einer nichtstationäre Strömung,
- Die Anzahl der Stromlinien in einer zu Strömungsrichtung senkrecht stehenden Einheitsfläche ist eine Maß für die Geschwindigkeit der Strömung. Je dichter die Stromlinien liegen, desto größer die Strömungsgeschwindigkeit, je weiter auseinander liegend, desto kleiner die Strömungsgeschwindigkeit.



Kontinuitätsbedingung

Strömung stationär, ideal und inkompressibel



Bewegung nur verursacht durch die Druckkraft \vec{F}_p .

Im Zeitintervall Δt durch die jeweiligen Rohrquerschnitte A_1 bzw. A_2 strömende Fluidmasse:

$$\Delta m_1 = \rho \cdot \Delta V_1 = \rho \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

$$\Delta m_2 = \rho \cdot \Delta V_2 = \rho \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

Für den so genannten Massenstrom (Massendurchfluss) $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ gilt das **Gesetz von der Erhaltung der Masse in der Hydro- und Aerodynamik**:

Bei Stationäre Strömung fließt pro Zeiteinheit durch jede Querschnittsfläche A die gleiche Menge einer Flüssigkeit (oder eines Gases).

Kontinuitätsbedingung

D.h.:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Bei kleine Rohrquerschnitten ist die Strömungsgeschwindigkeit größer als bei großen Rohrquerschnitten, d.h. die Strömungsgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Querschnitte.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Das Produkt $A \cdot v$ ist gleich den Volumenström I :

$$I \equiv A \cdot v = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Einheit: $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Nach der Kontinuitätsgleichung ist I konstant, d.h. das durch die Querschnittsfläche A in der Zeiteinheit Δt strömende Volumen ΔV ist konstant.

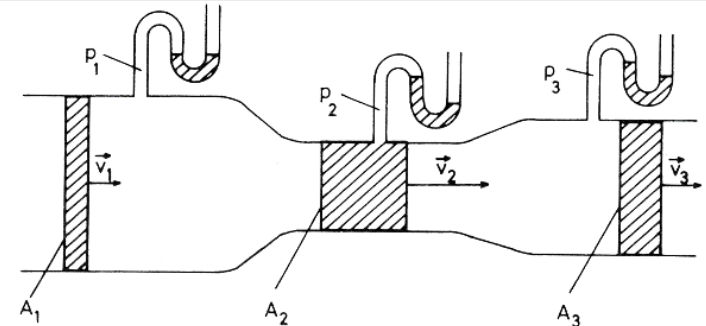
Bernoulli-Gleichung

Änderung des Strömungsquerschnittes:

$$A_1 > A_2$$

Infolge Kontinuität:

$$v_2 > v_1$$



D.h. jedes Teilchen der Flüssigkeit oder des Gases wird beschleunigt in Richtung der die Beschleunigung verursachenden Kraft.

Die Beschleunigung kann nur durch Druckkräfte aufgrund eines Druckgradienten zwischen den verschieden weiten Stellen einer Stromröhre verursacht werden, d.h.:

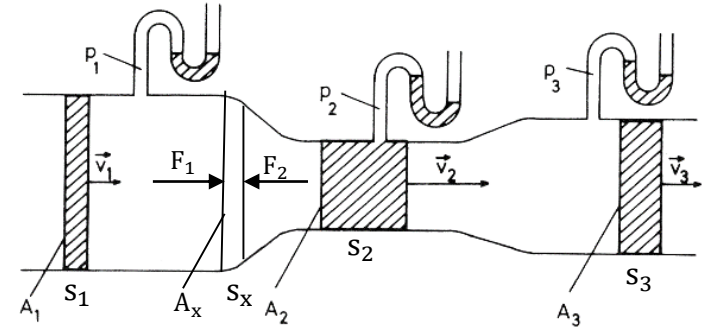
$$p_1 > p_2$$

Der quantitative Zusammenhang zwischen Druck und Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich durch Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf ein Teilvolumen des idealen (keine Reibungsverluste) und inkompressibel strömenden Fluids.

Für die Vergrößerung der Strömungsgeschwindigkeit muss Beschleunigungsarbeit verrichtet werden, die eine Erhöhung der kinetische Energie des strömenden Fluids ermöglicht.

Bernoulli-Gleichung

Betrachte eine Fluidmenge der Masse m und Volumen V



Beschleunigungsarbeit:

$$W = (F_1 - F_2)s_x = (p_1 \cdot A_x - p_2 \cdot A_x) \cdot s_x = (p_1 - p_2) \cdot A_x \cdot s_x$$

$$W = (p_1 - p_2) \cdot V$$

$$\Delta E_{pot} = (p_1 - p_2) \cdot V$$

Änderung der kinetische Energie:

$$W = \Delta E_{kin} = E_{kin,2} - E_{kin,1} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

Energieerhaltungssatz:

$$\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin}$$

$$(p_1 - p_2) \cdot V = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

Bernoulli-Gleichung

$$(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \frac{m}{V} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{V} \cdot v_1^2$$

mit $\rho = m/V$:

$$(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

Die Bernoulli-Gleichung:

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const.} = p_{ges}$$



Statischer Druck Staudruck Gesamtdruck
(ruhenden Fluid) (dynamischer
Druck)

Der statische Druck ist umso kleiner, je größer die Geschwindigkeit in einer Strömung ist.

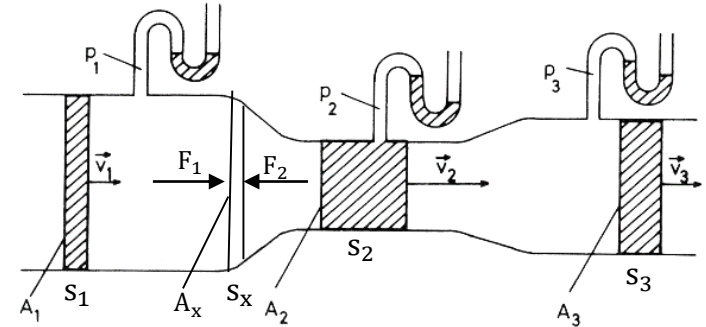
Bernoulli-Gleichung

Querschnittsflächen:

$$A_1 > A_3 > A_2$$

Strömungsgeschwindigkeiten:

$$v_1 < v_3 < v_2$$



Nach der Bernoulli-Gleichung muss für den statischen Druck gelten:

$$p_1 < p_3 < p_2$$

wie in der Abbildung jeweils die gezeichneten Einstellungen der Flüssigkeitsmanometer angeben, wobei $p_1 = p_0$ (äußeren Druck).

Erfolgt die Strömung nicht horizontal, sondern steht das Rohr beispielsweise schräg, dann kommt noch ein weiterer Beitrag zu potentiellen Energie hinzu: die Änderung der Lageenergie des Fluids im Schwerfeld der Erde.

Allgemeine Form der Bernoulli-Gleichung:

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const.} = p_{ges}$$

Schweredruck

Anwendung Bernoulli-Gleichung

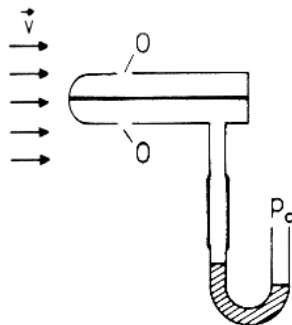
Beachte: In Prinzip gelten die Kontinuitätsgleichung und die Bernoulli-Gleichung nur für ideale Flüssigkeiten.

Unter die folgende Voraussetzungen können die beide Gleichungen auch auf Strömungen in realen Flüssigkeiten und Gasen angewendete werde:

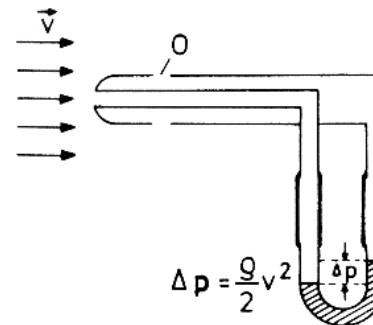
- die Strömungsquerschnitte sollen überall groß genug sein, bzw. Einflüsse des Randes sind vernachlässigbar,
- die Bedingung der Inkompressibilität des Fluids soll annähernd erfüllt sein.

In praktischen Fällen trifft letzteres häufig zu für Flüssigkeiten und für Gase bei kleineren Strömungsgeschwindigkeiten ($v < c_s$; c_s : Schallgeschwindigkeit in Medium).

Drucksonden:



Manometer zur Messung des statischen Druckes p in einem strömenden Gas

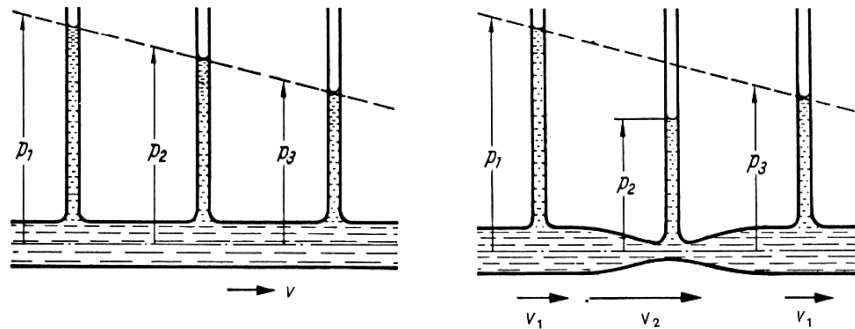


Prandtl'sches Staurohr.

$\frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 - p$ ist gleich der Druckdifferenz der Flüssigkeiten im Manometer

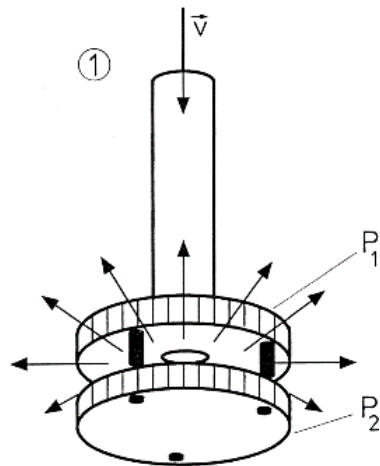
Anwendung Bernoulli-Gleichung: Beispiele

▪ Durchströmtes Rohr ohne und mit Einschnürung



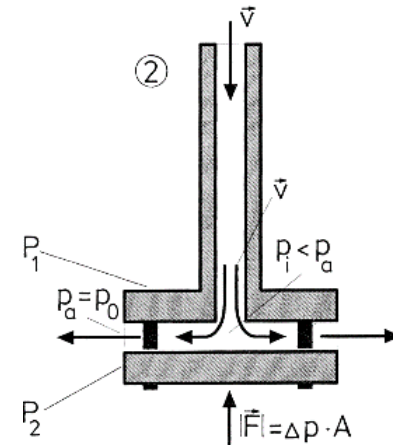
An der Engstelle einer Strömung ist der Druck vermindert.

▪ Hydrodynamisches Paradoxon



Die platte P_2 wird nicht weggedrückt sondern angezogen:

- Strömungsgeschwindigkeit an der Austrittsöffnung des Rohres in der platte P_1 wesentlich höher als am äußeren Rand
- $p_i < p_a = p_0$
- Durch Druckdifferenz erfährt die bewegliche Platte P_2 eine Kraft in Richtung zur Platte P_1 .



Viskosität

Bisher nur idealer Flüssigkeiten und Gase betrachtet, d.h.:

- die einzelnen Fluidschichten sind reibungsfrei gegeneinander verschiebbar
- keine Wechselwirkungskräfte zwischen dem Fluid und den umströmten Körpern wirken

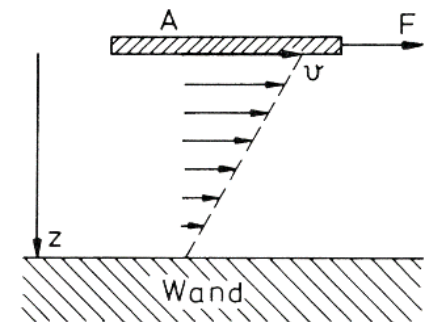
Bei Beschreibung zahlreiche Erscheinungen müssen jedoch die Reibungskräfte zwischen den einzelnen Fluidschichten berücksichtigt werden, d.h. reales Fluid

Viskosität: Maß für die als innere Reibung bezeichneten Wechselwirkungen zwischen den Molekülen der Flüssigkeiten oder Gase.

Gedankenexperiment: einer bewegten Platte auf einer Flüssigkeit:

An beiden die Flüssigkeit begrenzenden Flächen haftet jeweils eine dünne Flüssigkeitsschicht unmittelbar an, die sich mit derselben Geschwindigkeit wie die entsprechende Fläche (Platte bzw. Wand) bewegt.

Dazwischen gleiten die parallelen Fluidschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten an einander vorbei.



Viskosität

Um die Platte mit konstanter Geschwindigkeit v zu bewegen, muss somit die innere Reibung überwunden werden, wozu eine Kraft F erforderlich ist, die gerade die ihr entgegengesetzt gerichtete Reibungskraft F_R kompensiert.

Die **Newton'sche Gleichung** verknüpft die Viskosität η mit einer tangential angreifenden (inneren) Reibungskraft:

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dz}$$

$\frac{dv}{dz}$ = Geschwindigkeitsgradient in z-Richtung

A = Berührungsfläche der Schichten

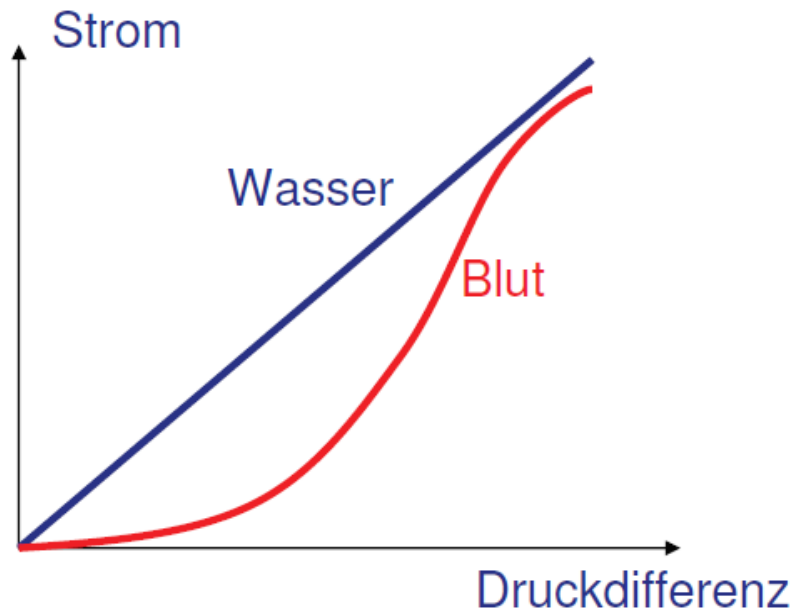
η ("eta") = dynamische Viskosität (Zähigkeit); Einheit: $\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$

Ideale Flüssigkeiten:	$\eta = 0$
Newton'sche Flüssigkeiten:	$\eta = \text{const.}$

Viskosität

Newton'sche Flüssigkeiten: Viskosität $\eta = \text{const.}$ (Wasser, Hg, Öl)

Nicht-Newton'sche Flüssigkeiten: Viskosität η abhängig von Strömungsgeschwindigkeit v (Erythrozythen, Blut)

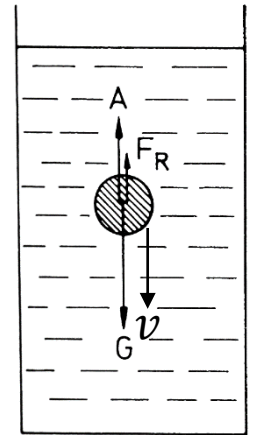


Substanz	η in Pa s
Öle	um 1
Glyzerin	0.83
Blut (w), Mittelwert	0.0044
Blut (m) Mittelwert	0.0047
Hg	0.0015
Wasser	0.001
Luft	0.000018

Kugelfallviskosimeter

Messung der dynamischen Viskosität η :

Kugel (Radius r) fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = 0$ von der Oberfläche aus in einer viskosen Flüssigkeit.



An der Kugel greifen drei Kräfte an:

- Die Gewichtskraft: $G = m \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$

- Der Auftrieb: $A = V_K \cdot \rho_{Fl} \cdot g$

- Die Reibungskraft (Gesetz von Stokes): $F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$

1. Nach dem loslassen wird die Kugel durch die Gewichtskraft zunächst beschleunigt mit zunehmender Geschwindigkeit
2. Bei ansteigender Geschwindigkeit der Kugel nimmt jedoch die geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft zu
3. Dies erzeugt eine Verzögerung der Kugel, die Beschleunigung wird geringer bis im stationäre Zustand die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit v_0 sinkt.
4. Die Vektorsumme der angreifenden Kräfte ist dann gleich null und der Fall der Kugel geht in einer gleichförmige Bewegung mit Beschleunigung Null über

Kugelfallviskosimeter

Für das Kräftegleichgewicht gilt:

$$A + F_R = G$$

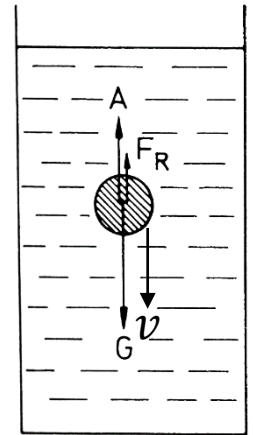
$$V_K \cdot \rho_{Fl} \cdot g + 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = \rho_K \cdot V_K \cdot g$$

Mit Kugelvolumen

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

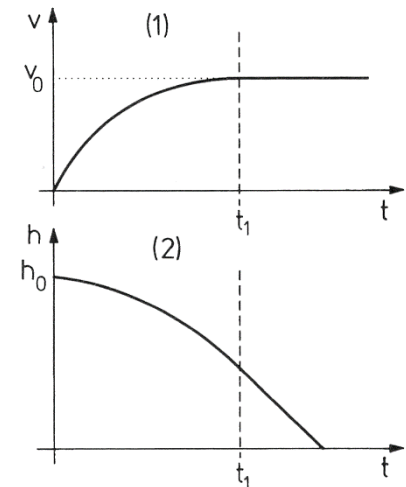
gilt für die Geschwindigkeit der Kugel:

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{\eta} \cdot g \cdot r^2$$



Durch Messung von h und v als Funktion der Zeit lässt sich bei bekannten Radius r der Kugel und vorgegebenen Dichten ρ_K bzw. ρ_{Fl} von Kugel und Fluid die Viskosität berechnen.

Anwendung: Sedimentation im Ultrazentrifugen um Makromolekülen, wie Proteine zu sedimentieren
Typischerweise: $a \geq 100.000 g$



Strömungen realer Fluide

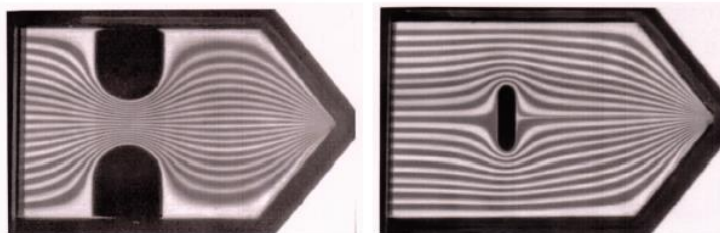
Bisher nur ideale Fluide: die gesamten von außen, beispielsweise durch Druckkräfte zugeführte Arbeit wird in Beschleunigungsarbeit des Mediums umgesetzt. D.h. aufgrund einer Druckänderung erfährt ein ideales Fluid ausschließlich eine Änderung seiner kinetischen Energie.

In realen Fluiden: die Viskosität des Fluids verursacht eine Energiedissipation, wobei die Energie letztendlich in Wärme umgewandelt wird.

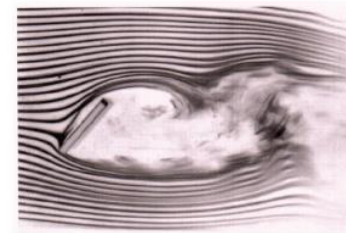
Laminare oder wirbelfreie Strömung: die Reibungskräfte sind groß gegenüber den für die Beschleunigung des Fluids verantwortlichen Kräften, d.h. die Stromlinien des Fluids bewegen sich parallel zueinander in Schichten ohne sich zu durchmischen.

Turbulente Strömung: durch Ausbildung von Wirbeln kommt es zur vollständigen Durchmischung der Stromlinien.

laminare Strömung



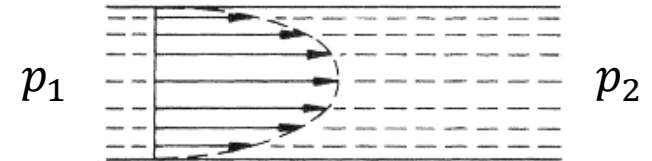
turbulente Strömung



Laminare Strömung viskoser Fluide

Betrachte eine zylindrische Rohre (oder zwei parallelen Wände (Kanal))

Zur Aufrechterhaltung einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit muss eine der Reibung entgegengesetzte, betragsmäßig gleich große Kraft angelegt werden, zum Beispiel eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen Ein- und Auslauf eines Rohres.



Das Geschwindigkeitsprofil eines laminar strömenden viskosen Fluids ist, im Querschnitt betrachtet, parabelförmig.

Die Strömungsgeschwindigkeit ist null für die unmittelbar an den Rohrwand anhaftende Fluidschicht und in der Achse der Röhre herrscht die größte Strömungsgeschwindigkeit.

parabolischen Geschwindigkeitsverteilung:
$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2)$$

$v(r)$ = Strömungsgeschwindigkeit in der Entfernung r von der Zylinderachse

$\Delta p = p_1 - p_2$ = Druckdifferenz zwischen den Rohrenden

η = dynamische Viskosität des Fluids

l, R = Länge bzw. Radius des zylindrischen Rohres

Gesetz von Hagen-Poiseuille

Volumenstrom = Transportiertes Flüssigkeitsvolumen pro Zeit: $I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Durch eine Querschnittsfläche mit den Radien zwischen r und $r + dr$ strömt in der Zeiteinheit dt das Fluidvolumen dV bei gegebenem v :

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot v = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot v(r)$$

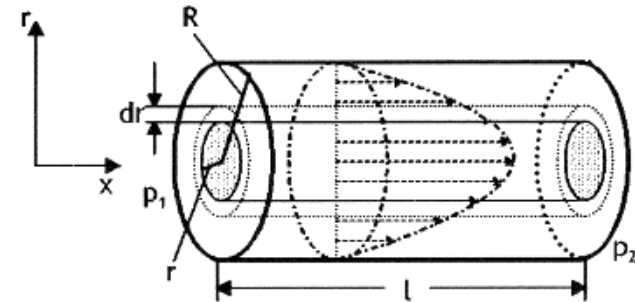
$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi \cdot \Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr$$

Und damit durch den gesamten Rohrquerschnitt in der Zeit t :

$$\frac{V}{t} = \int_{r=0}^R \frac{2\pi \cdot \Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr$$

Hagen-Poiseuille'sches Gesetz (für laminarer Volumenstrom durch ein Rohr):

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \Delta p = \frac{A^2}{8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot l} \cdot \Delta p$$



Strömungswiderstand

Wird ein Körper relativ zu einem Fluid bewegt, so wirkt in allgemeinen Fall auf den Körper eine Kraft, die in zwei Komponenten senkrecht und parallel zur Strömungsrichtung zerlegt werden kann.

Die Komponente senkrecht zur Strömungsrichtung heißt dynamischer Auftrieb, die Komponente in Strömungsrichtung ist der Strömungswiderstand.

Bei der Strömung durch ein Rohr treten infolge der inneren Reibung Verluste an kinetische Energie auf.

Zur Aufrechterhaltung einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit müssen diese Energieverluste kompensiert werden, wozu eine Kraft erforderlich ist, welche durch die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen Ein- und Auslauf eines Rohres verursacht wird.

Strömungswiderstand R_S : das Verhältnis aus Druckdifferenz und Volumenstrom:

$$R_S = \frac{\Delta p}{I}$$

$$\text{Einheit: } \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^5} = \frac{\text{Pa}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}$$

Strömungswiderstand

Strömungsleitwert L_S : der reziproke Wert des Strömungswiderstandes:

$$L_S = \frac{1}{R_S}$$

$$\text{Einheit: } \frac{m^5}{N \cdot s}$$

Für rundes Rohr:

$$R_S = \frac{\Delta p}{I} = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p} \cdot \Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4} = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{A^2}$$

Kirchhoff'sche Gesetze für Flüssigkeitsströmungen (analog zu elektrische Strömen):

1. Sind mehrere Röhren hintereinander geschaltet (Serienschaltung), so addieren sich ihre Strömungswiderstände:

$$R_{Sges} = R_{S1} + R_{S2} + \dots$$

2. Bei Parallelschaltung von Röhren addieren sich deren Leitwerte:

$$L_{Sges} = L_{S1} + L_{S2} + \dots = \frac{1}{R_{S1}} + \frac{1}{R_{S2}} + \dots$$

Strömungswiderstand: Beispiel

- Zwei Kapillaren mit unterschiedlichem Durchmesser hintereinander geschaltet und werden laminar von einer inkompressiblen Newton'schen Flüssigkeit durchströmt.

Volumenstrom = const., d.h. gleichem Volumenstrom durch beide Kapillare.

Daher: $\Delta p_{21} = p_2 - p_1 < \Delta p_{32} = p_3 - p_2$

Der gesamten Strömungswiderstand ist:

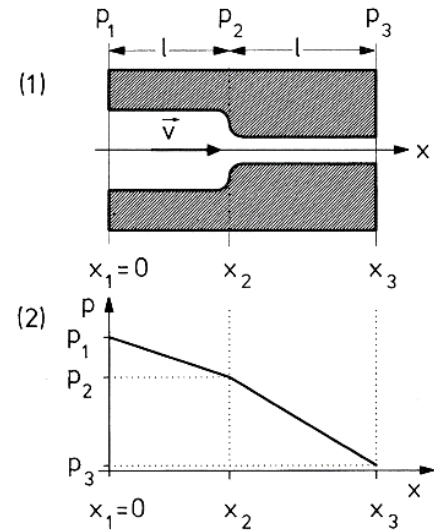
$$R_{Sges} = R_{S1} + R_{S2} = \frac{\Delta p_{21}}{I} + \frac{\Delta p_{32}}{I}$$

Verhältnis der beide Teilwiderstände (bei doppelt so großem Durchmesser der ersten in Vergleich zur zweiten Kapillare):

$$\frac{R_{S1}}{R_{S2}} = \frac{1}{16}$$

da für rundes Rohr gilt:

$$R_S = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4}$$

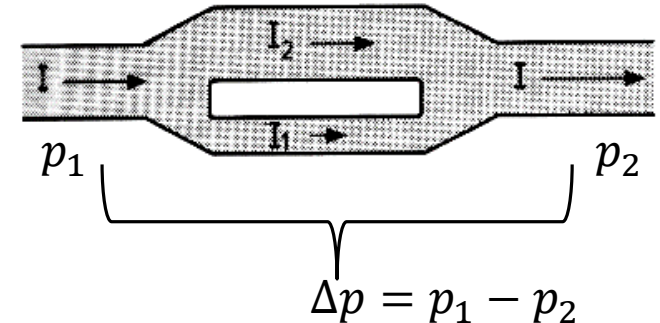


Strömungswiderstand: Beispiel

- Eine laminar strömende inkompressible Flüssigkeit verzweigt auf einen Teilstück in zwei Rohre gleicher Länge, deren Durchmesser sich verhalten wie $d_1:d_2 = 1:2$

Der Gesamtvolumenstrom I teils sich in die beiden Teilströme auf:

$$I = I_1 + I_2$$



Der gesamten Strömungsleitwert ist:

$$L_{Sges} = \frac{1}{R_{Sges}} = \frac{I}{\Delta p} = \frac{I_1}{\Delta p} + \frac{I_2}{\Delta p} = \frac{1}{R_{S1}} + \frac{1}{R_{S2}} = L_{S1} + L_{S2}$$

Das Verhältnis der Strömungswiderstände in den beiden Rohren ist:

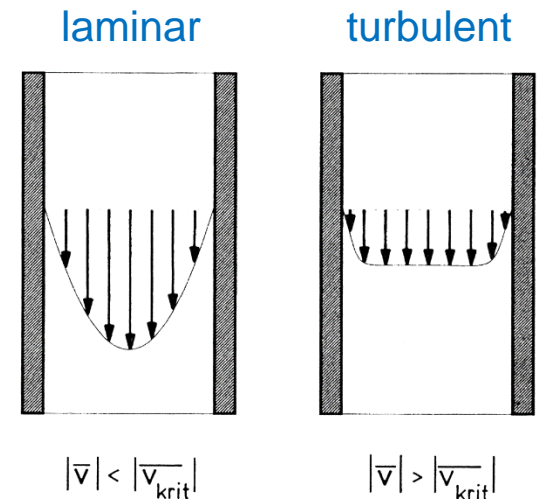
$$\frac{R_{S1}}{R_{S2}} = \frac{16}{1}$$

Turbulente Strömung viskoser Fluide

Bei Erhöhung der mittlere Geschwindigkeit \bar{v} der laminaren Strömung einer viskosen Flüssigkeit über einem bestimmten Grenzwert, die sog. Kritische Geschwindigkeit \bar{v}_{krit} , geht die Strömung ganz oder teilweise in eine turbulente Strömung über.

Durch Ausbildung von Wirbeln kommt es zur vollständigen Durchmischung der benachbarten Schichten und Geschwindigkeitsunterschiede werden ausgeglichen.

Trägheit fördert Turbulenz
Reibung hemmt Turbulenz



Daher ist das Kriterium für den Strömungszustand, die sog. **Reynolds-Zahl Re** :

$$Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$$

Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{l \cdot \bar{v} \cdot \rho}{\eta} = \frac{l \cdot \bar{v}}{\nu}$$

Einheit: dimensionslos, reine Zahl

l = charakteristische lineare Abmessung

\bar{v} = mittlere Strömungsgeschwindigkeit

ρ = Dichte des Fluids

η = dynamische Viskosität des Fluids

ν = kinematische Viskosität des Fluids, $\nu = \eta/\rho$; Einheit m^2/s

Das Kriterium für das Umschlagen der laminaren in die turbulente Strömung ist nicht allein die Größe der mittlere Strömungsgeschwindigkeit, sondern es wird in allgemeinen Fall durch die Reynolds-Zahl bestimmt.

Der Umschlag folgt bei Re_{krit} :

$Re < Re_{krit}$ die Strömung laminar

$Re > Re_{krit}$ die Strömung turbulent

Re_{krit} ist abhängig vom System und muss experimentell ermittelt werden.

Reynolds-Zahl: Beispiele

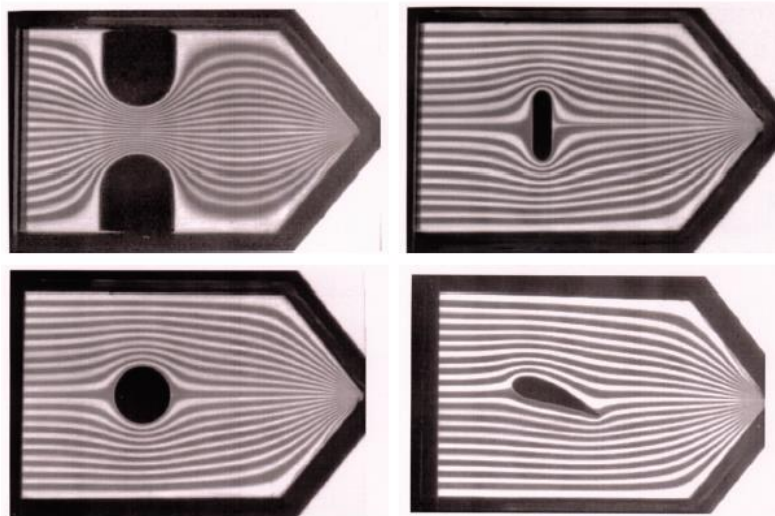
Für Rohr mit Durchmesser d gilt:

$$Re = \frac{d \cdot \bar{v} \cdot \rho}{\eta}$$

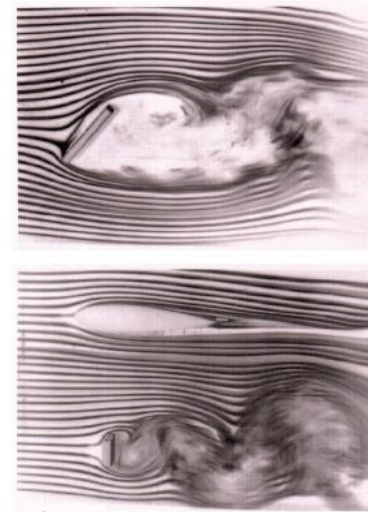
Turbulenzen ab $Re_{krit} \approx 1100$

(noch ein bißchen abhängig von z.B. Oberflächeneigenschaften)

laminare Strömung



turbulente Strömung



Strömungswiderstandskraft

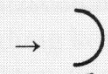
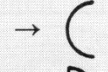
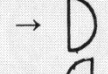
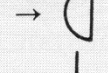
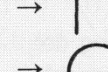
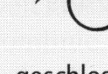
Ein Körper, der von einem Fluid der Dichte ρ turbulent umströmt wird, erfährt eine Strömungswiderstandskraft F_w (Kraft in Anströmrichtung) proportional zu Dichte und zum Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit v :

$$F_w = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

v = mittlere Relativgeschwindigkeit
zwischen Körper und Fluid

A = Fläche der Körpers senkrecht
zur Strömungsrichtung

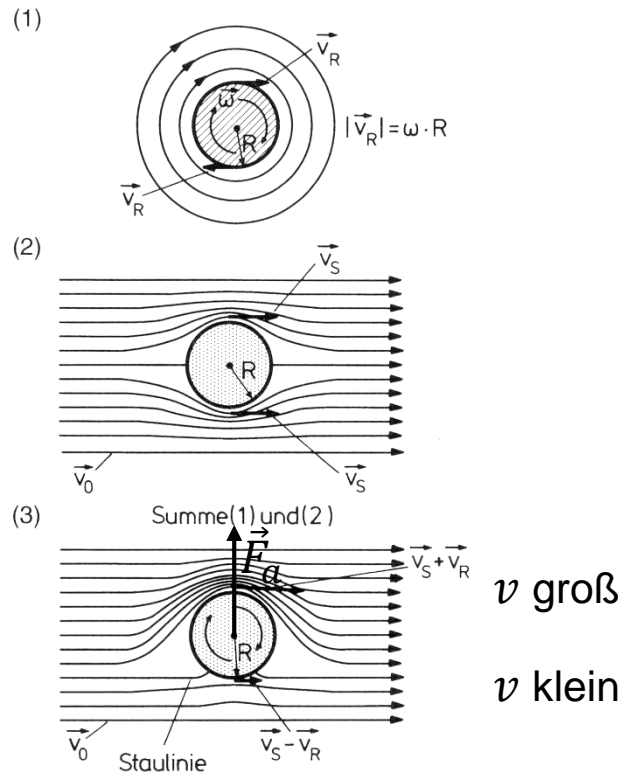
c_w = Widerstandsbeiwert,
abhängig von der Form des Körpers

Körper	Anströmungsrichtung	c_w
Halbkugel, offen	→ 	1,33
	→ 	0,35
Halbkugel, geschlossen	→ 	1,17
	→ 	0,4
Platte, eben, dünn	→ 	1,11
Stromlinienkörper	→ 	0,05
Personenkraftwagen, geschlossen		0,28...0,4
Personenkraftwagen, offen		0,6...0,9
Lastkraftwagen		0,6...1,2
Rennwagen		0,15...0,2

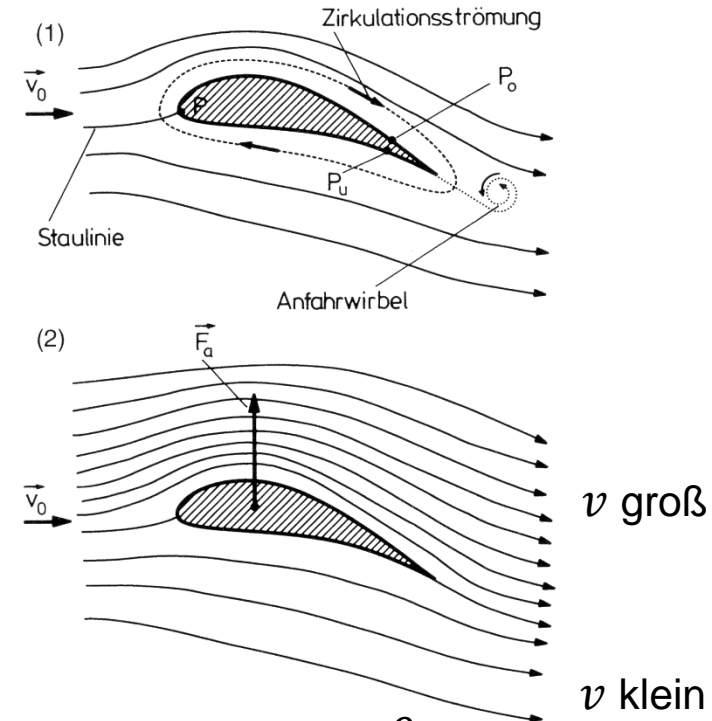
Dynamischer Auftrieb

Bei dynamischer Auftrieb handelt sich es um Querkräfte, senkrecht zu Bewegungsrichtung, infolge der Vorwärtsbewegung bzw. der Anströmung von Körpern in Flüssigkeiten und Gasen.

Magnus-Effekt



Flügel



$$F_a = c_a \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_0^2$$

A = Flügelfläche, c_A = Auftriebsbeiwert 206

Grenzflächeneffekte

Grenzfläche: die Berührungsfläche von Medien in unterschiedlichen Aggregatzuständen (z.B. flüssig-gasförmig), von festen Körpern oder zwei nicht mischbaren flüssigen Phasen

Der Aggregatzustand (fest, flüssig, gasförmig) ist durch **die Größe der Kräfte zwischen den Bausteinen** (Atomen, Molekülen, Ionen) der Materie bedingt.

Kohäsionskräfte F_K : Kräfte zwischen den Bausteinen ein und desselben Körpers

Adhäsionskräfte F_A : Kräfte zwischen den Bausteinen verschiedener Körper

Kohäsion: Wechselwirkungen (durch Anziehungskräfte) zwischen *gleichartigen* Molekülen z.B. zwischen einzelnen Flüssigkeitsmolekülen

Adhäsion: Wechselwirkungen (infolge von Anziehungskräften) zwischen verschiedenartigen Molekülen eng einander berührender Körper, z.B. zwischen den Festkörper- und Flüssigkeitsmolekülen

Oberflächenspannung

Flüssigkeiten unterscheiden sich von Gasen, indem sie **freie Oberflächen** aufweisen.

Eine Flüssigkeit nimmt stets die Gestalt mit kleinstmöglicher Oberfläche an.

A: ein Molekül im inneren der Flüssigkeit:

Im Flüssigkeitsinnern kompensieren sich die Anziehungskräfte der um dieses Molekül liegenden anderen Moleküle gegenseitig, $F_{ges} = 0$.

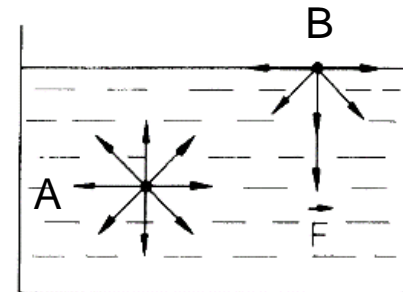
B: Teilchen an der Flüssigkeitsoberfläche:

Resultierende der molekularen Anziehungskräfte wirkt ins Flüssigkeitsinnere.

Gesamtkraft steht senkrecht auf Oberfläche und zeigt ins Flüssigkeitsinnere.

D.h. wird ein Molekül aus dem Flüssigkeitsinneren an die Oberfläche transportiert, so muss gegen diese Kraft Arbeit verrichtet werden.

Infolge dessen besitzen alle an der Flüssigkeitsoberfläche liegenden Moleküle eine **Oberflächenenergie**, d.h. eine größere potentielle Energie als im Inneren der Flüssigkeit.



Oberflächenspannung

Ein stabiles Gleichgewicht entspricht einem Minimum an potentieller Energie.

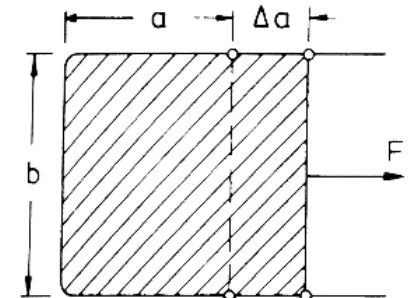
Darum versucht die Oberfläche einer Flüssigkeit sich möglichst zu verkleinern: sie bildet eine so genannte *Minimalfläche*.

Von allen geometrischen Körpern weist eine Kugel das kleinste Verhältnis von Oberfläche zu Volumen auf: Flüssigkeitstropfen versuchen eine Kugelgestalt anzunehmen.

Seifenlamelle:

Oberfläche: $S = 2 \cdot a \cdot b$
Ober/Unterseite

Oberflächenvergrößerung: $\Delta S = 2 \cdot \Delta a \cdot b$



Die zur Vergrößerung der Oberfläche S um ΔS erforderliche Arbeit

$\Delta W = \Delta a \cdot F$ ist gleichbedeutend mit dem Zuwachs an Oberflächenenergie der Flüssigkeit.

Oberflächenspannung

Oberflächenspannung:

$$\sigma = \frac{\text{Zuwachs an Energie}}{\text{Oberflächenzunahme}} = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$

$$\text{Einheit: } \frac{J}{m^2} = \frac{N}{m}$$

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{\Delta a \cdot F}{2 \cdot \Delta a \cdot b} = \frac{F}{2 \cdot b}$$

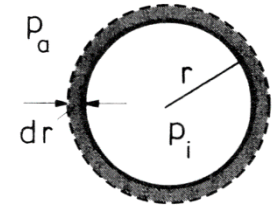
D.h. $F = 2 \cdot b \cdot \sigma$

Die zur Vergrößerung der Oberfläche erforderliche Kraft ist unabhängig von der Auslenkung Δa und der Größe der vorhandenen Oberfläche.

	σ in $\frac{N}{m}$ (gegen Luft)
Ethanol	0,02
Olivenöl	0,03
Wasser	0,07
Quecksilber	0,4

Kohäsionsdruck

Bei einem Flüssigkeitstropfen (kugelförmige Gestalt mit Radius r), zeigt die resultierende Kraft der intermolekularen Kräfte an jedem Oberflächenelement radial in Richtung des Mittelpunktes.



Die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft ergibt einen Normaldruck, der als Überdruck an der konkaven Seite (innere Seite des Flüssigkeitstropfens) vorliegt.

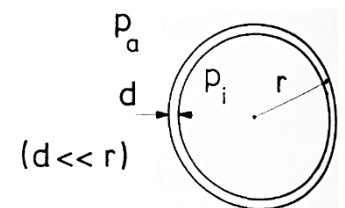
Dieser so genannte **Kohäsionsdruck** innerhalb einer Flüssigkeitskugel im Gasraum oder innerhalb eines mit Gas gefüllten Hohlraums in einer Flüssigkeit kompensiert das Bestreben der Oberfläche sich zu verkleinern.

Für den Kohäsionsdruck p eines kugelförmigen Flüssigkeitstropfen bzw. einer Gasblase in einer Flüssigkeit gilt:

$$p = p_i - p_a = 2 \frac{\sigma}{r}$$

Für den Kohäsionsdruck p im Inneren einer Seifenblase gilt:

$$p = p_i - p_a = 4 \frac{\sigma}{r}$$



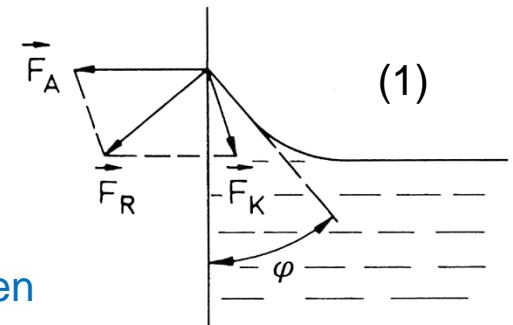
Faktor 4 statt 2: beide Oberflächen wollen kleiner werden

Randwinkel

Bei einer senkrecht in einer Flüssigkeit stehenden festen Grenzfläche, etwa der Gefäßwand, verursacht das Zusammenwirken der Kohäsion und Adhäsion in der Nähe der festen Grenzfläche eine Krümmung der freien Oberfläche der Flüssigkeit.

Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich senkrecht zur resultierenden Kraft $\vec{F}_R = \vec{F}_K + \vec{F}_A$ ein.

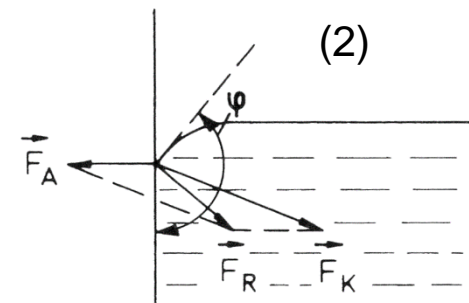
Vom Einfluss der Schwerkraft wird hier gegenüber den im Vergleich größeren Oberflächenkräften abgesehen.



Im Gleichgewichtszustand bildet sich dann an der Grenze zwischen festem, flüssigem und gasförmigem Stoff ein Randwinkel φ aus.

(1) benetzendes System: $F_A > F_K$: $\varphi < 90^\circ$

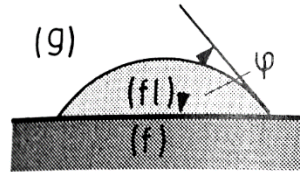
Die Flüssigkeit wird an der Wand hochgezogen bis das Gewicht der Flüssigkeit dem Aufwärtskriechen ein Ende setzt.



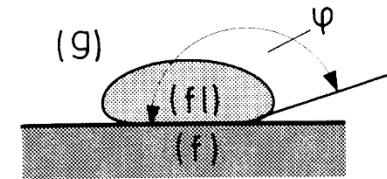
(2) nicht benetzendes System: $F_A < F_K$: $\varphi > 90^\circ$

Grenzflächenspannung

Tropfen auf Oberfläche:



benetzend



nicht benetzend

Randwinkel:

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{f,g} - \sigma_{f,fl}}{\sigma_{fl,g}}$$

Oberflächenspannungen (Grenzflächenspannungen):

$\sigma_{fl,g}$ = flüssig – gasförmig

$\sigma_{f,g}$ = fest - gasförmig

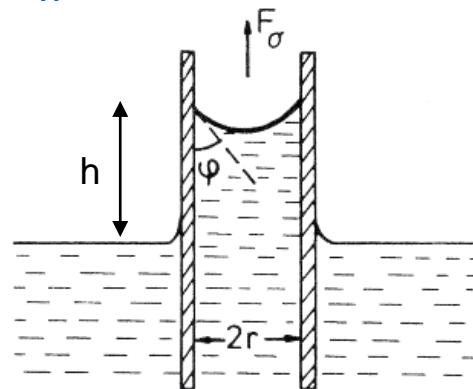
$\sigma_{f,fl}$ = fest - flüssig

Kapillarität

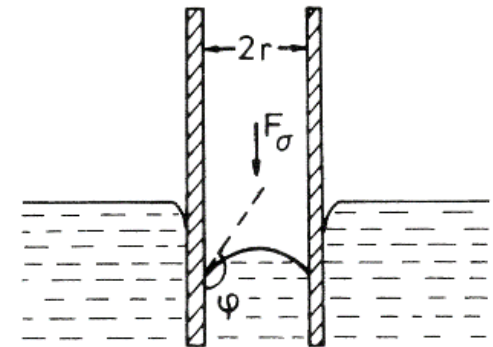
Die Wirkungen der Oberflächenspannung an der Grenze Festkörper-Flüssigkeit- Gas wird besonders deutlich in engen Rohren, so genannten Kapillaren, z.B. beim Eintauchen von Kapillaren in eine Flüssigkeit.

Aszension: in einer benetzenden Flüssigkeit steigt die Flüssigkeit in der Kapillare hoch

Depression: in einer nicht benetzenden Flüssigkeit wird die Flüssigkeitsoberfläche in der Kapillare unter das Niveau im umgebenden Gefäß herabgedrückt.



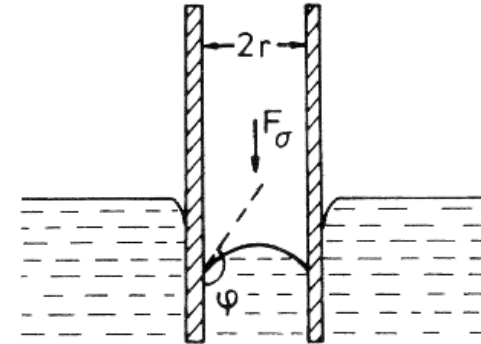
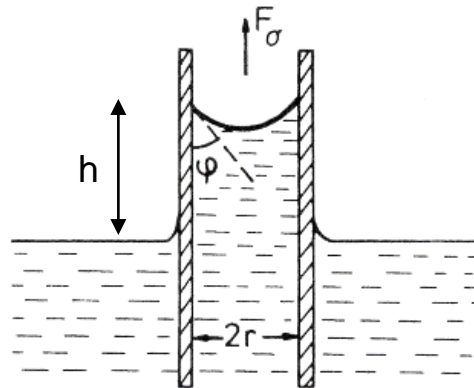
Steighöhe einer benetzenden Flüssigkeit in einem engen Rohr



Kapillar-depression für eine nicht benetzende Flüssigkeit

Die freie Oberfläche hat in beiden Fällen eine Krümmung, der so genannte Meniskus. Die Krümmung ist umso stärker, je kleiner der Durchmesser der Kapillare ist.

Kapillarität



Eine die Kapillarwand benetzende Flüssigkeit wird in der Kapillare so weit hochsteigen, bis der Kohäsionsdruck im Gleichgewicht mit dem der Steighöhe h entsprechenden Schweredruck ist.

Für die Steighöhe h (Meniskus) gilt:

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \varphi}{r \cdot \rho_{Fl} \cdot g}$$

Für stark benetzende Systeme ($\varphi \approx 0$),
z.B. Wasser-Glaskapillare:

$$h = \frac{2\sigma}{r \cdot \rho_{Fl} \cdot g}$$

Bei gleicher Oberflächenspannung ist die Steighöhe desto größer je kleiner der Radius der Kapillare ist.

Wärmelehre

Wärmelehre oder Thermodynamik

Wärmelehre oder Thermodynamik: die Untersuchung von Prozessen (Energieumwandlungen), die Wärme, mechanische Arbeit und andere Aspekte der **Energie** beinhalten, und wie diese Transformationen sich auf die Eigenschaften von Materie beziehen.

Innerhalb der Naturwissenschaften hat die Thermodynamik große Bedeutung, da bei sämtlichen in der Natur ablaufenden Prozesse auch Energie beteiligt ist. Thermodynamik ist daher ein unverzichtbarer Bestandteil der Grundlagen der Physik, Chemie und Biowissenschaften.

Beispiele:

- Wärmekraftmaschinen (Wärme in mechanische Arbeit umwandeln): Dampfmaschinen, Gasturbinen, Dieselmotor
- Arbeitsmaschinen: Pumpen, Kompressor
- Klima- und Kältetechnik (Kühlschrank)
- Aussagen über Stoffe, wie die verschiedenen Aggregatzustände und ihren Wechsel (Phasenübergang)
- (bio-)chemische Reaktionen

Wärmelehre oder Thermodynamik

klassische Thermodynamik: Stoffe werden als Kontinuum betrachtet (lassen sich beliebig teilen). Die klassische Thermodynamik beschreibt die **Wärme**, Druck, Volumen, und **Temperatur** eines Körpers oder Systems.

statische Thermodynamik: Stoffe werden als Ansammlung von einzelnen Teilchen wie Atomen oder Molekülen gesehen. Die statische Thermodynamik beschreibt das Verhalten der Teilchen wegen ihrer großen Anzahl mit **statistischen Methoden** und der **kinetischen Gastheorie**, z.B. wie die Temperatur mit der kinetischen Energie der Teilchen zusammenhängt.

Temperatur: beschreibt den thermischen Zustand, d.h. den **Wärmezustand**, eines makroskopischen Körpers oder Systems. Die Temperatur ist eine skalare Größe und ist von der Masse und der stofflichen Zusammensetzung des Körpers unabhängig.

Wärmemenge: für eine Änderung der Temperatur, muss dem System **Wärme, d.h. Energie**, zugeführt oder entzogen werden. Die dabei benötigte oder freigesetzte **Wärmemenge** ist abhängig von der Masse, stofflichen Zusammensetzung und der Größe der Temperaturänderung.

Thermisches Gleichgewicht: zwei verschiedene warme Körper nehmen bei Berührung schließlich eine gemeinsame Endtemperatur an.

Fragen an die Thermodynamik

- **Wesen der Wärmelehre**
 - Was ist Wärme
 - Was ist Temperatur
 - Wie kann Temperatur gemessen werden
- **Thermische Eigenschaften von Stoffen**
 - Wie verhalten sich Körper bei Wärmezufuhr
 - Wieviel Wärme kann ein Stoff aufnehmen
- **Phasenumwandlung**
 - Was ist eine Phase
 - Wodurch wird ein Phasenübergang charakterisiert
- **Hauptsätze der Wärmelehre**
 - Welche Energiewandlungen sind möglich
 - In welche Richtung verlaufen Prozesse
- **Wärmetransport**
 - Wodurch wird Wärmetransport verursacht
 - Auf welche Art kann Wärmeenergie transportiert werden
- **Diffusion und Osmose**
 - Welche Ursachen führen zu Teilchentransport
 - Welche Größen beeinflussen den Transport

Temperaturskalen

- **Celsiuskala:**

100 Teile zwischen dem Nullpunkt, 0 °C, die Temperatur, bei der sich Eis und Wasser im Gleichgewicht befinden und dem Siedepunkt von Wasser, 100 °C (beide bei Normaldruck, $p_0 = 1013 \text{ hPa}$)

- **Fahrenheitskala:**

100 Teile zwischen 37,7 °C und -17,8 °C

Fixpunkte sind der Gefrierpunkt (gleich 32 °F) und der Siedepunkt des Wassers (gleich 212 °F)

- **Kelvinskala:**

In der Physik am sinnvollsten: **Absolute thermodynamische Temperaturskala in Kelvin:**

273,16 Teile zwischen dem Absoluten Nullpunkt, 0 K, und dem Tripelpunkt des Wassers, 273,16 K ($p_T = 611 \text{ Pa}$)

D.h. die Einheit K [Kelvin] ist definiert als das 1/273,16-fache der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Bei 273,15 K oder 0 °C nur Gleichgewicht Eis und Wasser.

Temperaturskalen

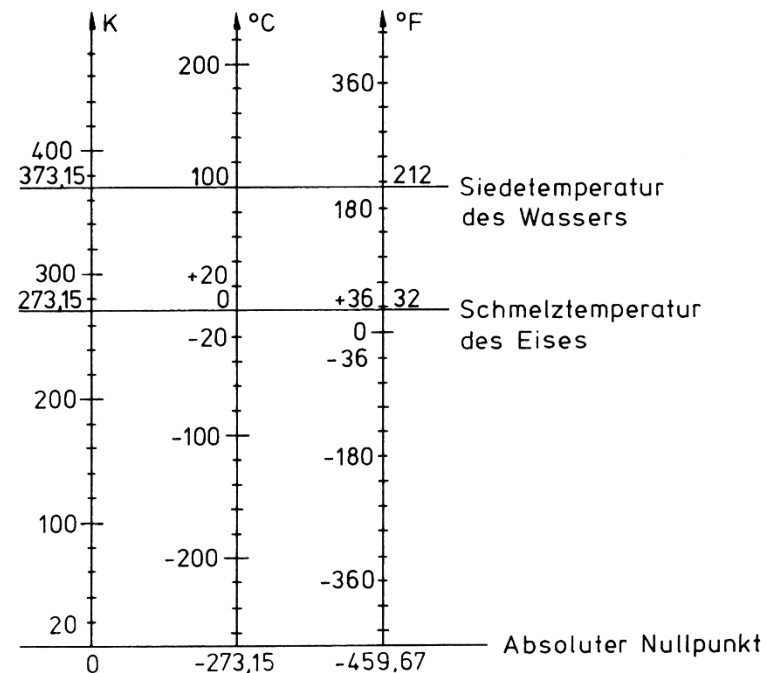
Beachte: Temperaturen in Kelvin gemessen: T

Bei anderen Temperaturskalen als Kelvin werden üblicherweise andere Symbole verwendet, t oder ϑ (θ) [Theta].

Temperaturdifferenzen $\Delta T = \Delta t$ dürfen daher auch in Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) angegeben werden, aber üblicherweise in Kelvin (K).

$$\frac{T}{\text{K}} = \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} + 273,15$$

$$\frac{T}{^{\circ}\text{F}} = \frac{9}{5} \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} + 32$$



Temperaturmessung

Viele physikalische Größen oder Eigenschaften von festen, flüssigen und gasförmigen Substanzen sind temperaturabhängig:
Volumen, Dichte, Elastizität, Viskosität, elektrische Leitfähigkeit, usw.

Die Änderung einiger dieser Eigenschaften nutzt man bei der Messung der Temperatur mit Thermometern, z.B. **die Ausdehnung von Flüssigkeiten und Gasen.**

Flüssigkeitsthermometer:

Messfühler: Messflüssigkeit in einem dünnwandigen Behälter von Kugel- oder Zylindergestalt aus Glas oder Quarz

Kapillare: An diese Kapillare ist eine Messskala angebracht, deren Teilstrichabstand von der Messflüssigkeit, dem Messbereich und von der verwendeten Glasart abhängt

Gebäuchlichste Thermometersubstanzen:

- Quecksilber: -39 °C bis 300 °C
- Quecksilber mit Gasfüllung: -39 °C bis 700 °C
- Alkohol, Toluol: -100 °C bis 200 °C
- Pentan: -190 °C bis 700 °C



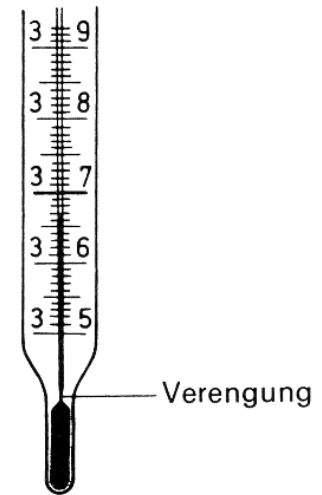
Temperaturmessung

Fieberthermometer:

Speziell: Flüssigkeitssäule muss auch bei Abkühlen auf Zimmertemperatur erhalten bleiben, damit man genau genug ablesen kann

Daher: Kapillare kurz oberhalb der Kugel stark verengt

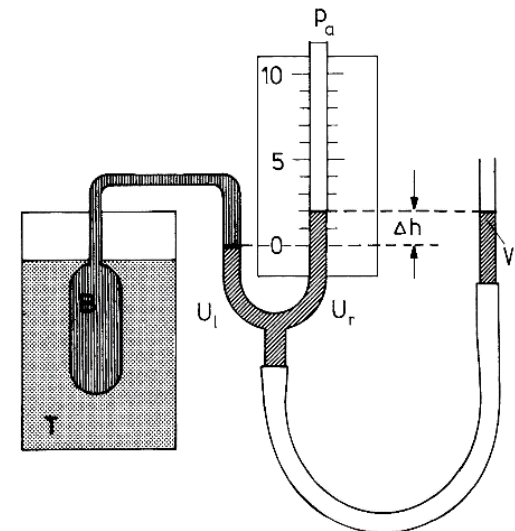
Folge: Verringerung der Kohäsionskräfte der Flüssigkeit und der Faden reißt ab, wenn das Quecksilber in der Kugel sich wieder zusammenzieht



Nur durch Trägheitskräfte, d.h. durch Schleudern, wird die Säule „heruntergeschlagen“

Gasthermometer:

Änderung der Höhe durch eine Druckänderung verursacht durch eine Temperaturänderung.
Typischerweise Wasserstoff- oder Heliumfüllung
(Arbeitsbereich 3 K bis 2300 K)



Temperaturmessung

Messung von elektrischen Eigenschaften

Widerstandsthermometer:

Der elektrische Widerstand von Metallen und Halbleitern ist von der Temperatur abhängig.

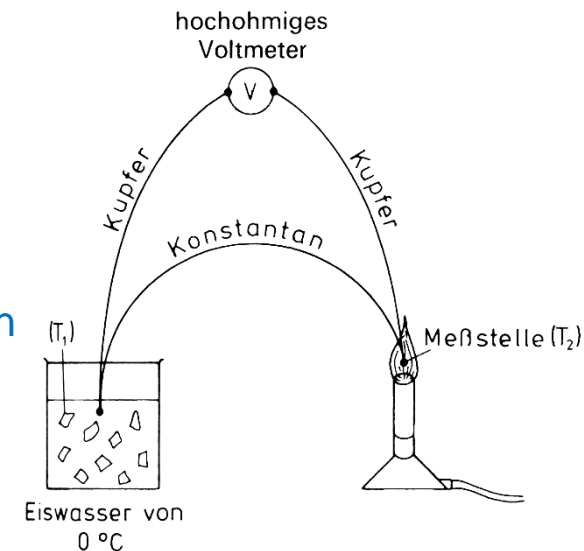
Bei Metallen steigt der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur und bei Halbleitermaterialien sinkt der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur.

Beispiele: Platin (-250 °C bis 1000 °C), Einkristalle aus Germanium oder Silizium (sehr empfindlich zwischen 0,1 und 20 K)

Thermoelemente:

Zur Temperaturmessung wird die Messstelle der zu messenden Temperatur ausgesetzt (T_2) und die Vergleichsstelle auf einer bekannten und konstanten Temperatur (T_1) gehalten.

$$U_{th} = a \cdot \Delta T = a \cdot (T_2 - T_1)$$

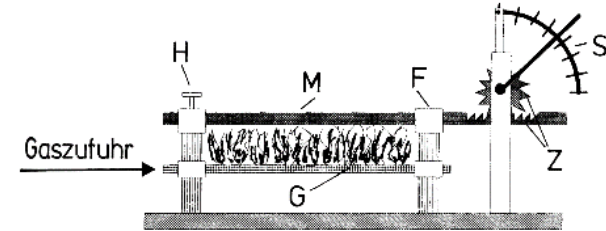


Vorteile: Temperaturfühler mit sehr kleiner Berührungsfläche

Thermische Ausdehnung von Festkörper

Lineare Ausdehnung

Beispiel: Stab oder Rohr das erwärmt wird
Durch Erwärmung ändert sich die Länge und
der Stab drückt gegen eine Zahnstange mit aufliegendem Zahnrad Z.



Länge l_0 bei der Ausgangstemperatur T_0

Länge l bei der Temperatur $T = T_0 + \Delta T$:

$$l(T) = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \cdot \Delta T$$

α = linearer Ausdehnungskoeffizient, Einheit K^{-1}

Der lineare Ausdehnungskoeffizient ist über große Temperaturbereiche selbst von der Temperatur abhängig.

	α in $10^{-6}/\text{K}$ (Mittelwerte für den Bereich 0 °C bis 100 °C)
Aluminium	23,9
Kupfer	16,7
Glas (Fenster)	10
Glas (Quarz)	0,45

Thermische Ausdehnung von Festkörper, Flüssigkeit und Gas

Volumenausdehnung

Volumen V_0 bei der Ausgangstemperatur T_0

Volumen V bei der Temperatur $T = T_0 + \Delta T$:

$$V(T) = V_0(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \cdot \Delta T$$

γ = Volumenausdehnungskoeffizient, Einheit K^{-1}

Der Volumenausdehnungskoeffizient ist nicht streng linear mit der Temperatur, d.h. γ kann berechnet werden aus der Steigung der Messkurve V gegen T .

Für homogenen und isotropen Festkörper: $\gamma = 3\alpha$

	γ in $10^{-4}/\text{K}$ (bei 20 °C)
Aceton	14,9
Benzin	10,6
Ethanol	11
Olivenöl	7,2
Quecksilber	1,82

Temperaturabhängigkeit der Dichte

Dichte eines Körpers bei Temperatur T :

$$\rho(T) = \frac{m}{V(T)} = \frac{m}{V_0(1 + \gamma \cdot \Delta T)} = \frac{m}{V_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma \cdot \Delta T}$$

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta T}$$

ρ_0 = Dichte bei T_0

ΔT = Temperaturänderung

$\rho(T)$ = Dichte bei Temperatur $T = T_0 + \Delta T$

Im Allgemeinen Dichteabnahme mit steigender Temperatur (Erwärmung führt zu Ausdehnung)

Ausnahme: Anomalie des Wassers

Dichteanomalie des Wassers

Reines Standard-Meerwasser (frei von darin gelösten Salzen oder Gasen):

$$\rho_{max}(3,98\text{ °C}) = 999,975\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

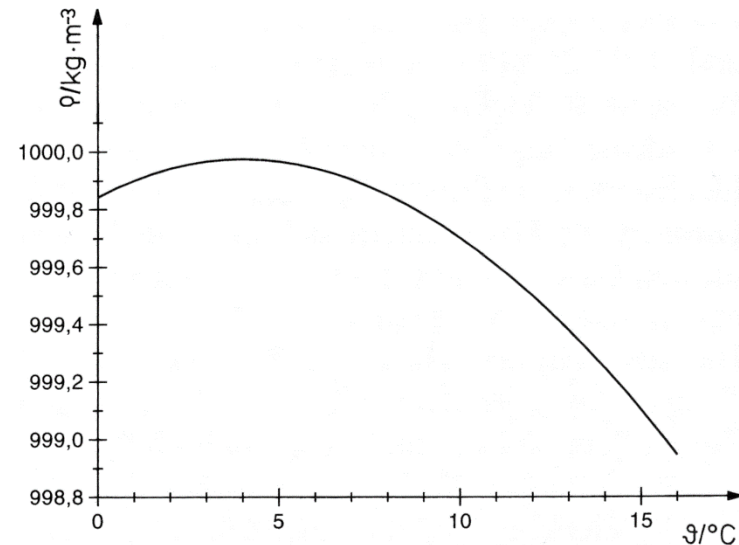
$$\rho(0\text{ °C}) < \rho(4\text{ °C}) > \rho(16\text{ °C})$$

Für Temperaturen oberhalb und unterhalb von 4 °C ist die Dichte des Wassers stets kleiner, d.h. beim Erwärmen von 0 bis 4 °C zieht es sich zusammen.

Eis hat geringere Dichte als Wasser (nahe dem Gefrierpunkt).

→ Eis schwimmt auf Wasser

Stehende Gewässer gefrieren in kalten Wintern deshalb von der Wasseroberfläche her zu, während sie am Grund i. Allg. noch eine Temperatur von 4 °C aufweisen.



Ausdehnung von Gasen

ideale Gase: Gase, deren Teilchen (Atome, Moleküle) punktförmig sind, also keine räumliche Ausdehnung (Eigenvolumen) besitzen, und bei denen zwischen den Teilchen keine (intermolekularen) Wechselwirkungskräfte auftreten. Außerdem sollen sie sich bei Zusammenstößen wie vollelastische Kugeln verhalten. Beispiele: Luft, Wasserstoff, Helium, Neon oder Argon

reale Gase: Gase, wobei die räumliche Ausdehnung der Teilchen oder die zwischen den Teilchen wirkenden Wechselkräfte nicht mehr vernachlässigt werden können.

Im Unterschied zu Festkörpern und Flüssigkeiten dürfen beim Gas wegen seiner **hohen Kompressibilität** Änderungen des Druckes nicht unbeachtet bleiben, wenn wir seine Volumenänderungen verfolgen.

Der physikalische Zustand einer gegebenen Gasmenge ist also durch **drei Größen** bestimmt: 1. durch das Volumen, 2. durch den Druck, den sie auf die Wände ausübt und 3. durch die Temperatur. Diese drei Größen, die den Zustand eines Gases eindeutig beschreiben, nennen wir die **Zustandsgrößen des Gases**.

Gesetz von Boyle-Mariotte (ideale Gase)

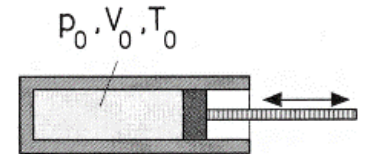
- Für **isotherme Zustandsänderungen** (d.h. bei konstanter Temperatur):

Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p \cdot V = \text{const.}$$

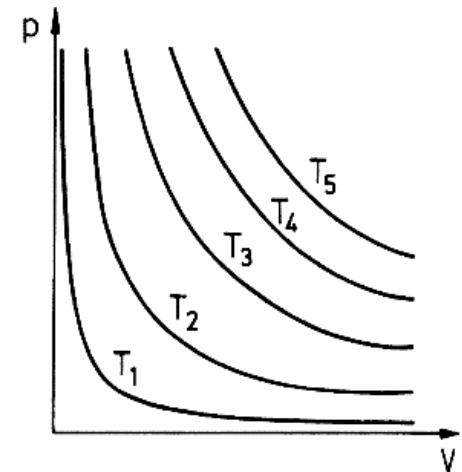
Kolben verschieben bei konstanter Temperatur:

$$p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1$$



Die Kurven konstanter Temperatur in einem p, V -Diagramm sind die Isothermen (Temperatur von T_1 bis T_5 ansteigend)

Beachte: Durch hineindrücken des Kolbens steigt bei gleich bleibender Masse des eingeschlossenen Gases auch dessen Dichte an. Der Druck p ist also der Dichte ρ eines Gases proportional.



Gesetze von Gay-Lussac (ideale Gase)

- Für **isobare Zustandsänderungen** (d.h. bei konstantem Druck):

1. **Gesetz von Gay-Lussac:**

$$V(T) = V_0(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

V_0 = Volumen bei T_0

ΔT = Temperaturänderung

$V(T)$ = Volumen bei Temperatur $T = T_0 + \Delta T$

γ = kubischer Ausdehnungskoeffizient, Einheit K^{-1}

Der kubische Ausdehnungskoeffizient für alle idealen Gase (unabhängig von ihrer chemischen Zusammensetzung) ist gleich groß:

$$\gamma = \frac{1}{273,15} K^{-1} = 366,1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$$

Mit $T_0 = 273,15 K$ ($0^\circ C$):

$$\frac{V(T)}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

Bei isobarer Zustandsänderung:

$$\frac{V(T)}{T} = \text{const.}$$

Gesetze von Gay-Lussac (ideale Gase)

- Für **isochore Zustandsänderungen** (d.h. bei konstanten Volumen):

2. Gesetz von Gay-Lussac:

$$p(T) = p_0(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

p_0 = Druck bei T_0

ΔT = Temperaturänderung

$p(T)$ = Druck bei Temperatur $T = T_0 + \Delta T$

γ = Spannungskoeffizient, Einheit K^{-1}

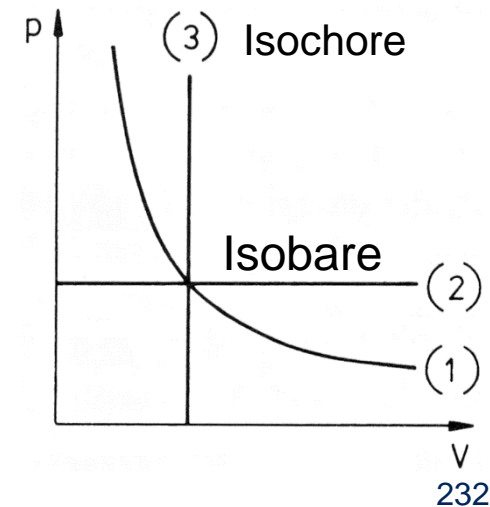
Der Spannungskoeffizient ist für alle idealen Gase numerisch gleich dem kubischen Ausdehnungskoeffizient:

$$\gamma = \frac{1}{273,15} K^{-1} = 366,1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$$

Bei isochorer Zustandsänderung:

$$\frac{p(T)}{p_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\frac{p(T)}{T} = \text{const.}$$



Zustandsgleichung idealer Gase

Zusammengefasst ergibt sich die **Zustandsgleichung idealer Gase**:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

p = Druck (Pa)

V = Volumen (m³)

n = Stoffmenge (mol)

T = **absolute** Temperatur (K)

R = universelle Gaskonstante

Bei

Normaldruck $p_0 = 1013.25$ hPa

Normaltemperatur $T_0 = 273,15$ K

hat 1 mol (= $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen, N_A) das **molare Volumen** $V_{m,0} = 22,4$ dm³/mol

universelle Gaskonstante:

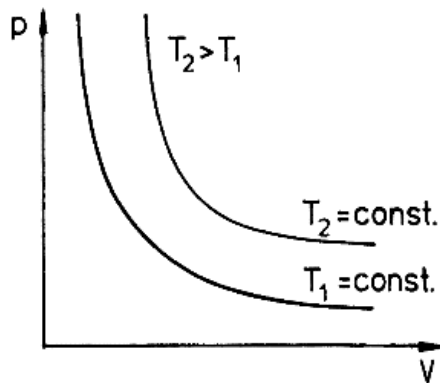
$$R = \frac{p_0 \cdot V_{m,0}}{1 \text{ mol} \cdot T_0} \approx 8,315 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Zustandsgleichung idealer Gase

Die allgemeine Zustandsgleichung charakterisiert ein ideales Gas durch die drei Zustandsgrößen: Druck p , Volumen V und Temperatur T .

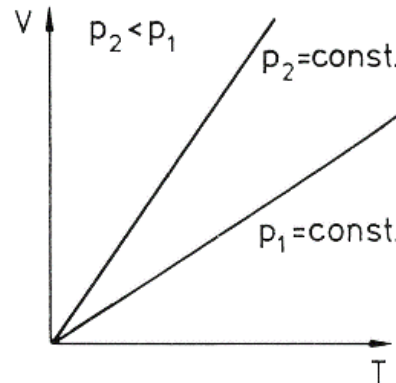
Der funktionale Zusammenhang zwischen je zwei dieser Größen lässt sich in p, V -, V, T - oder p, T -Diagrammen darstellen, wobei jeweils die dritte Größe konstant gehalten wird.

Isotherme
Zustandsänderung



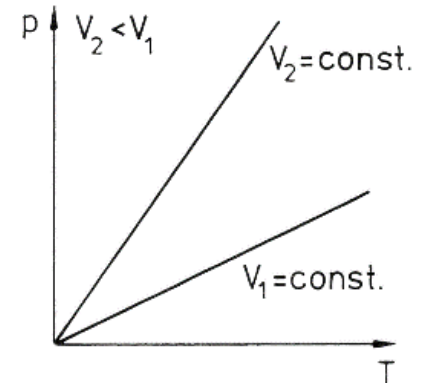
$$p \cdot V = \text{const.}$$

Isobare
Zustandsänderung



$$\frac{V}{T} = \frac{n \cdot R}{p} = \text{const.}$$

Isochore
Zustandsänderung



$$\frac{p}{T} = \frac{n \cdot R}{V} = \text{const.}$$

Reale Gase

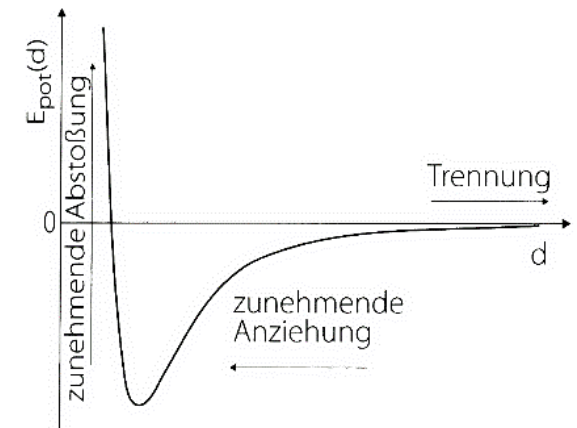
Das Verhalten der realen Gase ist stark von den Teilchendichten, d.h. vom Druck und damit bei größerer Annäherung von der Wechselwirkung zwischen den Teilchen abhängig, z.B. bei hohen Teilchendichten (gesättigter Dampf).

Verlauf der potentiellen Energie $E_{pot}(d)$ zweier neutraler Teilchen (Moleküle, Atome) in Abhängigkeit ihres Abstand d .

Dieser Kurvenverlauf für die Energie ergibt sich aus der Überlagerung der anziehenden und abstoßenden Wechselwirkung zwischen den Teilchen.

kleiner Druck: großer Abstand d \longrightarrow
 $E_{pot}(d) \approx 0$ (Gas verhält sich wie ideales Gas)

Abstand nur einige Teilchendurchmesser:
Anziehungskräfte dominieren \longrightarrow
potentielle Energie nimmt bei bestimmten
Gleichgewichtsabstand ihren negativsten Wert an
 \longrightarrow leichter komprimierbar als ideales Gas



hoher Druck, d.h. hohe Teilchendichte: noch weitere Annäherung
abstoßende Kräfte dominieren \longrightarrow Gas schwerer komprimierbar

Zustandsgleichung Reale Gase

Für reale Gase gilt die **van-der-Waals Zustandsgleichung**:

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

oder für ein Mol:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = R \cdot T$$

a/V^2 = Kohäsions- oder Binnendruck

b = Eigenvolumen (Maß für Volumen der Teilchen)

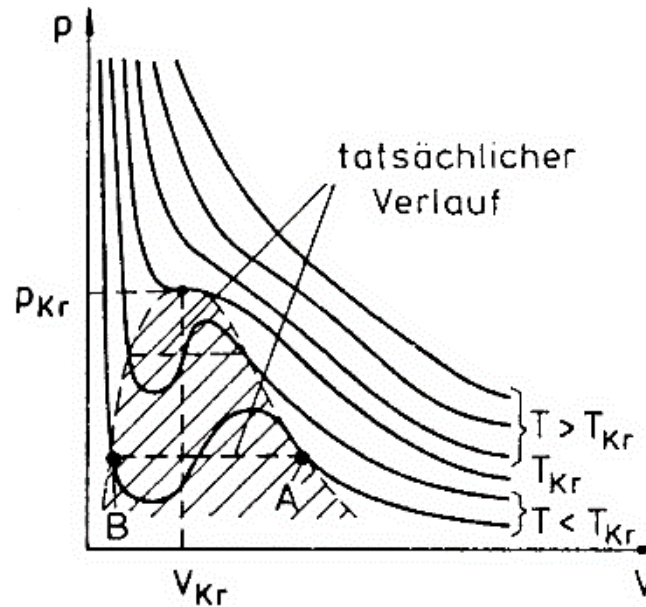
a und b sind Materialkonstanten des betrachteten Gases



van der Waals
1837 - 1923

Zustandsgleichung Reale Gase

Zustandsänderung eines realen Gases im p, V -Diagramm für $T = \text{const.}$



Für $T > T_{Kr}$: Form der Isothermen nähert sich mit steigender Temperatur denen des idealen Gases, d.h. Verhalten nähert sich dem idealen Gas

Für $T < T_{Kr}$: s-förmig gebogener Verlauf entspricht nicht den tatsächlichen Druck-Volumen-Verlauf, sondern die gestrichelte Linie, die so genannte Maxwell'sche Gerade.

Phasenübergang Gas-Flüssigkeit zwischen A und B. In Punkt A setzt Verflüssigung des Gases ein und bei Punkt B ist alles Gas verflüssigt.

Kinetische Wärme- und Gastheorie

statische Thermodynamik: Stoffe werden als Ansammlung von einzelnen Teilchen wie Atomen oder Molekülen gesehen. Die statische Thermodynamik beschreibt das Verhalten der Teilchen wegen ihrer großen Anzahl mit **statistischen Methoden** und der **kinetischen Gastheorie**, z.B. wie die Temperatur mit der kinetischen Energie der Teilchen zusammenhängt.

Mikroskopische Erklärung **makroskopischer** Phänomene

Wärmebewegung: die Atome und Moleküle eines jeden Stoffes sind in Bewegung und beeinflussen sich gegenseitig.

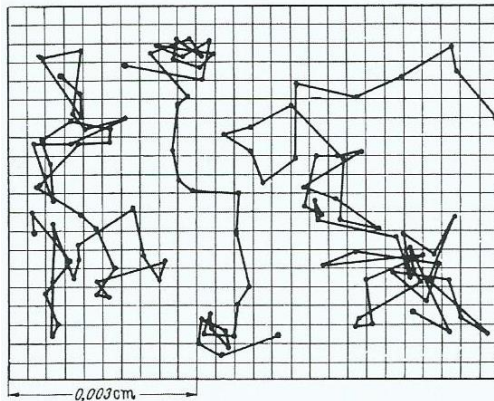
Festkörper: die Moleküle schwingen um ihre Gleichgewichtslage, infolge der zwischen ihnen wirkenden starken Wechselwirkungskräfte.

Flüssigkeiten: die Teilchenabstände sind fast wie in Festkörpern, aber die Wechselwirkungskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen ist nur noch schwach vorhanden.

Gase: die Abstände zwischen den Teilchen ist um ein Vielfaches größer als bei Flüssigkeiten und die Wechselwirkungskräfte zwischen den einzelnen Teilchen sind vernachlässigbar.

Brown'sche Bewegung

1827 beobachtete Robert Brown die unregelmäßige und ruckartige Bewegung kleiner, aber mikroskopisch sichtbarer Teilchen in Flüssigkeiten.



Robert Brown
1773 - 1858

Erklärung durch Albert Einstein (1905) und Marian Smoluchowski (1906):
Durch die ungeordnete Wärmebewegung der Flüssigkeitsmoleküle erfahren die Teilchen ständig unzählige Stöße aus allen Richtungen von den umgebenden viel kleineren Flüssigkeitsmolekülen, wobei rein zufällig mal die eine Richtung, mal die andere Richtung stärker zum Tragen kommt.

D. h. bei Flüssigkeiten und bei Gasen pendeln die Teilchen nicht mehr um eine Gleichgewichtslage, sondern bewegen sich (temperaturabhängig) in einer ungeordneten Zickzack-Bewegung, bedingt durch Zusammenstöße mit benachbarten Teilchen.

Kinetische Gastheorie: Druck

Druck und Energie eines Gases lassen sich mit der **kinetischen Gastheorie** beschreiben.

Beispiel **Druck**:
$$p = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Impulsübertrag pro Zeit, der auf die Fläche auftreffenden Atome/Moleküle

Idealisierung: je 1/6 der Teilchen fliegt in Richtung einer Fläche des Würfels mit einheitlicher Geschwindigkeit v

Impulsübertrag pro Stoß:
$$\Delta p = 2 \cdot |\vec{p}| = 2 \cdot m \cdot v$$

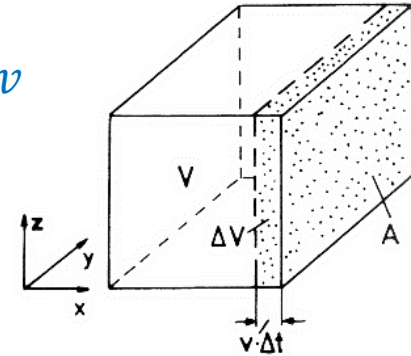
In der Zeit Δt treffen alle Moleküle ΔN innerhalb des zu betrachtenden Volumens ΔV auf der Wand auf.

$$\Delta V = A \cdot \underbrace{v \cdot \Delta t}_{\text{Flugstrecke in der Zeit } \Delta t}$$

Von den insgesamt N Teilchen wirken mit:
$$\Delta N = \frac{N}{6} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Damit ergibt sich für die Kraft:
$$F = \Delta N \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m \cdot \overline{v^2} \cdot A$$

Mittel aller vorkommenden Geschwindigkeitsquadrate



Kinetische Gastheorie: Druck

Und für den **Druck**: $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m \cdot \overline{v^2}$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho_N \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

Teilchendichte

Makroskopische Größe, den Druck p , durch den Mittelwert einer mikroskopische Größe, das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, $\overline{v^2}$, ausgedrückt

Mittlere kinetische Energie eines Teilchen: $\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot \overline{v^2}$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \rho_N \cdot \overline{E_{kin}}$$

D. h. der Druck eines Gases auf die das Gasvolumen begrenzenden Wände ist proportional zur Dichte der Teilchenanzahl und der mittleren kinetischen Energie der Teilchen

Kinetische Gastheorie: Energie

Für ein Molvolumen V_m ergibt sich weiter ($N_a = \text{Avogadro-Konstante}$):

$$p \cdot V_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot V_m \cdot \overline{E_{kin}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n \cdot N_A}{n \cdot V_m} \cdot V_m \cdot \overline{E_{kin}}$$

$$p \cdot V_m = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \overline{E_{kin}}$$

Die in einem Mol enthaltene kinetische Energie der Translation $\overline{E_{m, kin}}$ ist dann (mit $P \cdot V_m = R \cdot T$):

$$\overline{E_{m, kin}} = N_A \cdot \overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} \cdot R \cdot T$$

D. h. die mittlere kinetische Energie der Translation aller Moleküle in einem Mol eines Gases beträgt $\frac{3}{2} R \cdot T$

Die mittlere kinetische Energie, die in der ungeordneten Wärmebewegung der Gasmoleküle steckt, ist also der absoluten Temperatur proportional und unabhängig von der Art des Gases.

Sie ist die innere Energie U eines idealen Gases. Die **Temperatur** ist ein Maß für den **Energieinhalt eines idealen Gases, seiner inneren Energie**.

Kinetische Gastheorie: Energie

Die Temperatur ist auch ein Maß für die mittlere Energie der Bewegung eines Moleküls:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T$$

$$\overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$$

Boltzmann-Konstante $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38065 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Für den Druck p gilt daher auch:

$$p = \rho_N \cdot k_B \cdot T$$

Beachte: alle Betrachtungen gelten für ideale Gase und somit gilt die Gleichung für $\overline{E_{kin}}$ nur für den Mittelwert der Energie, gemittelt über alle Bewegungsmöglichkeiten eines solchen idealen Gasmoleküls.

Kinetische Wärmetheorie: Energie

Im dreidimensionalen Raum kann sich ein Gasmolekül in drei Raumrichtungen x, y, z bewegen.

D. h. das Gasmolekül besitzt drei **Freiheitsgrade** der Translation.

Infolge der Stöße der Gasmoleküle untereinander sind im zeitlichen Mittel alle Richtungen der Geschwindigkeit gleich wahrscheinlich.

Im thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T ist die mittlere Energie pro Freiheitsgrad:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} \cdot k_B \cdot T$$

Außer diesen drei Translatorischen Freiheitsgraden können auch noch Freiheitsgrade der Rotation und der Schwingung der Atome im Molekül zur Energie beitragen.

Energie der einzelnen Teilchen (Atome bzw. Moleküle) pro Freiheitsgrad:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} \cdot k_B \cdot T$$

Kinetische Wärmetheorie: Energie

Bei f Freiheitsgraden:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{f}{2} \cdot k_B \cdot T$$

Einatomige Gase: $f = 3$

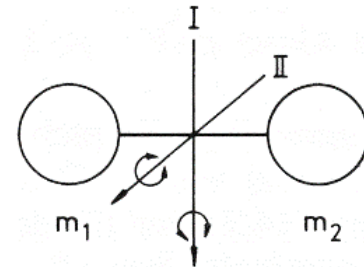
Zweiatomige Gase: $f = 5$

Drei- und mehratomige: $f = 6$

Translation, 3 Raumrichtungen

+ 2 x Rotation

+Rotation 3. Achse



Bei höheren Temperaturen auch Schwingungen der Atome im Molekül, d.h. f wird noch größer.

Bei einer Stoffmenge von n Mol ist die innere Energie U eines Gases:

$$U = \frac{f}{2} \cdot n \cdot N_A \cdot k_B \cdot T = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeiten der Teilchen eines Gases variieren über einen großen Bereich, mit einer statistischen Verteilung der Absolutbeträge der Geschwindigkeiten.

Die Geschwindigkeitsverteilung gibt an, welcher Prozentsatz der Moleküle eine bestimmte Geschwindigkeit hat, exakter für welchen Prozentsatz sie in einem bestimmten Geschwindigkeitsintervall liegt.

Die Verteilungsfunktion $f(v)$ gibt die Häufigkeit an, mit der eine bestimmte Anzahl dN des Ensembles aller N Moleküle eines Gases eine Geschwindigkeit im Intervall dv zwischen v und $v + dv$ besitzt, wobei die Geschwindigkeit v alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen kann.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Molekül eine Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ hat, ist dann gegeben durch:

$$dN = N \cdot f(v) \cdot dv$$

Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

Für ein Gas gilt die thermische Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell.

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_B \cdot T}}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung der Gasteilchen hängt nur von der Temperatur ab!

Der Exponentialfaktor $e^{-\frac{E}{k_B \cdot T}}$ wird der **Boltzmann Faktor** genannt.

Der Boltzmann Faktor spielt bei der physikalischen Beschreibung von zahlreichen Erscheinungen eine wichtige Rolle.

Z. B. bei der Beschreibung der Druckverteilung bzw. dem Dichteverlauf in der Atmosphäre bei konstanter Temperatur mit der Barometrischen Höhenformel oder den Teilchenzahl- bzw. Besetzungsdichten von Energiezuständen bei Atomen und Molekülen.

Beachte: der **Temperaturbegriff** ist nur auf Systeme von **sehr vielen Teilchen** anwendbar und sie müssen sich außerdem durch gegenseitige Stöße ins **thermische Gleichgewicht** gesetzt haben.

Von der Temperatur eines Einzelnen Moleküls zu sprechen, ist sinnlos.

Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

- wahrscheinlichste Geschwindigkeit ($f(v) = \text{maximal}$)

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot T}{m}}$$

- mittlere Geschwindigkeit

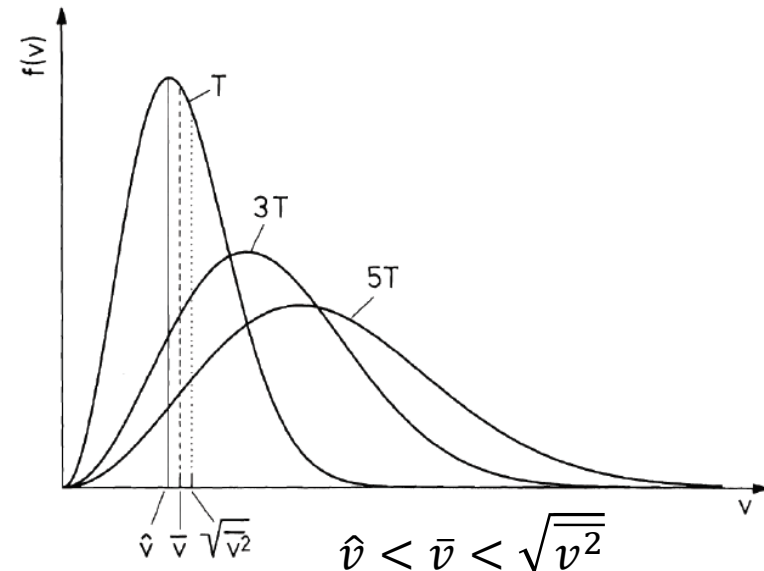
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot k_B \cdot T}{\pi \cdot m}} = \frac{2\hat{v}}{\sqrt{\pi}} = 1,128 \cdot \hat{v}$$

- Mittlere Geschwindigkeitsquadrat

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \hat{v} \approx 1,225 \cdot \hat{v}$$

Beispiel: Luft bei 273,15 K: $\bar{v} = 447 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\hat{v} = 395 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Beachte: Es gibt auch Moleküle mit sehr großen Geschwindigkeiten, aber prozentual nicht viele. Trotzdem verursachen sie infolge ihrer hohen Energie besondere Wirkungen, z.B. die Verdampfung aus der Flüssigkeit.



Wärme als Energieform

Wärmemenge Q: für eine **Änderung der inneren Energie** eines Systems muss dem System **Wärme, d.h. Energie**, zugeführt oder entzogen werden. Die dabei benötigte oder freigesetzte **Wärmemenge Q** ist abhängig von der Masse, stofflichen Zusammensetzung und der Größe der Temperaturänderung.

Eine **Änderung der inneren Energie** eines Systems kann jedoch auch durch am (oder vom) System verrichtete **Arbeit W** erfolgen.

Die **Verrichtung von Arbeit** oder der **Übergang von Wärme** ist nichts anderes als übertragene Energie zwischen Systemen unter **Änderung ihrer inneren Energie**, wodurch die Systeme jeweils von einem bestimmten thermodynamischen Gleichgewichtszustand in einen anderen gelangen.

Wärme ist eine Energieform und wird in Energieeinheiten gemessen.
Einheit: $1 \text{ J (Joule)} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$

Zustandsänderungen von Systemen infolge Energieübertrag durch einen **thermodynamischen Prozess**, der durch die verrichtete Arbeit und/oder die zu- bzw. abgeführte Wärme Q charakterisiert ist.

Wärmemenge - Wärmekapazität

Erwärmung eines Körpers von Anfangstemperatur T_1 auf Endtemperatur T_2 :
Zufuhr von Wärme bzw. Wärmemenge ΔQ :

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1) = c \cdot m \cdot \Delta T$$

m = Masse des Körpers

c = spezifische Wärmekapazität (Materialeigenschaft), Einheit: $\frac{J}{kg \cdot K}$

Die spezifische Wärmekapazität c ist diejenige Wärmemenge, die einem homogenen Körper der Masse 1 kg zugeführt werden muss, um ihn um ein Kelvin zu erwärmen.

Einheit Wärmemenge: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$

Alt: $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$

1 cal ist die Energie, die man benötigt, um 1 g Wasser um 1 °C von 14,5 °C auf 15,5 °C zu erwärmen.

Körper hoher Wärmekapazität sind gute Wärmflaschen.

Andererseits sollte ein Thermometer eine möglichst kleine Wärmekapazität besitzen.

Wärmemenge - Wärmekapazität

Die spezifische Wärmekapazität eines Stoffes ist temperaturabhängig und hängt außerdem von der Art der Erwärmung ab.

Wir unterscheiden daher zwischen c_v und c_p , je nachdem, ob das Volumen oder der Druck konstant gehalten wird.

Spezifische Wärmekapazität c_v

Bei **konstantem Volumen** erfolgt die Erwärmung isochor:

Die zugeführte Wärmemenge dient allein zur Erhöhung der mittleren Energie der Moleküle des Stoffes, also einer Erhöhung seiner Temperatur.

Spezifische Wärmekapazität c_p

Bei **konstantem Druck** erfolgt die Erwärmung isobar unter Vergrößerung des Volumens:

Die zugeführte Wärmemenge dient nicht nur zu Erhöhung der mittleren Energie der Moleküle des Stoffes, aber auch um Arbeit zu verrichten gegen den äußeren Luftdruck infolge der Volumenvergrößerung.

Es ist daher stets $c_p > c_v$

Bei Festkörpern und Flüssigkeiten ist der Unterschied zwischen c_v und c_p äußerst gering infolge der geringeren Wärmeausdehnung dieser Stoffe.

Wärmemenge - Wärmekapazität

Festkörper	c in kJ/(kg K)	Flüssigkeiten	c in kJ/(kg K)
Fett	1.95	Wasser	4.1
Glas	0.8	Äthanol	2.43
Stahl	0.4	Äther	2.2
Gold	0.23	Olivenöl	1.97
Blei	0.13	Benzol	1.74
		Quecksilber	0.14

„Atomigkeit“	κ	Gas	c_p in J/(kg K)	c_v in J/(kg K)
1	5/3	He	5.23	3.21
		Ar	0.523	0.317
2	7/5	O ₂	0.917	0.657
		N ₂	1.038	0.741
3	8/6	CO ₂	0.837	0.647

Adiabatenkoeffizient γ oder κ (Kappa): $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{m,p}}{C_{m,v}} > 1$

Wärmekapazität - Molare Wärmekapazität

Wärmekapazität C : Die Wärmemenge, die notwendig ist, um die Temperatur eines Körpers um ein Kelvin zu erhöhen.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = c \cdot m$$

Einheit: $\frac{\text{J}}{\text{K}}$

molare Wärmekapazität C_m : Die Wärmemenge, die notwendig ist, um ein Mol eines Stoffes um ein Kelvin zu erwärmen.

$$C_m = c \cdot M$$

M = molare Masse in kg/mol

c = spezifische Wärmekapazität in $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Dulong-Petit'sche Regel:

Die einem Element in festem Aggregatzustand zugeführte Wärmemenge, die erforderlich ist, um seine Temperatur um 1 K zu erhöhen, ist vom chemischen Charakter unabhängig und hängt nur von der Zahl der Atome ab, die in der Elementmenge enthalten sind.

$$C_m \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Wärmekapazität und „Freiheitsgrade“

Bei einer Stoffmenge von n Mol ist die innere Energie U eines Gases:

$$U = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

Damit ergibt sich für die molare Wärmekapazität:

$$C_m = \frac{\Delta U}{n \cdot \Delta T} = \frac{f}{2} \cdot R$$

Molare Wärmeenergie wird in Festkörpern als Schwingungen der Atome gespeichert!

$$C_m \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \approx \frac{6}{2} R$$

$f = 6$: 3 für kinetische und
3 für potentielle Energie der
Schwingungs-Freiheitsgrade



Wärmekapazität und „Freiheitsgrade“

Bei Gasen: 3 Freiheitsgrade der Translation, sowie 0 (Atome), 2 (zweiatomige und andere lineare Moleküle) und 3 (nichtlineare mehratomige Moleküle) der Rotation, also insgesamt 3, 5 bzw. 6 Freiheitsgrade:

$$C_{m,v} = \frac{3}{2}R, \quad \frac{5}{2}R \quad \text{bzw.} \quad \frac{6}{2}R$$

Dies gilt für isochore Prozesse, also $V = \text{const.}$

Bei isobaren Prozessen, also $p = \text{const.}$ wird ein Teil der zugeführten Energie nicht in Wärme (Temperaturerhöhung) sondern in Ausdehnung des Volumens (Volumenarbeit) umgesetzt:

$$\Delta Q = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$$

$$\frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T} = \frac{p \cdot \Delta V}{n \cdot \Delta T} = \frac{2}{2}R$$

Und damit für isobare Prozesse, also $p = \text{const.}$:

$$C_{m,p} = \frac{3 + 2}{2}R, \quad \frac{5 + 2}{2}R \quad \text{bzw.} \quad \frac{6 + 2}{2}R$$

Für alle idealen Gase gilt: $C_{m,p} - C_{m,v} = R \approx 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

Wärmeausgleich - Mischungskalorimeter

Zur Ermittlung der spezifischen Wärmekapazität c fester Körper verwendet man ein Mischungskalorimeter.

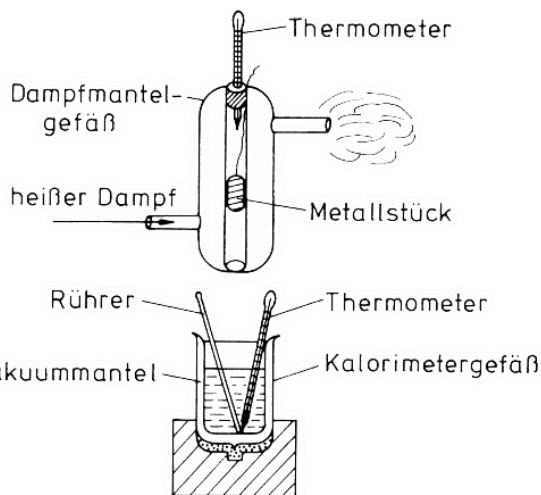
Wir bringen dazu ein Metallstück der Masse m_2 , das auf T_2 erhitzt worden ist, in das Kalorimeterwasser der Masse m_1 und der Temperatur T_1 . Die vom Metall bei der Abkühlung auf die gemeinsame Endtemperatur T_m , die Mischungstemperatur, abgegebene Wärmemenge muss gleich der vom Wasser aufgenommenen Wärmemenge ΔQ sein.

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (T_m - T_1) = c_2 \cdot m_2 \cdot (T_2 - T_m)$$

Richmann'sche Mischungsregel:

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{m_2 \cdot (T_m - T_2)}{m_1 \cdot (T_2 - T_m)}$$



Da alle Größen außer c_2 messbar sind und c_1 bekannt ist, ergibt sich daraus die gesuchte spezifische Wärmekapazität des Metalls. Bei genauen Messungen muss noch die Wärmekapazität des Kalorimetergefäßes sowie die vom Thermometer und Rührer, die ja auch am Wärmeaustausch teilnehmen, berücksichtigt werden.

Wärme als Energieform

Wärmemenge Q : für eine **Änderung der inneren Energie** eines Systems muss dem System **Wärme, d.h. Energie**, zugeführt oder entzogen werden. Die dabei benötigte oder freigesetzte **Wärmemenge Q** ist abhängig von der Masse, stofflichen Zusammensetzung und der Größe der Temperaturänderung.

Eine **Änderung der inneren Energie** eines Systems kann jedoch auch durch am (oder vom) System verrichtete **Arbeit W** erfolgen.

Die **Verrichtung von Arbeit** oder der **Übergang von Wärme** ist nichts anderes als übertragene Energie zwischen Systemen unter **Änderung ihrer inneren Energie**, wodurch die Systeme jeweils von einem bestimmten thermodynamischen Gleichgewichtszustand in einen anderen gelangen.

Thermodynamisches Gleichgewicht: die Eigenschaften eines Systems ändern sich als Funktion der Zeit nicht, d.h. es ist stationär

Zustandsänderungen von Systemen infolge Energieübertrag durch einen **thermodynamischen Prozess**, der durch die verrichtete Arbeit und/oder die zu- bzw. abgeführte Wärme Q charakterisiert ist.

System (Thermodynamik)

System (Vielteilchensystem): einen bestimmten **räumlichen Bereich**, der durch gedachte oder materielle Grenzflächen (Systemgrenzen) von **seiner Umwelt abgetrennt** ist. Ein System kann fest, flüssig, oder gasförmig sein.

Offenes System: ein System, das sowohl Energie als auch Materie (bzw. Teilchen) mit seiner Umgebung austauschen kann

Beispiel offenes System: ein offener Kochtopf, der Sowohl Energie in Form von Wärme als auch Materie in Form von Wasserdampf mit seiner Umgebung austauscht. Die **exakte Berechnung offener Systemen** ist demnach **nicht möglich!**

Geschlossenes System: ein System, wobei keine Materie die Systemgrenze überschreiten kann. Wärme, Strahlung und Arbeiten können zu- oder abgeführt werden.

Abgeschlossenes (isoliertes) System: ein System, das keine Energie oder Materie mit seiner Umgebung austauschen kann. Da in der Wirklichkeit keine Möglichkeit vollständiger Isolation bekannt ist, handelt es sich bei diesem Konzept um eine Idealisierung, die jedoch auf kürzeren Zeitskalen (im Bereich von Stunden und Tagen) experimentell genähert realisiert werden kann.

Zustandsgrößen

(thermodynamische) Zustandsgrößen: Der Gleichgewichtszustand eines Systems ist durch **drei Zustandsgrößen** charakterisiert und bestimmt: 1. durch das Volumen V , 2. durch den Druck p , und 3. durch die Temperatur T .

Diese drei Zustandsgrößen sind unabhängig von der Vorgeschichte und vom „Weg“ auf welchem der Zustand erreicht wurde.

Weitere **abgeleitete Zustandsgrößen:** die innere Energie U , die Enthalpie H und die Entropie S , die eine eindeutige Funktion des Zustandes (p, V, T) des Systems sind.

Die zwischen Zustandsgrößen bestehenden Beziehungen sind die **(thermodynamischen) Zustandsgleichungen**.

Beachte: Von allen **Zustandsgrößen** sind nur **zwei voneinander unabhängig wählbar** und bestimmen den **Zustand des Gases eindeutig**. Alle weiteren Zustandsgrößen lassen sich mit Hilfe der Zustandsgleichungen berechnen.

Keine Zustandsgrößen: die Wärmemenge Q und die Arbeit W , die bei dem Prozess der Zustandsänderung übertragenen Energiemengen.

Volumenarbeit

Volumenarbeit: Arbeit die an einem System, z. B. einer Gasmenge, verrichtet wird oder welche das System verrichtet, wobei es sich um Expansions- oder Kompressionsarbeit handeln kann.

Z. B. die Arbeit zur Verschiebung eines Stempels, der ein Gasgefülltes Volumen V begrenzt, um das Volumen $-dV$ zu komprimieren (siehe auch Folie 159):

$$dW = -p \cdot dV$$

Verkleinerung des Volumens ($dV < 0$), Kompressionsarbeit W :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -p \cdot dV$$

Isotherme Ausdehnung des Volumens ($dV > 0$), d.h. Arbeit W' gegen äußere Druckkräfte (äußerer Druck p_a ist gleich dem Druck p des Systems, $p_a = p$):

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p_a \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

In diesem Fall ist die Arbeit W' gleich $-W$.

Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Energieerhaltungssatz der Mechanik: In jedem **abgeschlossenen System** bleibt die **Gesamtenergie konstant**:

$$\sum_i E_i = \text{const.}$$

Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden; sie kann nur umgewandelt werden.

1. Hauptsatz der Wärmelehre: Die Änderung der inneren Energie dU eines Systems ist gleich der Summe aus der dem System von außen zugeführten (bzw. nach außen abgegebenen) Wärmemenge dQ und der von außen zugeführten (bzw. vom System verrichteten) Arbeit dW :

$$dU = dQ + dW$$

Innere Energie U : gesamte gespeicherte Energie der Teilchen, also kinetische Energie, potentielle, magnetische, elektrische, ... Energie

Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Die dem System zugeführten Energien (Wärme bzw. Arbeit) werden immer Positiv gerechnet; vom System abgegebene Energien negativ.

Eine Änderung der inneren Energie eines Systems kann dazu führen, dass sich beispielsweise seine Temperatur ändert (Änderung der kinetischen Energie der Teilchen), der Abstand zwischen den Teilchen (Volumenänderung), oder der Aggregatzustand ändert sich.

Es gibt kein Perpetuum mobile 1. Art: Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu konstruieren, die aus dem Nichts laufend Arbeit verrichten kann (die mehr Energie liefert als ihr zugeführt wird).

Allgemeiner Energieerhaltungssatz: Die Summe der inneren Energien in einem abgeschlossenen System ist konstant .

Anwendung erster Hauptsatz der Wärmelehre auf spezielle Prozesse mit einem idealen Gas.

Beispiele: Zustandsänderungen idealer Gase bei konstanter Stoffmenge n , ausgehend von einem Zustand beschrieben durch (p_1, V_1, T_1) , in einen Zustand (p_2, V_2, T_2) .

Isochore Zustandsänderung

Isochore Zustandsänderung: $V = \text{const.}$

Erhöhung Temperatur von T_1 auf T_2

2. Gay-Lussac'sche Gesetz:

Druck p steigt proportional zu T

$V = \text{const.} \Rightarrow dV = 0$, d.h. Volumenarbeit $dW = 0$

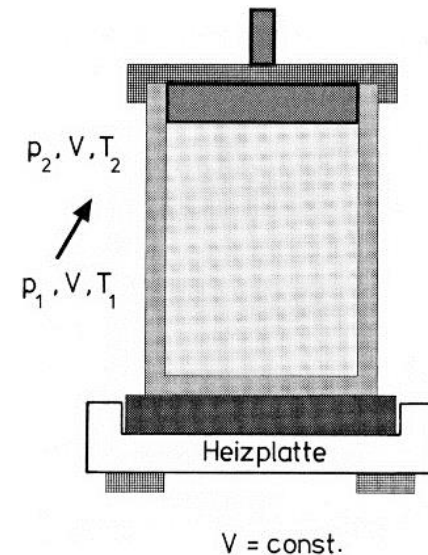
1. Hauptsatz: $dU = dQ = m \cdot c_v \cdot dT = C_v \cdot dT$

Wärmekapazität C_v bei konstantem Volumen V : $C_v = \left(\frac{dU}{dT} \right)_v$

Innere Energie U eines idealen Gases ($c_v = \text{const.}$):

$$U = m \cdot c_v \cdot T = C_v \cdot T$$

Die innere Energie eines idealen Gases bestimmter Masse ist also nur von der Temperatur abhängig (und vom Volumen unabhängig).



Isobare Zustandsänderung

Isobare Zustandsänderung: $p = \text{const.}$

Erhöhung Temperatur von T_1 auf T_2

1. Gay-Lussac'sche Gesetz:

Das Volumen V wächst proportional zu T

d.h. der Stempel wird von der Gasmenge nach außen geschoben gegen den äußeren Druck

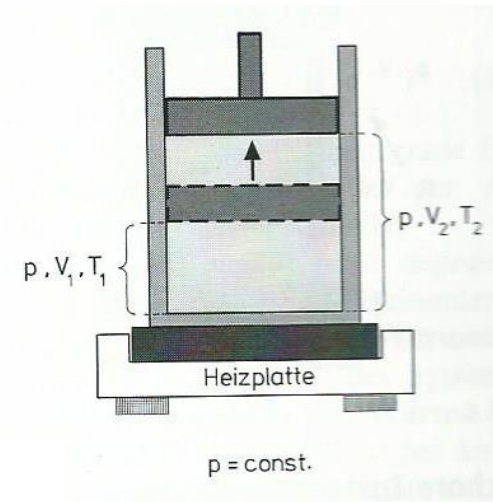
Ein Teil der zugeführten Wärmemenge dient dabei zur Erhöhung der inneren Energie, der andere Teil verrichtet Volumenarbeit.

Die isobar zugeführte Wärmemenge muss somit größer sein als die isochor zugeführte.

$$dQ = m \cdot c_p \cdot dT = C_p \cdot dT$$

$$dU = m \cdot c_v \cdot dT = C_v \cdot dT$$

$$dW = -p \cdot dV$$



Isobare Zustandsänderung

1. Hauptsatz:

$$dU = dQ + dW = dQ - p \cdot dV$$

$$dQ = dU + p \cdot dV$$

Abgeleitete Zustandsgröße: die **Enthalpie H**

$$H = U + p \cdot V$$

In dieser Größe ist die innere Energie U und die Volumenarbeit $p \cdot V$ vermehrt.

Enthalpieänderung: $dH = dU + d(p \cdot V) = dU + p \cdot dV + V \cdot dp$

Bei einer isobaren Zustandsänderung ($p = \text{const.} \Rightarrow dp = 0$), wie sie z. B. bei einer chemische Reaktion abläuft, gilt dann:

$$dH = dU + p \cdot dV$$

d.h.

$$dQ = dH = m \cdot c_p \cdot dT = C_p \cdot dT$$

Isobare Zustandsänderung

Die von einem System, bei konstant gehaltenem Druck, aufgenommene bzw. abgegebene Wärmemenge ist gleich der Zunahme bzw. Abnahme der Enthalpie.

Wärmekapazität C_p bei konstantem Druck p : $C_p = \left(\frac{dH}{dT} \right)_p$

Enthalpie eines idealen Gases:

$$H = m \cdot c_p \cdot T + \text{const.} = C_p \cdot T + \text{const.}$$

Die Enthalpie eines idealen Gases hängt nur von seiner absoluten Temperatur ab und ist der Masse des Gases proportional

Isotherme Zustandsänderung

Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{const.}$

Dem Gas wird von außen Wärme dQ zugeführt

Gesetz von Boyle-Mariotte:

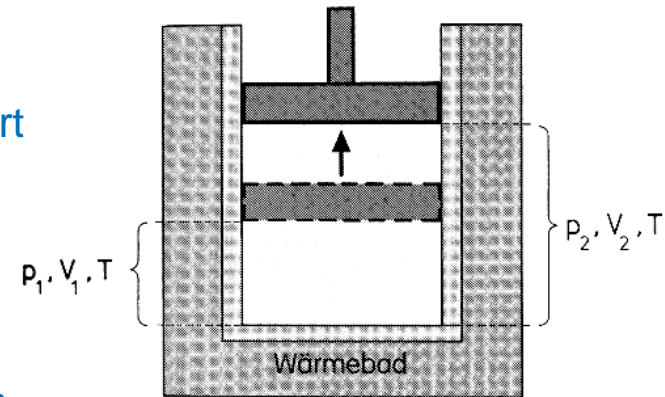
$$p \cdot V = \text{const.}$$

$$T = \text{const.} \Rightarrow U = C_v \cdot T = \text{const.} \Rightarrow dU = 0$$

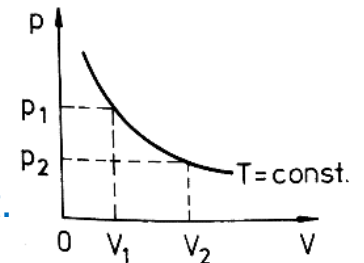
1. Hauptsatz: $0 = dQ + dW = dQ - p \cdot dV$

d. h. eine **isotherme Expansion**: die gesamte zugeführte Wärmemenge wird restlos in mechanische Arbeit umgesetzt.

Soll ein Gas (wie in Abbildung) sich vom Volumen V_1 längs einer Isotherme auf V_2 ausdehnen, d. h. Arbeit gegen den äußeren Druck verrichten, so muss ihm die Wärmemenge $dQ = -dW = p \cdot dV$ von außen **quasistatisch** zugeführt werden.



$T = \text{const.}$



Quasistatisch: die Zustandsänderungen sind unendlich langsam ablaufende Prozesse, das Gas geht von einem Gleichgewichtszustand in den anderen über

Isotherme Zustandsänderung

Die zugeführte Wärmemenge und damit auch die Arbeit ergibt sich dann mit Hilfe der Zustandsgleichung für ideale Gase zu:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV \\ &= n \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

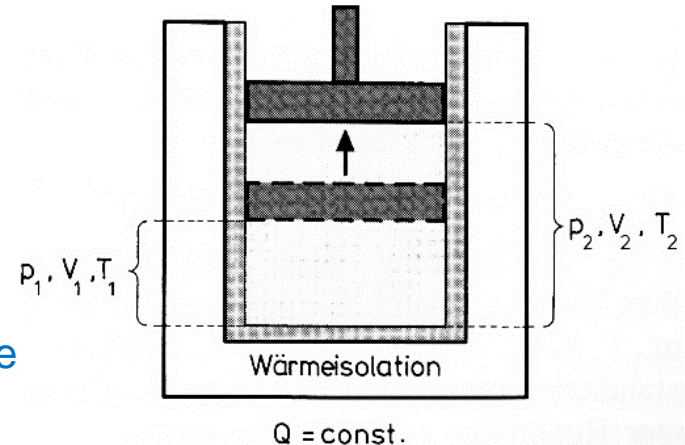
Bei **isothermer Kompression** muss diese Wärme z. B. an das Wärmebad abgeführt werden.

Adiabatische Zustandsänderung

Adiabatische Zustandsänderung: $dQ = 0$

Kein Wärmeaustausch mit der Umgebung

Adiabatische Zustandsänderungen spielen in der Natur und in der Technik eine große Rolle. Erwärmung einer Fahrradpumpe bei ihrer Benutzung durch die adiabatische Erwärmung der komprimierten Luft.



Dies kann entweder durch eine vollkommene Wärmeisolation des Gasbehälters erreicht werden, oder wenn der mit dem Gas ablaufende Änderungsprozess so schnell erfolgt, dass während dieser kurzen Zeit mit der Umgebung des Gasvolumens kein Energieaustausch durch Wärme stattfinden kann.

1. Hauptsatz: $dU = dW = -p \cdot V = C_v \cdot dT$

Umwandlung von innerer Energie eines Gases in mechanische Arbeit bzw. umgekehrt statt (Expansions- bzw. Kompressionsarbeit), welche jeweils mit einer Temperaturänderung des Gases verbunden ist.

Adiabatische Zustandsänderung

Bei adiabatischer Expansion ($dV > 0$) erfolgt daher eine Temperaturabnahme („Abkühlung“) und bei adiabatischer Kompression ($dV < 0$) eine Temperaturzunahme („Erwärmung“) des Systems.

Poisson Gleichungen oder **Adiabatengleichungen**: drei Gleichungen, die für adiabatische Zustandsänderungen den Zusammenhang zwischen je zwei der Zustandsgrößen Druck p , Volumen V und Temperatur T angeben.

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \text{oder} \quad T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}$$

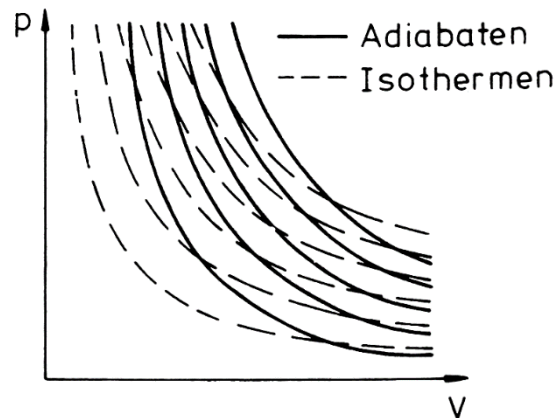
$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} \quad \text{oder} \quad p \cdot V^{\gamma} = \text{const.}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{oder} \quad T \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const.}$$

Adiabatische Zustandsänderung

Adiabatene exponent $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ wegen $c_p > c_v$

In jedem Punkt des p, V -Diagramms ist die Steigung der Adiabaten ($p \cdot V^\gamma = \text{const.}$) größer als die der Isothermen ($p \cdot V = \text{const.}$), die Adiabate verläuft also steiler, da $\gamma > 1$ ist.



Die Expansions- oder Kompressionsarbeit bei einer adiabatischen Zustandsänderung durch Integration zwischen dem Ausgangszustand mit der Temperatur T_1 und dem Endzustand mit Temperatur T_2 :

$$W = \int_{T_1}^{T_2} C_v \cdot dT = C_v \cdot (T_2 - T_1)$$

Kreisprozesse

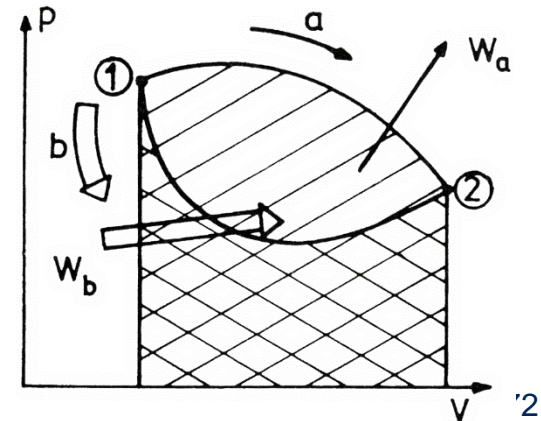
Kreisprozesse, bei denen ein System nach einer Reihe von Zustandsänderungen, z. B. durch Austausch von Arbeit und Wärme mit anderen Systemen, wieder in seinen ursprünglichen Ausgangszustand zurückgeführt wird, spielen in der Thermodynamik eine wichtige Rolle.

Oft im p, V - (Zustands-)Diagramm (aber auch andere Variablen möglich)

Wenn das System nach Durchlaufen des Kreisprozesses $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$ wieder genau im gleichen Zustand ist wie zu Beginn, so muss die innere Energie des Systems auch wieder die gleiche sein, d. h. $dU = 0$.

Nach 1. Hauptsatz ist auch die Summe der zugeführten und abgeführten Energien in Form von Wärme bzw. Arbeit gleich Null.

Eingeschlossene **Fläche** entspricht der vom System abgegeben (Uhrzeigersinn) bzw. am System geleisteten (gegen den Uhrzeigersinn) **Arbeit**.



Kreisprozesse

Voraussetzung: Die bei einem Kreisprozess ablaufenden Zustandsänderungen sollen **reversibel** geführt sein.

D. h. es laufen unendlich langsame, quasistatische Prozesse ab, sodass man auf den vorgegebenen Prozess den im umgekehrten Sinne durchlaufenden Prozess folgen lassen kann, ohne dass Änderungen irgendwelcher Art in der Umgebung zurückbleiben.

Jeder beliebige Kreisprozess kann aus kurzen Teilstücken spezieller reversibel ablaufender Zustandsänderungen zusammengesetzt werden

Spezielle Kurven:

Isotherme: T konstant

Isobare: p konstant

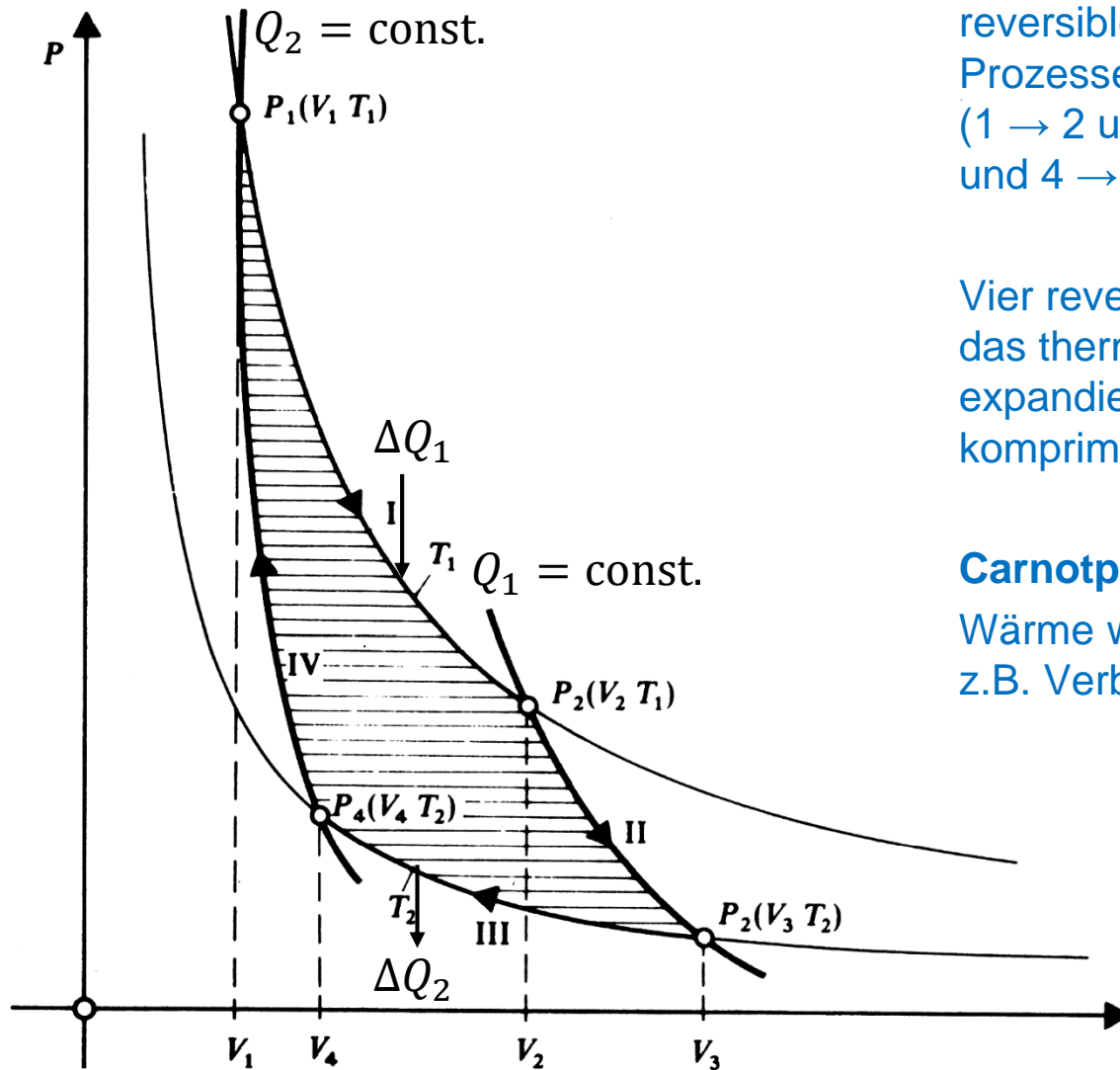
Isochore: V konstant

Adiabate: Q konstant

Beispiel: **Stirling-Maschine** mit **Isothermen** und **Isochoren**

Fragestellung aus der Dampfmaschinen-Zeit (aber immer noch aktuell):
Wie kann die Arbeit von Wärmekraftmaschinen optimiert werden?

Carnot'scher Kreisprozess



Darstellung des Carnot-Kreisprozesses im (V — p)-Diagramm

Carnot'scher Kreisprozess: Ein idealer reversibler Prozess zusammengesetzt aus Prozessen längs von Isothermen ($1 \rightarrow 2$ und $3 \rightarrow 4$) und Adiabaten ($2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$).

Vier reversible Zustandsänderungen, wobei das thermodynamische System zunächst expandiert und anschließend wieder komprimiert wird.

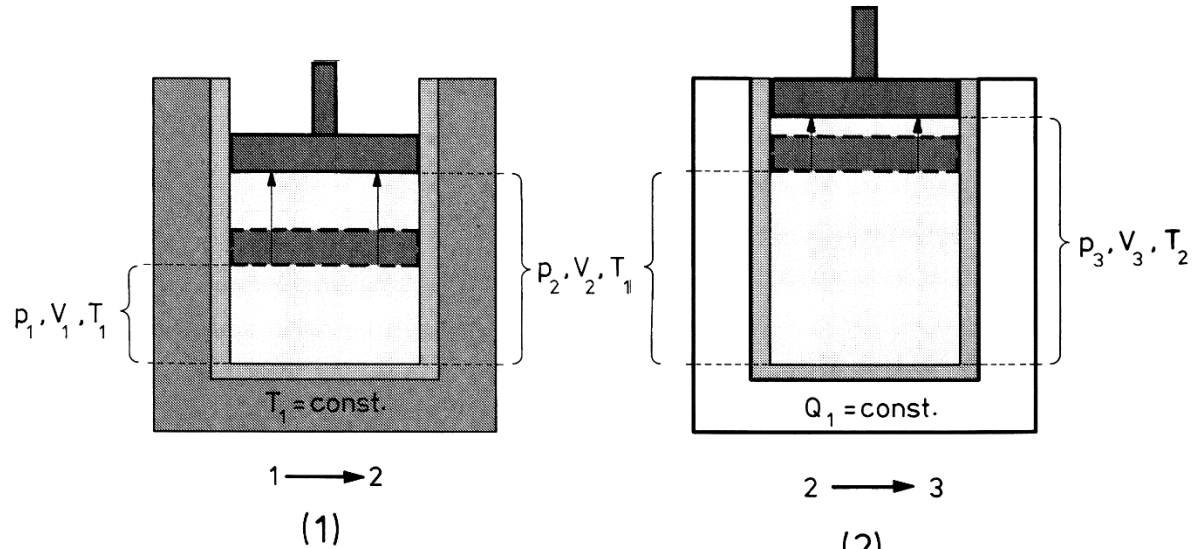
Carnotprozess im Uhrzeigersinn: Wärme wird entzogen, Arbeit wird geleistet, z.B. Verbrennungsmotor, Turbine

Carnot'scher Kreisprozess

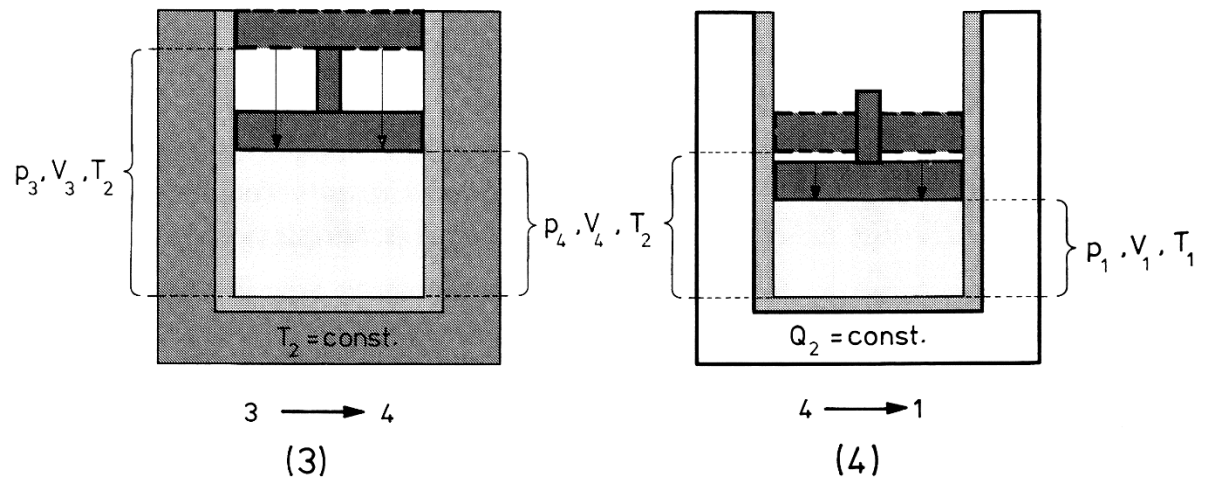
isotherme Expansion

adiabatische Expansion

Maschine leistet Arbeit



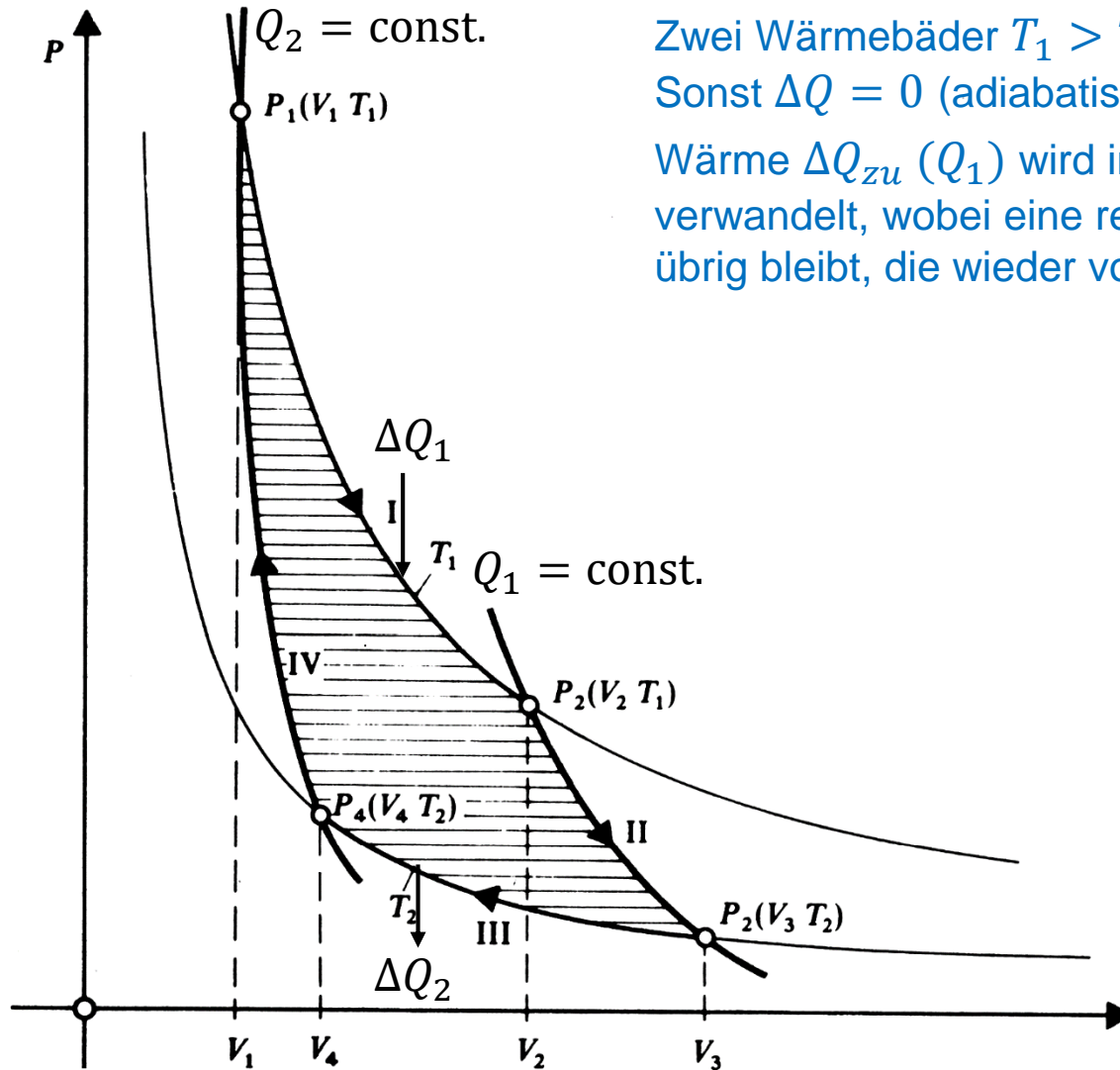
Arbeit wird an Maschine geleistet



isotherme Kompression

adiabatische Kompression

Carnot'scher Kreisprozess: Wärmekraftmaschine

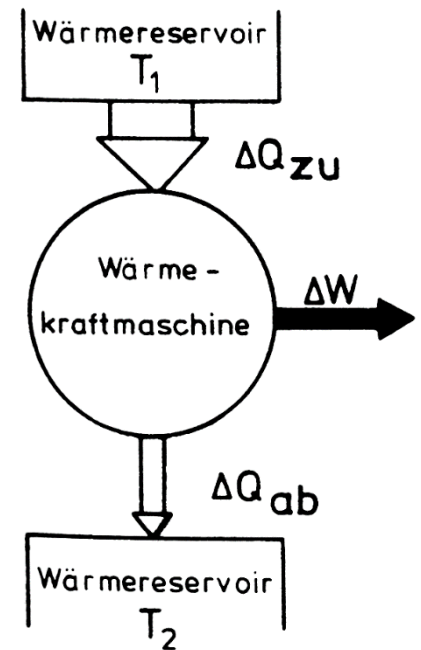


Darstellung des Carnot-Kreisprozesses im $(V - p)$ -Diagramm

Zwei Wärmebäder $T_1 > T_2$ (isotherm)

Sonst $\Delta Q = 0$ (adiabatisch)

Wärme ΔQ_{zu} (Q_1) wird in mechanische Arbeit ΔW verwandelt, wobei eine restliche Wärmemenge ΔQ_{ab} (Q_2) übrig bleibt, die wieder vom Gas abgegeben wird.



Thermischen Wirkungsgrad η

Für die technische Nutzung ist es von großem Interesse, den Bruchteil der Zugeführten Wärme zu kennen, welche in die nach außen abgegebene Arbeit ΔW umgewandelt wird, den Wirkungsgrad von Wärmemaschine.

Thermischer Wirkungsgrad η :

$$\eta = \frac{\text{abgegebene mechanische Arbeit } \Delta W}{\text{zugeführte Wärmemenge } \Delta Q_{zu}}$$

Im Falle des reversiblen Carnot'schen Kreisprozess:

$$\eta_{rev} = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1}$$

Thermischer Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses:

$$\eta_{rev} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} (< 1)$$

d.h. η groß bei großer Temperaturdifferenz; $\eta = 1$ für $T_2 = 0$ K (unmöglich)

Kältemaschine und Wärmepumpe

Carnotprozess gegen den Uhrzeigersinn:

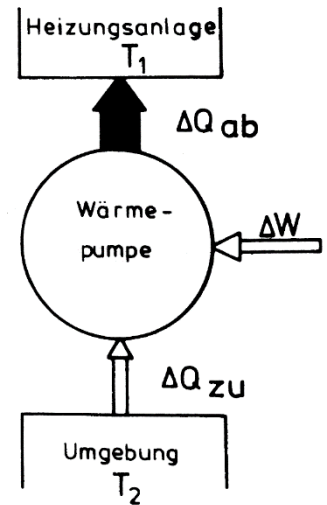
Arbeit wird geleistet, um dem heißen System weitere Wärme zuzuführen: **Wärmepumpe** (Kraftwärmemaschine), z.B. Heizungsanlage:

$$\eta_{\text{Wärmepumpe}} = \frac{\text{bei } T_1 \text{ abgegebene Wärme}}{\text{dazu zugeführte Arbeit}}$$
$$= \frac{\Delta Q}{\Delta W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta_{\text{rev}}} > 1$$

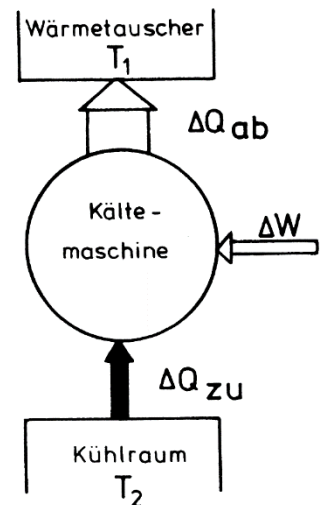
Bzw. um ein System abzukühlen: **Kältemaschine**, z.B. Kühlschrank („Kühlfaktor“):

$$\eta_{\text{Kältemaschine}} = \frac{\text{bei } T_2 \text{ aufgenommene Wärme}}{\text{dazu zugeführte Arbeit}}$$
$$= \frac{\Delta Q}{\Delta W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Vorsicht!: Hier wird der Wirkungsgrad jeweils anders definiert als bei der üblichen Betrachtung des Carnot-Prozesses!



$$T_1 > T_2$$



Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

2. Hauptsatz der Wärmelehre: Es gibt keine periodisch Arbeitende Maschine, die nichts anderes bewirkt als die Erzeugung mechanischer Arbeit unter Abkühlung eines Wärmereservoirs. (perpetuum mobile 2. Art)

Ein Reversibler Prozess wurde auf Folie 273 definiert.

Ein irreversibler Prozess ist ein solcher, bei dem das System nicht in den Ausgangszustand zurückkehren kann, ohne dass Änderungen in der Umgebung eingetreten sind.

Irreversible Vorgänge laufen von selbst (spontan) in einer Richtung ab, wie beispielsweise die Erwärmung durch Reibung.

Der Umkehrvorgang, um das System in den Ausgangszustand zu bringen, müsste aber unter Abkühlung der Umgebung die Wärme wieder rückführen, dies wäre ein Perpetuum mobile 2. Art, das nicht existiert.

Die meisten technischen Prozesse sind irreversibel oder enthalten irreversible Teilprozesse.

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Reale Wärmekraftmaschinen haben unvermeidliche Verluste, da im Allgemeinen zumindest Teilprozesse irreversibel verlaufen, z. B. infolge von Verlust an Wärme bei adiabatischen Zustandsänderungen oder von Reibungsverlusten bei der erzeugten mechanischen Arbeit.

Daher ist der thermische Wirkungsgrad η einer realisierbaren Wärmekraftmaschine kleiner als der reversibel quasistatisch ablaufende Carnot-Kreisprozess.

Es gilt ($T_1 > T_2$):

$$\eta < \eta_{rev} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Beispiele realer Wärmekraftmaschinen, für welche also $\eta < \eta_{rev}$ ist: Benzin- und Dieselmotoren, Dampfmaschinen, Dampfturbinen, Kohle-, Wasser-, und Kernkraftwerke.

Benzinmotor: $\eta = 10 - 30\%$

Dieselmotor: $\eta = 30 - 40\%$

Kohlekraftwerk: $\eta = \text{ca. } 43\%$

Kernkraftwerk: $\eta = \text{ca. } 32\%$

Entropie

Zur allgemeineren Formulierung des Zweiten Hauptsatzes wird dieser quantitativ beschrieben mit einer weiteren Zustandsgröße, die **Entropie S** .

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Einheit: $\frac{\text{J}}{\text{K}}$

Die Entropieänderung dS ist also die reversibel ausgetauschte Wärmemenge, aber gemessen in einer Skala, die proportional mit T anwächst, d. h. die aufgenommene bzw. abgegebene „reduzierte Wärmemenge“.

D. h. dieselbe Wärmemenge entspricht bei höherer Temperatur einer viel geringeren Entropie als bei tieferer.

Beachte: dS ist nur vom Anfangs- und Endpunkt und nicht vom Weg im Zustandsdiagramm abhängig.

Damit beschreibt die Entropie S zusammen mit den Zustandsgrößen p , V und T den Zustand eines Systems.

Entropie

Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre kann somit auch wie folgt formuliert werden:

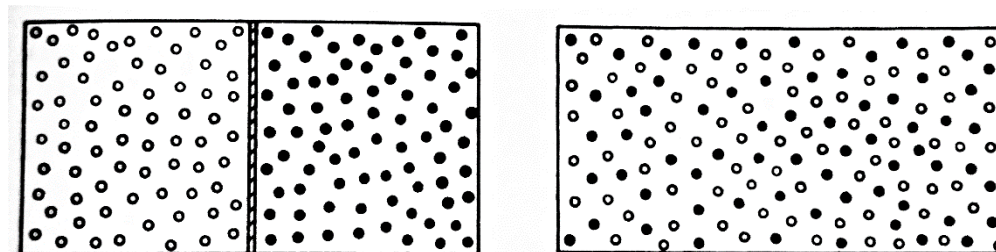
In einem abgeschlossenen System bleibt bei reversiblen Zustandsänderungen die Entropie konstant: $\Delta S = 0$.
Bei irreversiblen Änderungen wächst die Entropie stets an: $\Delta S > 0$.

Das Prinzip der Vermehrung der Entropie schließt von den nach dem 1. Hauptsatz zulässigen Prozessen alle diejenigen aus, die mit einer Entropieverminderung verknüpft sind.

Das Entropieprinzip bestimmt die Richtung der Prozesse.

In einem abgeschlossenen System streben alle thermodynamischen Prozesse einem Maximum an Entropie zu!

Beispiel: von selbst erfolgende Durchmischung zweier Gase (irreversibel)



Entropie und Wahrscheinlichkeit

Ebenso strömt auch ein Gas aus einem gaserfüllten Raum so lange in einen gasleeren Raum (Vakuum), bis in beiden Räumen Druckgleichheit herrscht.

Diese Beispiele zeigen: der unwahrscheinlichere Zustand der Ordnung geht von selbst in den wahrscheinlicheren Zustand der Unordnung über.

Die beschriebenen Beispiele sind typische irreversible Prozesse, die mit einer Entropiezunahme verbunden sind.

Die Entropie ist ein Maß für die „Unordnung“ in einem System von Teilchen.

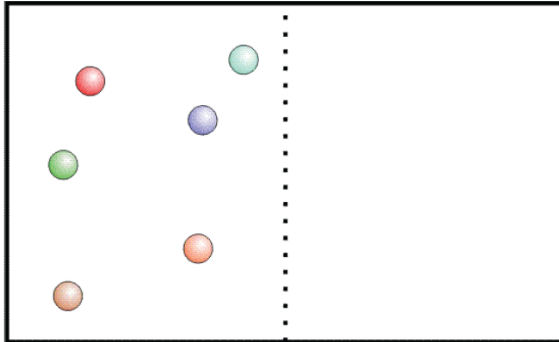
statistische Thermodynamik:

$$S = k_B \cdot \ln w$$

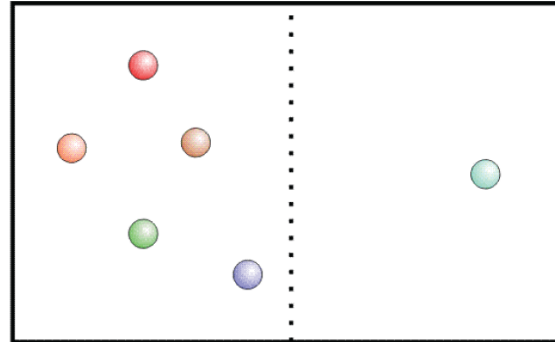
w = thermodynamische Wahrscheinlichkeit: Zahl der möglichen Zustände des Systems.

Entropie und Wahrscheinlichkeit

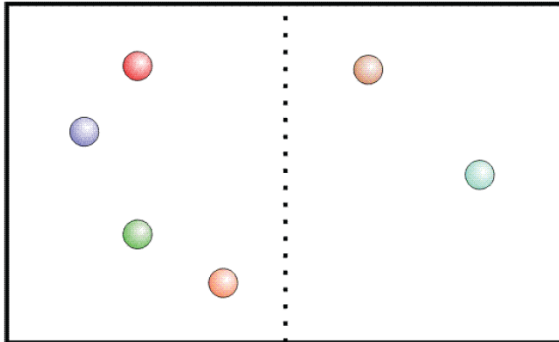
Zahl der mögl. Zustände: 1



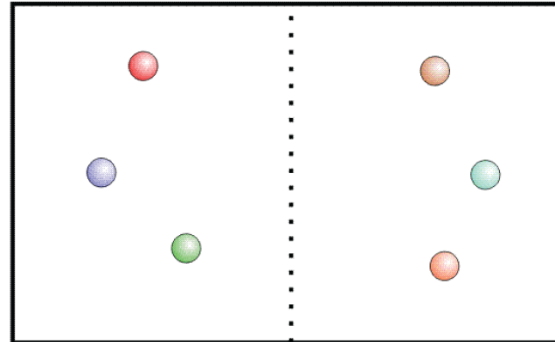
Zahl der mögl. Zustände: 6



Zahl der mögl. Zustände: 15



Zahl der mögl. Zustände: 20



Hier insgesamt $2^6 = 64$ Zustände: 6 Teilchen jeweils rechts oder links
 $64 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

D. h. $w = 64$

Dritter Hauptsatz der Wärmelehre

3. Hauptsatz der Wärmelehre: Es ist unmöglich den absoluten Nullpunkt der Temperatur (0 K) zu erreichen.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = \lim_{T \rightarrow 0} c \approx 0$$

Zusammengefasst:

1. Hauptsatz: „Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden“
2. Hauptsatz: „die Entropie der gesamten Welt nimmt niemals ab“
3. Hauptsatz: „Satz von der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes“

Aggregatzustände

Es existieren in der Natur drei klassische **Aggregatzustände** der Materie: Der **feste** Zustand, der **flüssige** Zustand und der **gasförmige** Zustand.

In der Physik gibt es einen weiteren nicht klassischen Zustand, das **Plasma**.

Materie kann von einem Aggregatzustand in einen anderen wechseln. Diesen Wechsel bezeichnet man als **Phasenübergang**. Dieser Phasenübergang wird durch die äußeren Bedingungen, die durch Druck und Temperatur festgelegt werden, verursacht.

Man spricht auch von verschiedenen Zustandsformen oder Phasen der Materie.

	Festkörper	Flüssigkeit	Gas	Plasma
Struktur	Struktur	Nahordnung	keine	keine
Formbeständigkeit	ja	schwach	keine	keine
Energie	$E_{th} \ll E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} \sim E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} > E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} \gg E_{\text{Bindung}}$



$T=300 \text{ K}$

$T=100.000 \text{ K}$

Phasen

In **einem Aggregatzustand** können **mehrere Phasen des gleichen Stoffes** auftreten. D. h. es können mehrere feste bzw. flüssige Phasen nebeneinander existieren, jedoch wegen der Mischbarkeit nur eine gasförmige.

Phase: räumlich begrenztes, physikalisch homogenes System, d. h. ein Zustand des Stoffes der sowohl in seinen physikalischen Eigenschaften als auch in seiner chemischen Zusammensetzung gleichförmig ist.

Beispiele:

- Ein Kristall stellt eine einzelne Phase dar
- Fester Aggregatzustand des Kohlenstoffes tritt in zwei verschiedene Phasen auf: Graphit und Diamant
- Ein aus mehreren Flüssigkeiten bestehendes System ist **einphasig**, wenn die Flüssigkeiten vollständig mischbar sind, aber **mehrphasig**, wenn die Flüssigkeiten sich nicht vollständig mischen.
- Eine aus zwei Metallen sich zusammensetzende Legierung ist ein zweiphasiges System, wenn sie nicht mischbar sind. Die Legierung ist aber einphasig bei vollständiger Mischbarkeit der Metalle.
- Ist in einer Lösung von Salz in reinem Wasser das gesamte Salz gelöst, handelt es sich um ein einphasiges System, aber es ist zweiphasig, wenn noch ungelöstes Salz als Bodenkörper in der Lösung vorhanden ist

Phasenübergänge

Im allgemeinen passiert folgendes:

1. Wenn einem Stoff (fest oder flüssig) bei konstantem Druck Wärme zugeführt wird, so erhöht sich seine Temperatur, d. h. die zugeführte Wärme steigert die kinetische Energie seiner Bausteine.
2. Bei einer für den Stoff charakteristischen Temperatur, der vom äußeren Druck abhängigen Umwandlungstemperatur, wird die weiterhin zugeführte Wärmemenge ausschließlich zur Bindungslockerung seiner Bausteine und zur eventuellen Verrichtung einer Volumenarbeit infolge Ausdehnung des Stoffes verwendet.
3. Die Temperatur bleibt solange konstant, bis die gesamte Masse des Stoffes in die andere Phase umgewandelt ist (Umwandlungsprozess). Dies kann eine Änderung der kristallinen Struktur sein oder eine Änderung des Aggregatzustands.
4. Weitere Wärmezufuhr bedingt dann eine Temperaturerhöhung entsprechend der Wärmekapazität des Stoffes in der vorliegenden Phase.

Beachte:

1. Der Umwandlungsvorgang verläuft isotherm bei der konstanten Umwandlungstemperatur.
2. Infolge der Zunahme der molekularen Unordnung ist damit auch eine Entropiesteigerung verbunden.

Phasenübergänge

Beim umgekehrten Prozess, wobei einem Stoff Energie entzogen wird, wird bei Erreichen der jeweiligen Umwandlungstemperatur des Stoffes eine entsprechende Wärmemenge freigesetzt.

Umwandlungsenergie bzw. Umwandlungsenthalpie:

Die aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge des isochoren bzw. isobaren Prozesses im Fall einer Phasenumwandlung.

Umwandlungswärme bzw. Phasenübergangswärme (latente Wärme):

die ausgetauschte Wärmemenge bei Umwandlungsprozessen

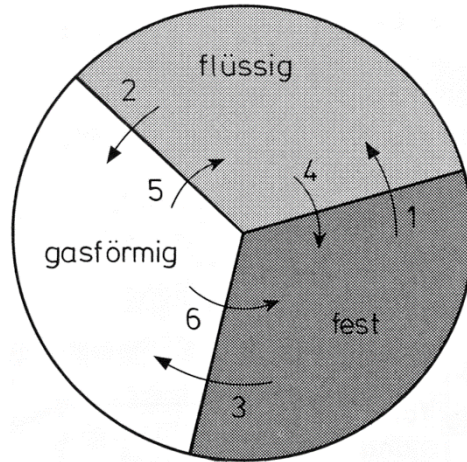
Bemerkung: alle 5 Begriffe finden öfter Verwendung (manchmal gleichzeitig).

Phasenübergänge 1. Art: sind mit einer sprunghaften Änderung der Entropie und der Volumina verbunden, d. h. der Übergang ist mit einer Umwandlungswärme verknüpft (Aggregatzustandsänderungen, Änderungen der kristallinen Struktur).

Phasenübergänge der 2. Art: sind mit einer sprunghaften Änderung der Molwärme (molare Wärmekapazität) verbunden, jedoch **nicht** mit einer Umwandlungswärme (Übergang Ferro-Paramagnetismus, Normal-Supraleitung).

Phasenübergänge zwischen Aggregatzustände

Die möglichen Übergänge von einem Aggregatzustand in einen anderen:

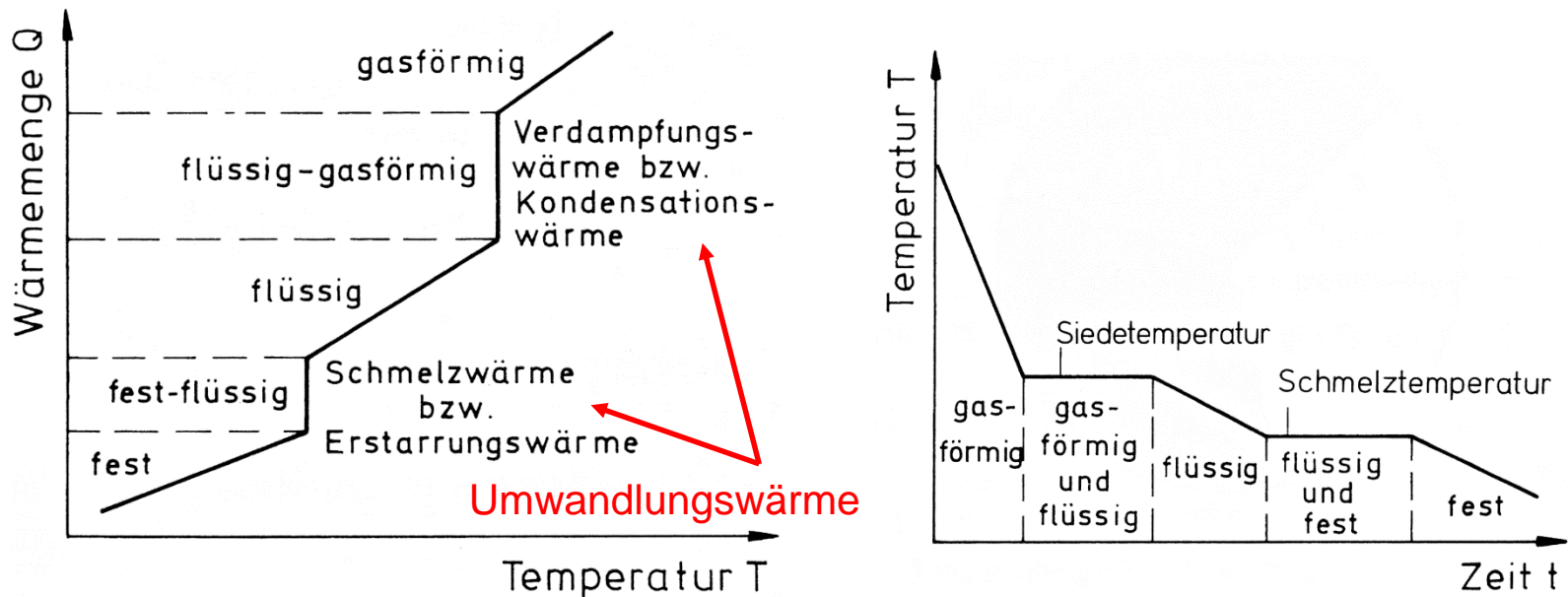


Übergänge 1 bis 3: Wärmemenge zugeführt
Übergänge 4 bis 6: Wärmemengen freigesetzt

Übergang	Bezeichnung	Umwandlungswärme
1: fest-flüssig	Schmelzen	Schmelzwärme
2: flüssig-gasförmig	Verdampfen	Verdampfungswärme
3: fest-gasförmig	Sublimieren	Sublimationswärme
4: flüssig-fest	Erstarren	Erstarrungswärme
5: gasförmig-flüssig	Kondensieren	Kondensationswärme
6: gasförmig-fest	Verfestigen (Resublimieren)	Verfestigungswärme

Phasenübergänge zwischen Aggregatzustände

Den Zusammenhang zwischen der Wärmemenge Q und der Temperatur T eines reinen Stoffes, welcher die Phasenübergänge fest-flüssig und flüssig-gasförmig (bzw. vice versa) durchläuft:



Bei konstant zugeführter (bzw. entzogener) Wärmemenge bleibt die Temperatur T jeweils bei Erreichen der Umwandlungstemperatur des Stoffes so lange konstant, bis die Phasenänderung der gesamten Menge des Stoffes abgeschlossen ist.

Umwandlungswärme

Die beim Übergang unter konstantem Druck von einer Phase in die andere aufgenommene oder abgegebene **Phasenübergangswärme Q** bei gleichbleibender Temperatur:

$$Q = m \cdot q = n \cdot q_m$$

m = Masse des Körpers

q = spezifische Umwandlungswärme bzw. Umwandlungsenthalpie
Dies ist eine Materialkonstante, Einheit: J/kg

n = Stoffmenge des an der Umwandlung beteiligten Stoffes

q_m = molare Umwandlungswärme bzw. Umwandlungsenthalpie, Einheit: J/mol

$q_m = q \cdot M$, M = Molare Masse

Beachte: die bei einer isobaren Phasenumwandlung ausgetauschte Wärmemenge ist gleich der Enthalpieänderung des Systems: $dQ = dH$. (Folie 265).

Daher die Bezeichnungen Phasenumwandlungswärme bzw. –enthalpie

Umwandlungswärme

Die spezifischen und molaren Schmelz- bzw. Verdampfungswärmen von Eis bzw. Wasser bei Normaldruck ($p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$):

Umwandlungswärme	spezifische	molare
Schmelzwärme bei 0 °C	333,6 J/g	6,01 kJ/mol
Verdampfungswärme bei 100 °C	2256 J/g	40,64 kJ/mol

Stoff	Schmelztemperatur in K	Spezifische Schmelzwärme in J/g	Siedetemperatur in K	Spezifische Verdampfungswärme in J/g
Aluminium	933,5	396,9	2720	10900
Gold	1337	64,8	2980	1650
Wolfram	3691	192	~5773	4350
Ethanol	158,7	107,9	351,5	813,3
Quecksilber	234,3	11,8	629,8	285
Sauerstoff (O ₂)	54,36	13,9	90,2	213
Stickstoff (N ₂)	63,15	25,7	77,35	199
Wasserstoff (H ₂)	13,95	58,2	20,39	454

Umwandlungswärme

Beachte:

Bei allen Phasenumwandlungen ist die Umwandlungstemperatur vom äußeren Druck abhängig.

Tritt bei der Umwandlung (z. B. fest in flüssig) eine Volumenvergrößerung ein (dies ist bei den meisten Stoffen der Fall), so erhöht sich die Umwandlungstemperatur mit steigendem Druck.

Wird dagegen das Volumen bei der Umwandlung kleiner (z. B. Eis/Wasser), so erniedrigt sich die Umwandlungstemperatur bei Drucksteigerung.

Beachte:

Die Enthalpie ist eine Zustandsgröße, ihre Änderung ΔH ist also unabhängig vom Weg, auf welchem eine Phasenumwandlung erfolgt.

Es muss daher die gleiche Zustandsänderung auftreten, wenn beispielsweise ein Mol eines Stoffes unmittelbar sublimiert wird (Sublimationsenthalpie ΔH_s), oder zunächst geschmolzen (Schmelzenthalpie ΔH_m), und dann verdampft wird (Verdampfungsenthalpie ΔH_e).

Es gilt somit: $\Delta H_s = \Delta H_m + \Delta H_e$

Atomistisches Bild

Vom gasförmigen Zustand (hohe Temperatur) unter Absenkung der Temperatur:

1. Durch Abkühlen erhöht sich, infolge der Verringerung des mittleren Abstandes der Moleküle, die Wirkung der Kohäsionskräfte.
2. Bei einer bestimmten Temperatur verrichten die molekularen Anziehungskräfte Arbeit, die in Form von Kondensationswärme nach außen abgegeben wird, ohne dass die Temperatur des Systems sich ändert. \Rightarrow Während dieser Zeit sind beide Phasen koexistent.
3. Die Gasphase geht dabei in die energieärmere flüssige Phase über, wobei die Dichte der flüssigen Phase eines Stoffes meist wesentlich größer als jene des gasförmigen Aggregatzustandes ist, d. h. dass die mittleren Abstände der Teilchen des Systems in der flüssigen Phase i. Allg. wesentlich geringer sind als in der gasförmigen.
4. Mit der kontinuierlichen Abnahme der Temperatur ist eine weitere Verringerung der mittleren kinetischen Energie der Flüssigkeitsmoleküle verbunden, bis bei einer bestimmten Temperatur der Energieinhalt nochmals sprunghaft abnimmt.
5. Das System gibt nun wieder, bei konstant bleibender Temperatur, Erstarrungswärme nach außen ab.
6. Die flüssige Phase geht dabei in die energieärmere feste Phase über. Die Moleküle haben dabei ihre freie Beweglichkeit vollständig eingebüßt. Ihre Wärmebewegungen bestehen nur noch in elastischen Schwingungen um eine feste Ruhelage.

Gleichgewicht von Aggregatzustände

Bisher haben wir uns nur mit Phasenübergängen und den dabei auftretenden Phasenübergangswärmen zwischen verschiedenen Aggregatzuständen befasst.

Wir haben aber gesehen, dass während der Umwandlung von z. B. fest nach flüssig beide Aggregatzustände gleichzeitig vorkommen.

Unter gewissen Bedingungen kann ein Stoff gleichzeitig in zwei oder drei Phasen im Gleichgewicht existieren.

In einem p, T -Diagramm kennzeichnet die **Schmelzkurve** oder **Schmelzdruckkurve** die Koexistenz der flüssigen und festen Phase im Gleichgewicht.

Ähnlich kennzeichnet die **Dampfdruckkurve** oder **Verdampfungskurve** in einem p, T -Diagramm die Koexistenz der flüssigen und gasförmigen Phase im Gleichgewicht.

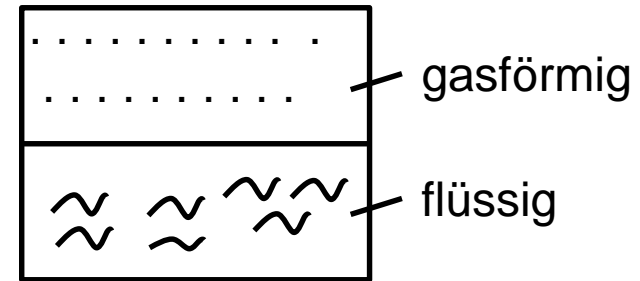
Die Sublimationskurve beschreibt den unmittelbaren Übergang aus dem festen in den gasförmigen Aggregatzustand, und vice versa.

Die Koexistenz aller drei Phasen (fest, flüssig, gasförmig) eines reinen Stoffes im Gleichgewicht ergibt den **Tripelpunkt**.

All diese Informationen in einem p, T -Diagramm ergibt das **Phasendiagramm**.

Sättigungsdampfdruck

Voraussetzung: System, bei dem in einem abgeschlossenen Volumen gleichzeitig die beiden Phasen flüssig und gasförmig vorhanden sind.



Durch aus der Flüssigkeit austretende Moleküle entsteht in dem Restvolumen des Behälters ein Gasdruck, der **Dampfdruck**.

Damit ein Flüssigkeitsmolekül aus dem inneren der Flüssigkeit in den Außenraum gelangt, muss es eine kinetische Energie besitzen, welche ausreicht, die zum Austreten durch die Oberfläche hindurch in den Gasraum notwendige Arbeit gegen die molekularen Anziehungskräfte zu verrichten.

Analog zu den für Gase aufgestellten Überlegungen der kinetischen Gastheorie haben auch Flüssigkeitsmoleküle Geschwindigkeiten und damit kinetische Energien, die einer Maxwell-Verteilung folgen.

Es können also nur die Moleküle verdampfen, deren Geschwindigkeit so groß ist, dass ihre kinetische Energie die Oberflächenenergie überwiegt.

Mit wachsender Temperatur erhöht sich daher die Zahl der Moleküle, die pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsoberfläche verlassen.

Sättigungsdampfdruck

Gleichermaßen treten Moleküle aus der Dampfphase, abhängig von ihrer Dichte und damit dem Dampfdruck im Gasraum, wieder in die flüssige Phase ein.

In einem abgeschlossenen Volumen kommt die Verdampfung zum Stillstand, sobald die im Dampfraum vorhandenen Moleküle einen bestimmten Dampfdruck, den sog. **Sättigungsdampfdruck $p_D(T)$** ausüben.

Es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein, bei dem stets gleichviel Moleküle aus dem Dampfraum in die Flüssigkeit zurückkehren (kondensieren), wie aus der Flüssigkeit verdampfen.

D. h. es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht zwischen dem Gas (Dampf) und der flüssigen Phase ein; die Stoffmengen der beiden Phasen bleiben im Mittel konstant.

Im dynamischen Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und Dampf stellt sich über einer Flüssigkeit der Sättigungsdampfdruck ein. Er hängt allein von der Art der Flüssigkeit und der Temperatur ab und steigt mit der Temperatur an.

Sättigungsdampfdruck

So lange es sich um ein abgeschlossenes Volumen handelt und noch Flüssigkeit vorhanden ist, ist der Sättigungsdampfdruck unabhängig von der Größe des für den Dampf verfügbaren Volumens.

Der Sättigungsdampfdruck ist von der Gegenwart anderer Gase im Dampfraum unabhängig, d .h. es stellt sich ein Sättigungsdampfdruck als Partialdruck der Flüssigkeit ein (nach dem Dalton'sches Gesetz, Folie 170).

Beispiel: In einem mit völlig trockener Luft gefüllten und nach Einbringen von etwas Wasser abgesperrten Gefäß stellt sich ein Enddruck ein, der gleich dem ursprünglichen Luftdruck vermehrt um den Sättigungsdampfdruck des Wassers ist.

Beachte: Das gilt nur für Verdampfung im abgeschlossenen Gefäß.

An der Freien Luft dagegen kann zum einen der Gesamtdruck durch den Dampf nicht steigen, weil Letzterer einfach Luft wegdrückt. Zum anderen entsteht *kein Gleichgewicht*, siehe Folie 303.

Dampfdruckkurve

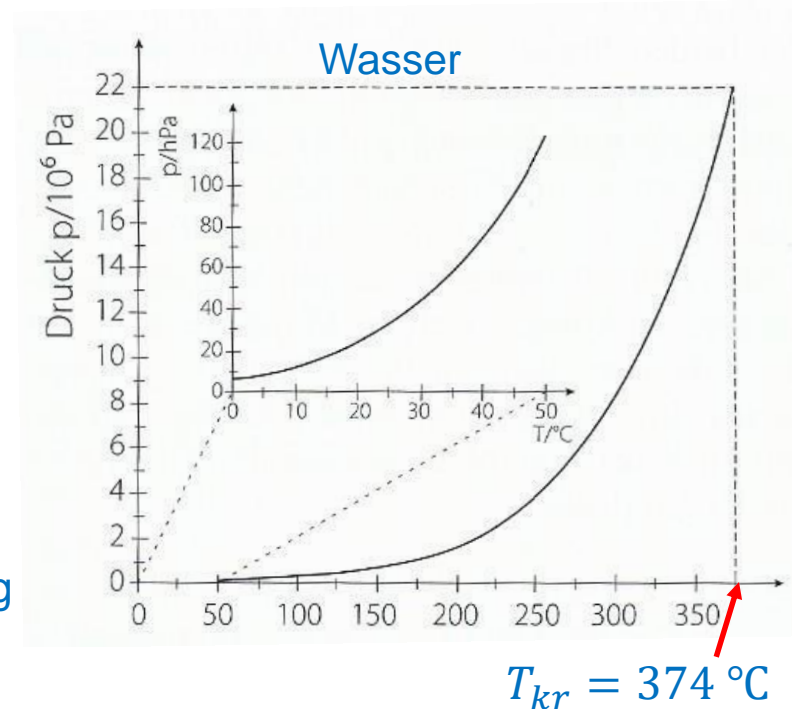
Trägt man in einem p, T -Diagramm den Dampfdruck als Funktion der Temperatur auf, so erhält man die **Dampfdruckkurve**.

Die Dampfdruckkurve $p_D(T)$ teilt die p, T -Ebene des Diagramms in zwei Bereiche: Oberhalb der Kurve kann nur der flüssige und unterhalb nur der gasförmige Aggregatzustand vorliegen.

D. h. nur für die p, T -Werte auf der Dampfdruckkurve koexistieren die flüssige und die gasförmige Phase.

Die Dampfdruckkurve für den Übergang flüssig-gasförmig wird auch als **Verdampfungskurve** bezeichnet und endet am kritischen Punkt.

Die Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf haben wir bereits bei der Diskussion der Zustandsänderung eines reals Gases anhand der van der Waals'schen Gleichung kennen gelernt (Folie 237).



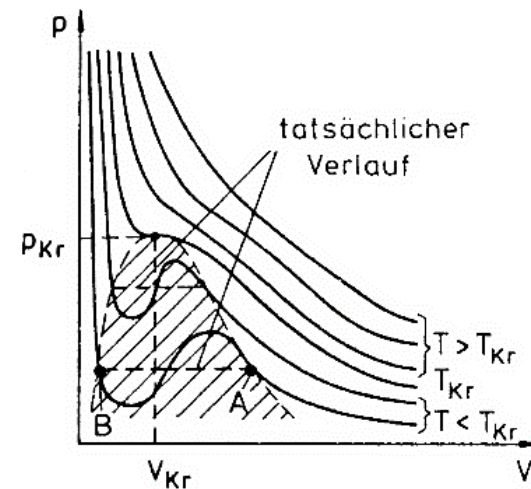
Kritische Temperatur T_{kr}

Bei einer bestimmten Temperatur $T < T_{kr}$, beobachtet man den isothermen Übergang vom gasförmigen in den flüssigen Aggregatzustand (und umgekehrt) entlang der Maxwell'schen Geraden bei konstantem Sättigungsdampfdruck p_D , der unabhängig vom Volumen ist.

Bei der **kritischen Temperatur T_{kr}** werden die Molvolumina von Flüssigkeit und Dampf identisch und es besteht kein Unterschied mehr zwischen den beiden Phasen. Der dazugehörige Druck ist der **kritische Druck p_{kr}** , das gemeinsame Volumen, das **kritische molare Volumen $V_{m, kr}$** und die entsprechende Dichte die **kritische Dichte ρ_{kr}** .

Oberhalb dieses so genannten kritischen Punktes ist keine Verflüssigung mehr möglich, d. h. auch durch noch so hohe Drücke kann eine Verflüssigung des Gases nicht bewirkt werden.

Um ein Gas zu verflüssigen, muss man es zunächst bis unter die kritische Temperatur abkühlen und dann bis zur Sättigung komprimieren.



Clausius-Clapeyron'sche Gleichung

Den Zusammenhang zwischen Dampfdruck p_D und Temperatur T , d. h. den Verlauf der Dampfdruckkurve, beschreibt die **Clausius-Clapeyron-Beziehung**:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{n \cdot q_m}{T \cdot (V_D - V_{Fl})}$$

n = Stoffmenge

q_m = molare Umwandlungswärme

T = Umwandlungstemperatur

V_D, V_{Fl} = Volumen von Dampf bzw. Flüssigkeit

Sie gilt jedoch nicht nur für den Phasenübergang flüssig-gasförmig, sondern in analoger Weise auch für die anderen Aggregatzustandsänderungen eines Stoffes.

D. h. die molare Verdampfungswärme q_m ist: $q_m = T \cdot \frac{dp}{dT} \cdot (V_{m,D} - V_{m,Fl})$

Hier ist T die Verdampfungstemperatur und $V_{m,D}, V_{m,Fl}$ sind Molvolumina von Dampf bzw. Flüssigkeit

Da das Volumen des Dampfes größer als der Flüssigkeit ist, muss bei Verdampfung Volumenarbeit verrichtet werden. Der größte Teil der Verdampfungswärme wird aber zur Überwindung der molekularen Anziehungskräfte bei der Vergrößerung des mittleren Molekülabstandes verbraucht.

Verdunsten

Befindet sich die Flüssigkeit in einem offenen Gefäß, d .h. auf der freien Flüssigkeitsoberfläche lastet ein Fremdgas, z. B. Luft (unter Atmosphärendruck), dann findet bei jedem Druck und jeder Temperatur ebenso Verdampfung der Flüssigkeit statt, ohne dass sich jedoch ein Gleichgewicht einstellen kann.

Zwar stellt sich unmittelbar über der Flüssigkeitsoberfläche sehr bald der Sättigungsdruck als Partialdruck ein, von dort können die Dampfmoleküle in ruhender Luft nur durch Diffusion in den weiteren Raum vordringen, d. h. dieser Vorgang wird dadurch verlangsamt. Die Diffusion begrenzt also die Verdampfungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit.

Diese langsame Verdampfung durch die freie Flüssigkeitsoberfläche bezeichnet man als **Verdunstung**.

Zur Verdampfung der Flüssigkeit ist von außen Verdampfungswärme zuzuführen oder, falls dies nicht geschieht, entnimmt die Flüssigkeit diese Wärmemenge ihrem eigenen Energievorrat.

Die Folge ist, dass die mittlere Energie der Moleküle abnimmt und damit die Temperatur des Systems sinkt, d. h. die Flüssigkeit kühlt ab. Die für die Verdunstung erforderliche Verdampfungswärme tritt jetzt als **Verdunstungskälte** auf.

Verdunsten

Beispiele:

- ein an einer Leine aufgehängtes Tuch weist, auf Grund der durch die Verdunstung des Wassers verbrauchten Wärmeenergie, eine geringere Temperatur auf als seine Umgebung.
- Ebenso reguliert der menschliche Organismus (ein Warmblüter) durch Transpiration seine Körpertemperatur, indem durch Verdunstung des ausgetretenen Schweißes, die dazu erforderliche Wärmeenergie dem Körper entzogen und damit ihm Abkühlung verschafft wird.

Die Abkühlung eines Systems erfolgt umso rascher, je höher der Dampfdruck der Flüssigkeit ist. So erfolgt z. B. die Abkühlung bei Ether schneller als bei Alkohol und bei diesem wiederum schneller als bei Wasser.

Dieses Prinzip nutzt man auch bei Lokalanästhesie: Gießt man Ether (Diethylether) auf die Haut, so wird dieser die zur Verdampfung nötige Wärme entzogen, und man erhält eine beträchtliche Abkühlung, welche die Schmerznerven unempfindlich macht.

Sieden

Findet bei einer Flüssigkeit infolge starker Wärmezufuhr nicht nur an der Oberfläche Verdampfung statt, sondern auch im Innern der Flüssigkeit, d. h. es bilden sich im Innern Dampfblasen, die dann an die Oberfläche steigen, so bezeichnet man diese aus dem ganzen Innern heraus erfolgende Verdampfung als **Sieden**.

Eine Flüssigkeit siedet, wenn der Sättigungsdampfdruck bei der gegebenen Temperatur dem Druck über der Flüssigkeit entspricht.

Befindet sich die Flüssigkeit nicht in einem abgeschlossenen, sondern in einem offenen Gefäß, so kann der Dampf entweichen und die Flüssigkeit siedet dann, wenn ihr Sättigungsdampfdruck gleich dem äußeren Luftdruck ist.

In den beim Siedevorgang im Innern der Flüssigkeit gebildeten Dampfblasen herrscht ein Sättigungsdampfdruck, welcher mindestens gleich dem Außendruck ist, unter dem die Flüssigkeit steht, da sonst der Dampf in der Blase wieder kondensieren würde.

Bei tieferen Gefäßen kommt zum äußeren Druck noch der mit der Tiefe zunehmende Schweredruck hinzu, sodass der Siedevorgang aus dem Innern der Flüssigkeit heraus erst bei etwas höherer Temperatur eintritt.

Sieden

Wasser siedet nur unter Normaldruck (1012,25 hPa) bei 100 °C.

Bei vermindertem Druck siedet es bei Temperaturen unterhalb von 100 °C, bei erhöhtem Druck darüber:

z. B. auf der Zugspitze (2963 m, 699 hPa), siedet das Wasser schon bei 90 °C.

z. B. auf dem Montblanc (4810 m, 556 hPa), siedet das Wasser schon bei 84 °C

z. B. wir können sogar Wasser bei Zimmertemperatur siedend lassen, indem wir in einem abgeschlossenen Gefäß den Druck im Raum über der Wasseroberfläche mit einer Kapselpumpe auf etwa 25 hPa erniedrigen.

Ohne Druckerniedrigung, also nur durch Erwärmen, kommt im abgeschlossenen Gefäß eine Flüssigkeit nie zum Sieden in dem Sinne, dass Dampfblasen in ihr zu beobachten sind.

Stets lastet der eigene Sättigungsdruck auf ihr, zu dem meist noch ein Luftpartialdruck und innerhalb der Flüssigkeit stets der hydrostatische Druck kommen.

Die abgeschlossene Flüssigkeit lässt sich über den normalen Siedepunkt erhitzen, begrenzt nur durch die Zerreißfestigkeit des Gefäßes.

z. B. um innerhalb kurzer Zeit Speisen zu garen in einem Dampfkochof (~115 °C bei Drücken des Wasserdampfes im Bereich von 1400 bis 2200 hPa) oder um unterschiedlichste Substanzen oder Gegenstände zu sterilisieren in einem Dampfsterilisator.

Kondensation und Sublimation

Wird der Dampfdruck geringer als der äußere Druck, z. B. durch Absenken der Temperatur, bzw. verminderte Zufuhr von Wärme, so beginnt der Dampf zu **kondensieren**.

Bei der Kondensation wird eine Wärmemenge, die gleich der Verdampfungswärme ist, umgekehrt als Kondensationswärme wieder freigesetzt.

Das spielt eine große Rolle bei der Stabilisierung des Klimas, indem z. B. der Niederschlag von Tau gegen Morgen durch die dabei frei werdende Kondensationswärme verhindert, dass die Nachttemperatur noch weiter sinkt.

Auch feste Stoffe besitzen einen Dampfdruck und verdunsten daher, allerdings meist nur sehr langsam, wie z. B. Schnee bei scharfem Frost und trockener Luft.

Dieser Übergang eines festen Körpers unmittelbar in den Dampfzustand wird **Sublimation** genannt. Manche Stoffe, wie Jod oder Naphtalin, verschwinden allmählich, wenn sie an freier Luft liegen. Festes Kohlendioxid, sog. Trockeneis, hat bereits bei $-78,5\text{ °C}$ einen Sublimationsdruck von 1 bar, sodass es, ohne vorher flüssig zu werden, lebhaft verdunstet.

Den umgekehrten Vorgang, d. h. den unmittelbaren Übergang gasförmig-fest, beobachten wir häufig in der Natur bei der Entstehung von Reif aus dem Wasserdampf der Luft. Schneekriställchen sind nicht gefrorene Regentropfen, sondern bilden sich unmittelbar aus Wasserdampf.

Schmelzen und Erstarren

Erwärmen wir einen festen Körper, so werden die Schwingungen der Elementarbausteine, d. h. der Atome, Ionen oder Moleküle, immer stärker, ihr mittlerer Abstand immer größer, der Körper dehnt sich aus. Mit wachsender Amplitude lockert sich das Kristallgitter, bis es schließlich bei einer bestimmten Temperatur zusammenbricht.

Der Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand bzw. umgekehrt, das **Schmelzen** bzw. **Erstarren**, geht ohne Temperaturänderung des Systems unter Zufuhr bzw. Abgabe von **Schmelz-** bzw. **Erstarrungswärme** oder Schmelz- bzw. Erstarrungsenthalpie vor sich.

Bei dieser Temperatur, dem **Schmelzpunkt T_F** , schmilzt der Festkörper und geht in den viel weniger geordneten flüssigen Aggregatzustand über. Bei der Schmelztemperatur können die feste und flüssige Phase (Schmelze) im Gleichgewicht koexistieren.

Kühlt man eine reine Flüssigkeit ab, so wird sie bei derselben Temperatur T_F fest, sodass man diese auch als **Erstarrungspunkt** bzw. bei Stoffen, die bei Zimmertemperatur flüssig sind, als **Gefrierpunkt** bezeichnet.

Eine *scharfe* Schmelz- und Erstarrungstemperatur besitzen nur reine und kristalline Körper, nicht aber amorphe Stoffe, wie Gläser, Harze und viele hochpolymere Kunststoffe. Diese werden vielmehr bei steigender Temperatur allmählich weich, dann zäh- und schließlich dünnflüssig.

Schmelzen und Erstarren

Fast alle Körper dehnen sich beim Schmelzen aus. Die wichtigste Ausnahme ist das Wasser, die Anomalie des Wassers, da Eis etwa 9% leichter ist.

Setzt man Eis unter Druck, so schmilzt es und verringert dabei sein Volumen. Der Schmelzpunkt sinkt um 0,0075 K pro bar Druckerhöhung. Bei der Wanderung der Gletscher spielt dieses Schmelzen unter Druck und Wiedergefrieren des Eises beim Nachlassen des Druckes (so genannte Regulation des Eises) eine wichtige Rolle.

Prinzip von Le Chatelier-Braun: Jedes System reagiert auf eine äußere Einwirkung in der Richtung, dass es die primäre Ursache zu vermindern sucht, d. h. das System gibt dem äußeren Druck nach, ein sehr oft beobachteter Vorgang in der Natur.

So kann Wasser unter Druck nie fest werden, denn das würde eine Volumenzunahme, d. h. eine Druckzunahme, bedeuten; umgekehrt werden unter Druck alle diejenigen Stoffe fest, die im festen Zustand eine größere Dichte als im flüssigen haben.

Es ist unmöglich, eine feste Substanz über ihren Schmelzpunkt hinaus zu erwärmen.

Unterkühlung

Dagegen gelingt es, durch langsames, vorsichtiges Abkühlen Flüssigkeiten erheblich unter ihren Erstarrungspunkt abzukühlen, z. B. sehr reines, luftfreies Wasser bis etwa -8 °C flüssig zu halten.

Doch ist bei dieser **Unterkühlung** die Flüssigkeit nicht stabil, es genügt eine leichte Erschütterung, um sie zum Gefrieren zu bringen, wobei sich sofort die normale Gefriertemperatur einstellt, weil die Schmelzwärme frei wird.

Beispiel: Die Vereisung von Flugzeugen beruht darauf, dass unterkühlte Wassertröpfchen, die in ruhiger Luft lange beständig sind, auf den Tragflächen gefrieren und festhalten.

Andererseits entstehen Kristalle nie im homogenen Inneren einer Flüssigkeit, sondern sie „wachsen“ an den Grenzflächen, z. B. von der Wand aus, oder bilden sich an Verunreinigungen. Günstig ist das Impfen mit eigenen Kristallkeimen. Einkristalle zieht man mit ganz geringer konstanter Geschwindigkeit aus der Schmelze heraus.

Schmelzdruckkurve

In einem p, T -Diagramm kennzeichnet die Schmelzdruckkurve (oder Schmelzkurve) $p(T)$ die Koexistenz der flüssigen und festen Phase im Gleichgewicht und trennt den flüssigen und den festen Bereich.

Auch für den Phasenübergang fest-flüssig kann der Verlauf der Schmelzdruckkurve beschrieben werden mit einer **Clausius-Clapeyron-Beziehung**:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{n \cdot q_m}{T \cdot (V_{Fl} - V_F)}$$

n = Stoffmenge, q_m = molare Schmelzwärme, T = Schmelztemperatur, V_{Fl}, V_F = Volumen der flüssigen bzw. festen Phase

D. h. die molare Schmelzwärme q_m ist: $q_m = T \cdot \frac{dp}{dT} \cdot (V_{m, Fl} - V_{m, F})$

Die Schmelzwärme ist stet positiv ($q_m > 0$) und in der Regel ist $V_{Fl} > V_F$, sodass für die meisten Stoffe die Schmelzdruckkurve eine positive Steigung aufweist ($\frac{dp}{dT} > 0$).

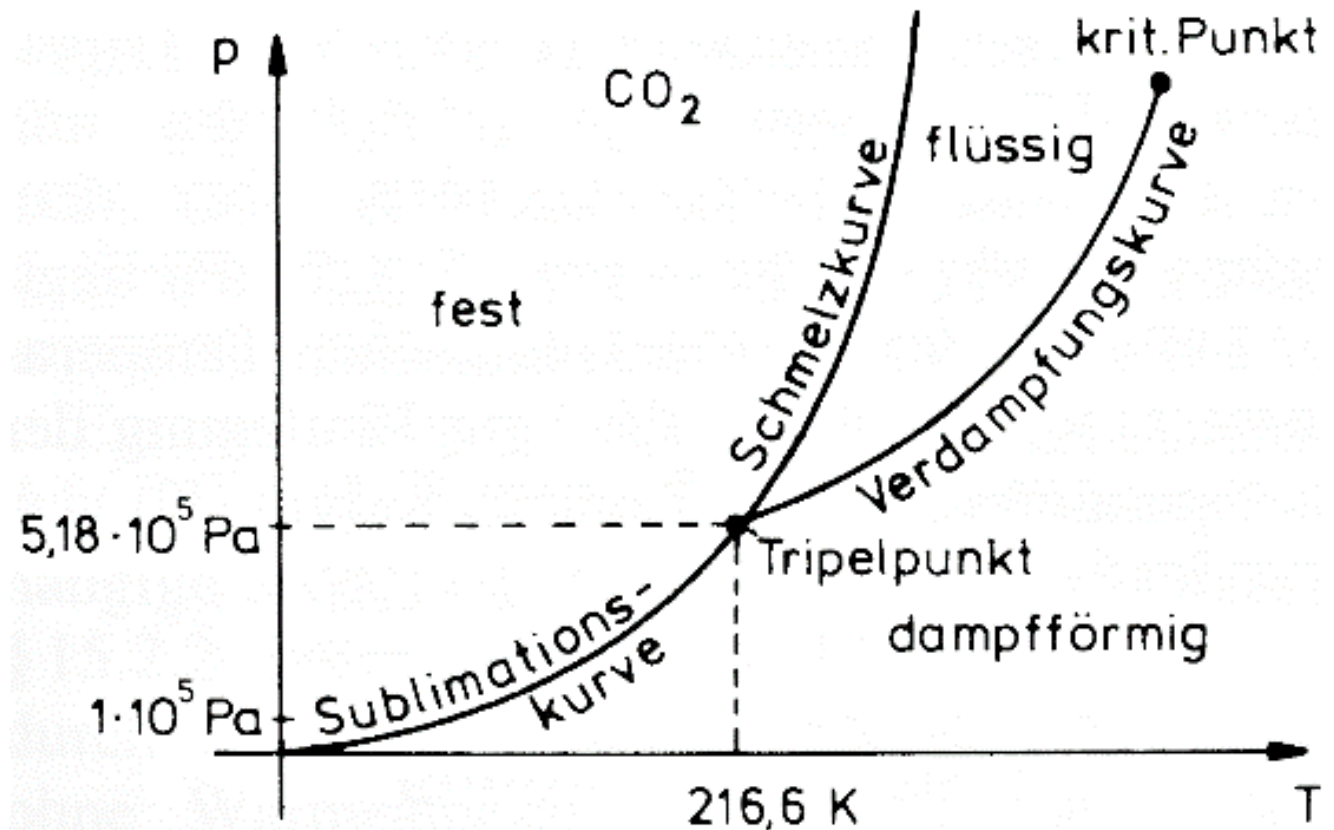
Wasser bzw. Eis und einige wenige andere Stoffe (Bi, Ga, Ge) bilden eine Ausnahme, denn ihre Dichte steigt beim Schmelzen. Somit ist $V_{Fl} - V_F < 0$ und daher die Steigung $\frac{dp}{dT} < 0$, d. h. die Schmelzdruckkurve von Wasser fällt. 311

Phasendiagramm

Der Tripelpunkt von Kohlendioxid liegt bei 5,3 bar und $-56,2\text{ °C}$

Der kritische Punkt liegt bei 73,9 bar und 31 °C .

Wenn wie hier, der Druck des Tripelpunktes oberhalb des normalen Atmosphärendruckes (1 bar) liegt, kann die Substanz auf der Erde an freier Luft nie flüssig werden.



Phasendiagramm für Wasser

Tripelpunkt:

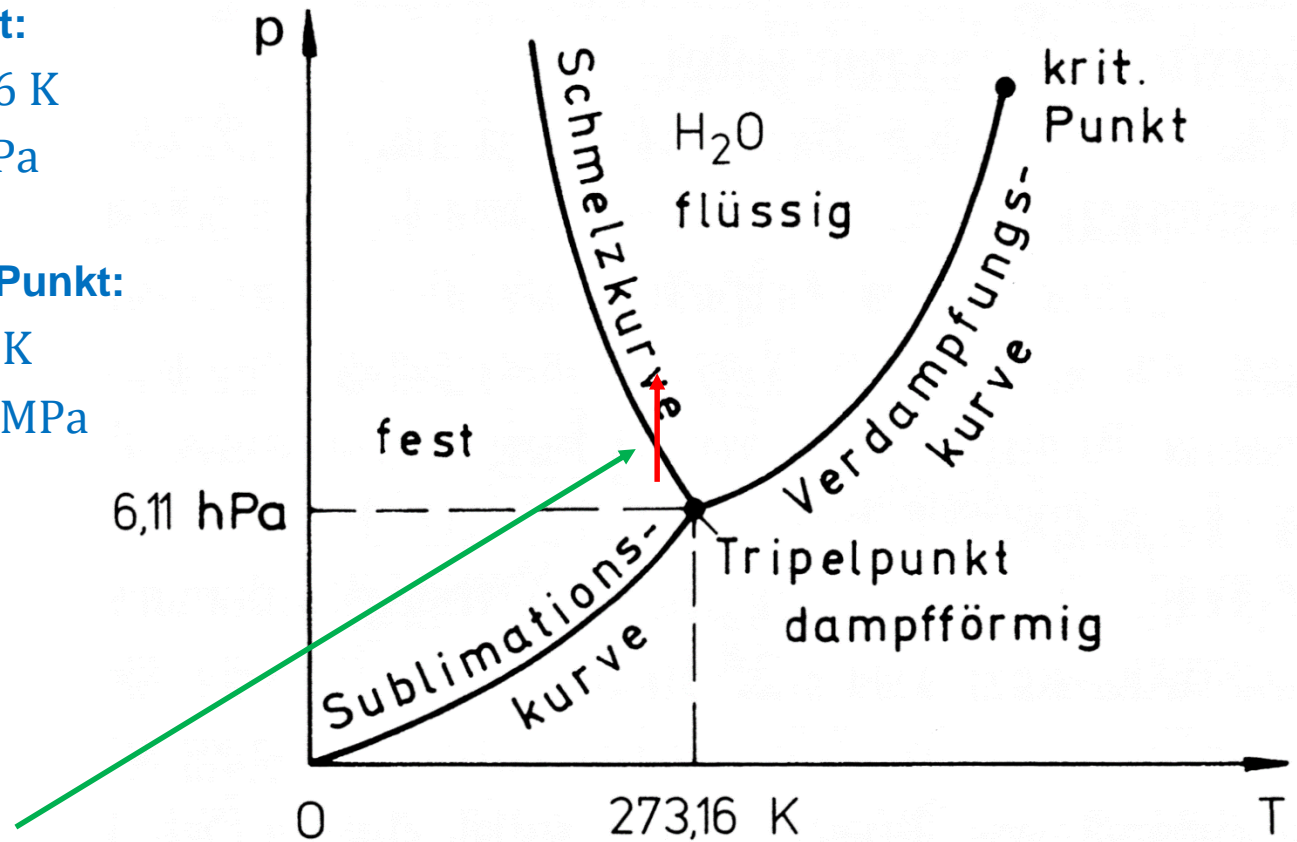
$$T = 273,16 \text{ K}$$

$$p = 611 \text{ hPa}$$

Kritischer Punkt:

$$T = 647,3 \text{ K}$$

$$p = 22,14 \text{ MPa}$$



Anomalie des Wassers: Bei Druckerhöhung Übergang von fest zu flüssig

Die **Sublimationskurve** besitzt für alle Substanzen eine positive Steigung.

Phasendiagramm für Wasser

Tripelpunkt:

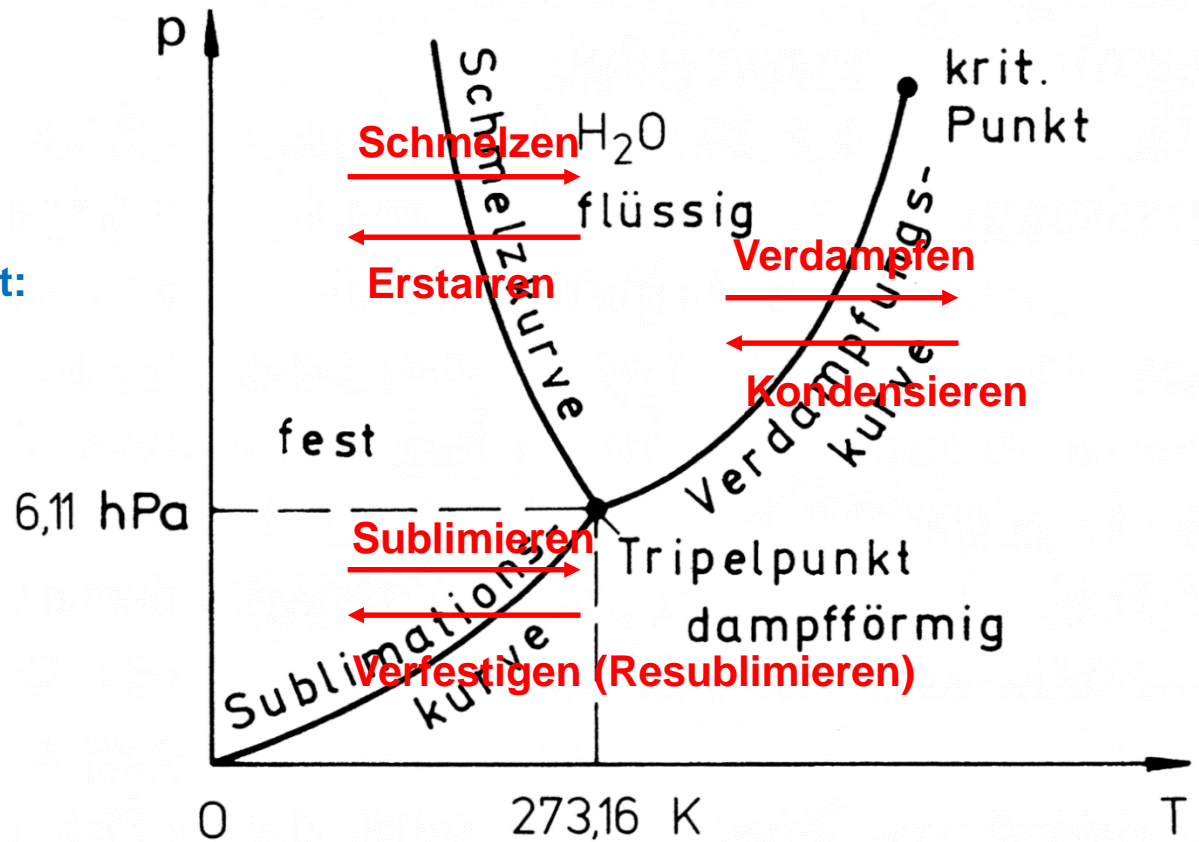
$T = 273,16 \text{ K}$

$p = 611 \text{ hPa}$

Kritischer Punkt:

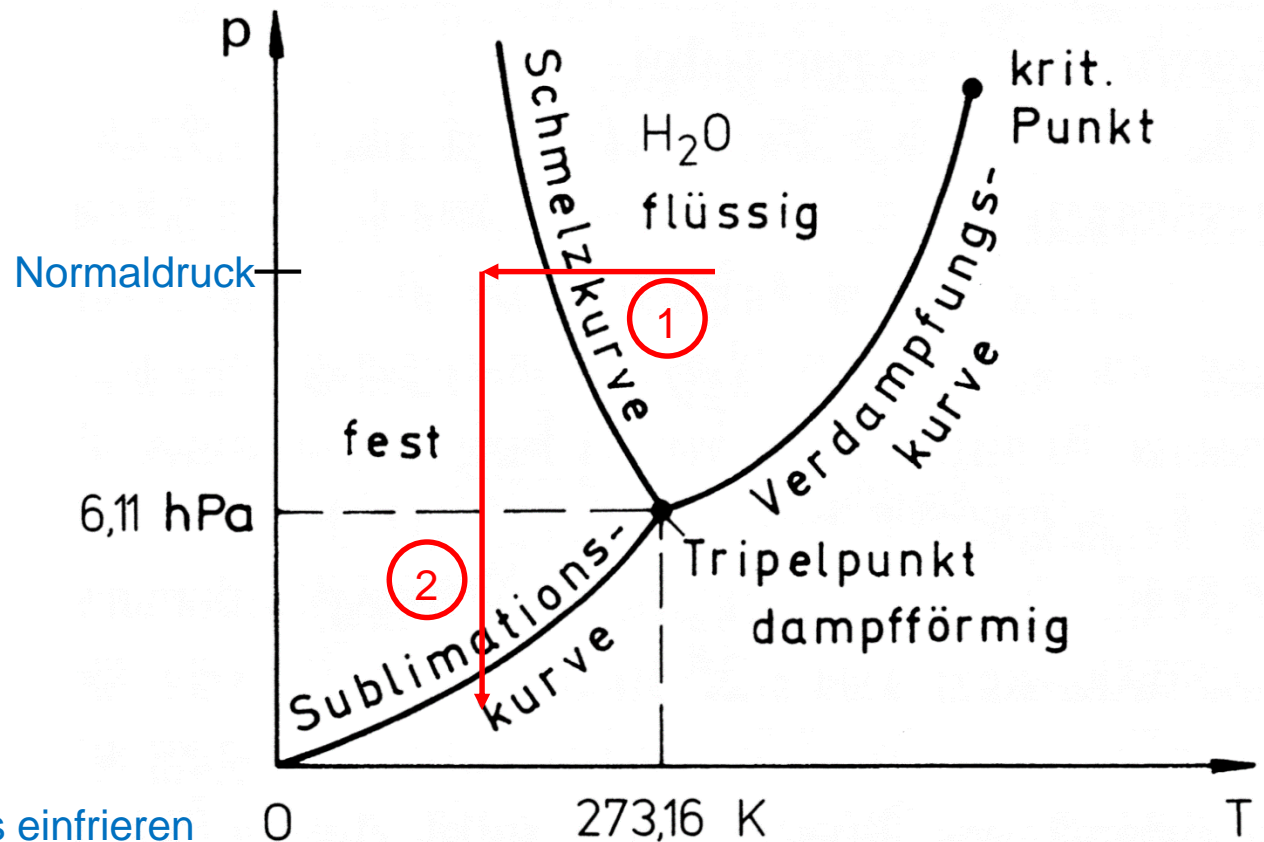
$T = 647,3 \text{ K}$

$p = 22,14 \text{ MPa}$



Gefriertrocknen

Bei tiefen Temperaturen ($T < 273\text{ K}$) und kleinen Drücken ($p < 6,1\text{ hPa}$) sublimiert Eis. Daher lässt sich aus wärmeempfindlichen Stoffen, z. B. biologischen Proben, Nahrungsmitteln oder Pharmazeutika, die Hauptmenge des darin enthaltenen Wassers durch Sublimation entfernen ohne die Mikrostruktur zu beschädigen.



1. Schnelles einfrieren
2. Verdampfen durch Druckniederung

Luftfeuchtigkeit

Die atmosphärische Luft enthält infolge der ständigen Verdunstung an freien Wasseroberflächen stets Wasserdampf, und zwar in wechselnden Mengen.

Mehr Wasserdampf, als dem Sättigungsdampfdruck ihrer jeweiligen Temperatur entspricht, kann die Luft nicht aufnehmen. Infolge des raschen Luftmassenaustauschs und auch des häufigen Temperaturwechsels erreicht die freie atmosphärische Luft meistens keinen Gleichgewichtszustand, wobei dies stattfindet.

Unter der absoluten Feuchtigkeit versteht man den Gehalt an Wasserdampf in g/cm^3 , unter der relativen Feuchtigkeit das Verhältnis der wirklich vorhandenen zu der bei der betreffenden Temperatur möglichen Menge oder das Verhältnis des wirklich herrschenden Wasserdampfpartialdruckes p zum Sättigungsdampfdruck p_D .

z. B. ist bei $20\text{ }^\circ\text{C}$ ein Partialdruck von 15 mbar vorhanden, so ist, da der Sättigungsdampfdruck $23,3\text{ mbar}$ beträgt, die relative Feuchtigkeit $p/p_D = 0,6444$, oder $64,4\%$.

Zur normalen Lungentätigkeit des Menschen soll die relative Feuchtigkeit zwischen 40% und 75% liegen. Bei größerer Feuchtigkeit verdunstet zu wenig Körperflüssigkeit, sei es in den Lungen und Luftwegen, sei es an der Körperoberfläche, wir haben die Empfindung der Schwüle.

Wärmeübertragung

Die Natur ist immer bestrebt, Temperaturunterschiede auszugleichen. Wir haben also stets einen Transport von Wärme oder einen **Wärmestrom** von Stellen höherer Temperatur zu solchen niedriger Temperatur.

D. h. bestehen zwischen zwei Körpern, zwischen benachbarten Teilen eines Körpers oder zwischen verschiedenen Bereichen Temperaturunterschiede, so findet zwischen diesen eine (irreversible) Energieübertragung in Form von Wärme statt.

Diese Wärmeübertragung kann auf drei Arten vor sich gehen, durch **Leitung**, **Konvektion** und **Strahlung**.

Wärmeleitung: wobei die Wärmeenergie ohne makroskopischen Massentransport im festen, flüssigen oder gasförmigen Stoff übertragen wird.

Konvektion: hier wird die Wärmeenergie durch makroskopische Bewegungen, aufgrund der weitgehend freien Beweglichkeit der Teilchen, im flüssigen oder gasförmigen Stoff transportiert.

Wärmestrahlung: hierbei erfolgt die Übertragung der Wärmeenergie in Form von elektromagnetischen Wellen.

Wärmeleitung

Wärmeleitung: Wärmetransport innerhalb der Materie
(kann nicht in Vakuum stattfinden)

Mechanismen der Wärmeleitung:

In Festkörpern: elastische Wellen (Phononen)

In Metallen: zusätzlich durch Stöße zwischen den quasifreien Leitungselektronen

In Flüssigkeiten: Stöße zwischen den frei beweglichen Teilchen (relativ langsam)

In Gasen: Stoßübertragung zwischen den Gasteilchen

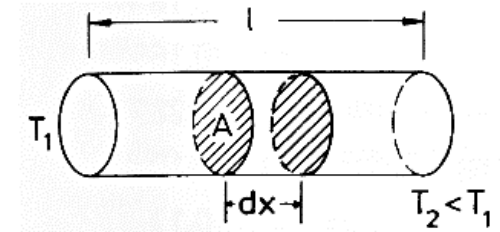
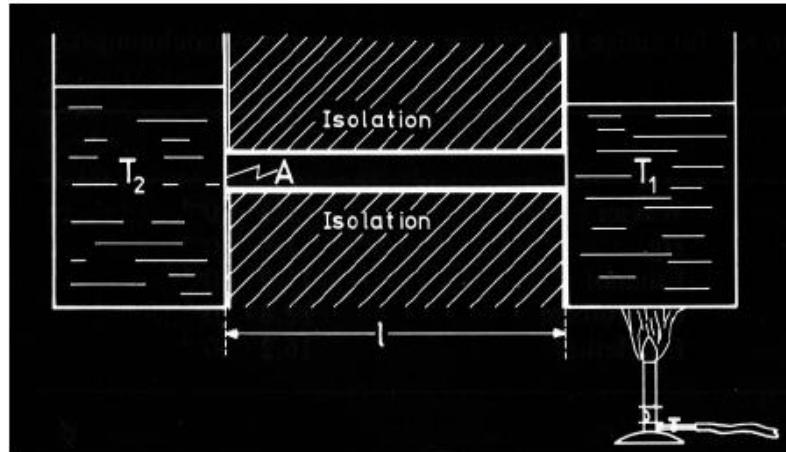
Wärmestrom Φ : Wärmemenge pro Zeiteinheit:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$

Einheit: $\frac{J}{s} = W$

Wärmeleitung

Ein Stab der Länge l befindet sich an seinen Enden auf unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 ($T_1 > T_2$).



Wärmestrom Φ :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{l}$$

λ = Wärmeleitfähigkeit (Materialkonstante), Einheit: $\frac{W}{m \cdot K}$

A = Querschnittsfläche

$\Delta T = T_1 - T_2$ = Temperaturdifferenz

Im stationären Fall ist der Wärmestrom umso kleiner, desto geringer die Wärmeleitfähigkeit des Materials

Wärmeleitung

Guten Wärmeleiter: ein Material mit einer hohen Wärmeleitfähigkeit λ , wie beispielsweise die Metalle

Schlechte Wärmeleiter oder anders gesagt gute Wärmeisolatoren: ein Material mit geringer Wärmeleitfähigkeit λ

z. B. Holz, Kork, Papier, Styropor, Wolle und Luft

Diese Materialien werden zur Wärmedämmung oder Isolierung verwendet

Stoff	λ in $\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
Aluminium (99,99%)	237
Kupfer (99,9%)	394
Baumwolle	0,07
Gasbeton-Blocksteine	0,2...0,3
Glaswolle	0,042
Papier	0,12
Ethanol	0,165
Luft	0,0256

Wärmeübergang

Ein Körper der Oberfläche S habe die Temperatur T_1 und befindet sich in ein ihn umgebendes fluides Medium der Temperatur T_2 (z. B. Luft).

Wärmestrom Φ :
$$\Phi = \alpha \cdot S \cdot (T_1 - T_2)$$

α = Wärmeübergangszahl oder Wärmeübergangskoeffizient, Einheit: $\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Die Wärmeübergangszahl ist keine reine Stoffgröße so wie die Wärmeleitfähigkeit, sondern hängt von der Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers sowie dem Zustand und den Wärmetransporteigenschaften des ihn umgebenden fluiden Mediums ab.

Newton'sches Abkühlungsgesetz: Den zeitlichen Verlauf des Temperaturengleichs des Körpers mit Masse m mit seine Umgebung (im Falle $T_1 > T_2$):

$$T = T_2 + (T_1 - T_2) \cdot e^{-t/\tau}$$

Mit der Zeitkonstante τ :

$$\tau = \frac{\alpha \cdot S}{m \cdot c_p}$$

c_p = spezifische Wärmekapazität

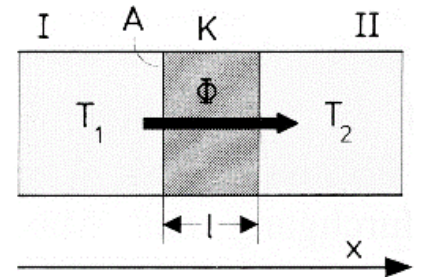
Wärmedurchgang

Betrachte: Zwei Bereiche eines flüssigen oder gasförmigen Mediums unterschiedlicher Temperatur ($T_1 > T_2$) getrennt durch einen festen Körper K, z. B. eine Wand.

Wärmedurchgang: Wärmeübertragung in drei schritten

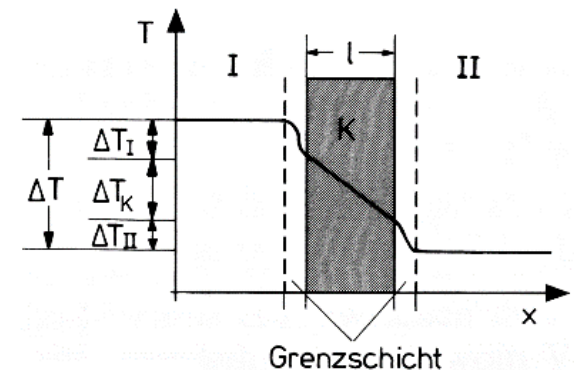
(Vorausgesetzt: gleiche Querschnittsflächen A und stationäre Strömung)

- Wärmeübergang vom Medium I der Temperatur T_1 an die Oberfläche des Körpers K
- Wärmeleitung durch den Körper
- Wärmeübergang von der Oberfläche des Körpers K an das Medium II der Temperatur T_2 .



Wärmestrom Φ :

$$\Phi = \alpha_I \cdot A \cdot \Delta T_I = \frac{\lambda}{l} \cdot A \cdot \Delta T_K = \alpha_{II} \cdot A \cdot \Delta T_{II}$$



Wärmedurchgang

Summe der einzelnen Temperaturdifferenzen gleich der Gesamtdifferenz zwischen den beiden Medien I und II:

$$\Delta T = \Delta T_I + \Delta T_K + \Delta T_{II}$$

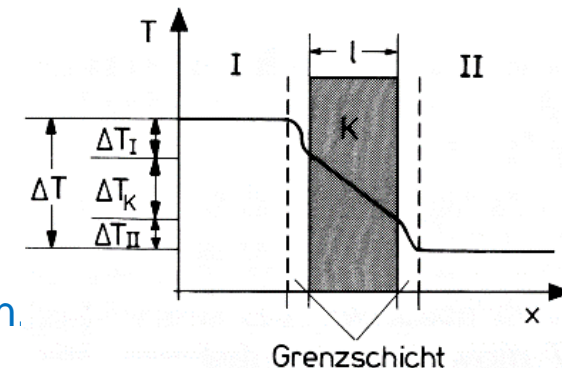
D. h. wir können auch schreiben:

$$\Delta T = \frac{\Phi}{A} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{II}} \right) = \frac{\Phi}{A} \cdot \frac{1}{k}$$

k = Wärmedurchgangskoeffizienten, den Wärmestrom pro Flächeneinheit bei einer Temperaturdifferenz $\Delta T = 1$ K, Einheit: $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

Wärmestrom dieses Wärmedurchgangs: $\Phi = k \cdot A \cdot \Delta T$

Der Wärmeübergang zum bzw. vom Körper K vom Medium I bzw. ans Medium II erfolgt in einer relativ dünnen Grenzschicht, die unmittelbar der Körperoberfläche anliegt und zeigt sich in dem relativ steilen Temperaturgefälle in diesen Bereichen.



Beispiele Wärmeleitung - Isolation

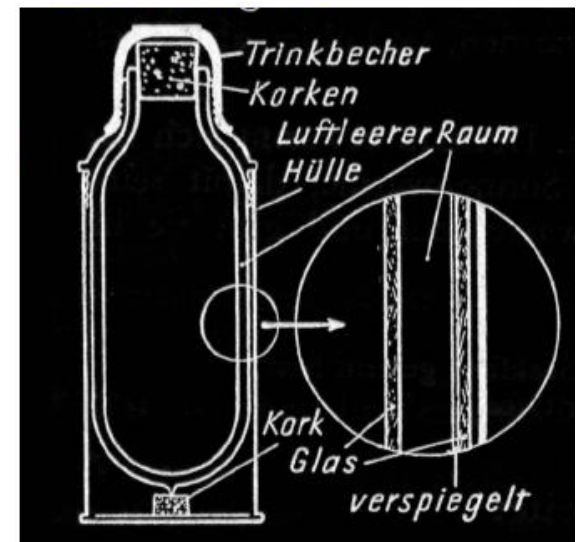
Im Falle der Wärmedämmung (Isolation) muss der Wärmestrom insgesamt beim Wärmedurchgang gering sein, d. h. das zwischen zwei Medien unterschiedlicher Temperatur befindliche Material muss möglichst geringe Wärmeleitfähigkeit aufweisen.

z. B. 30 cm dicken Mauer aus Leichtbeton-Hohlblocksteinen eines Hauses:
 $k = 1,13 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

inklusive Styroporplatten: $k = 0,51 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Die Wärmeleitfähigkeit von Gases ist im Vergleich zu der von Festkörpern und Flüssigkeiten wesentlich kleiner. Bei starker Reduktion des Gasdrucks wird die Wärmeleitung drastisch verringert.

Zur Isolation: Dewar-Gefäß, Thermos-Kanne: doppelter Wandung, deren Zwischenraum evakuiert ist.



Konvektion

Konvektion: Stoff der Wärmemenge Q aufgenommen hat, wird makroskopisch transportiert

Bei Flüssigkeiten und Gasen überwiegt im Allgemeinen der Wärmetransport durch Konvektion den durch Wärmeleitung.

freie Konvektion: wenn lokale Erwärmung auftritt und infolge der damit verbundenen Dichteverringerung, die erwärmten Gebiete aufsteigen und dafür kältere Materie nachströmt

erzwungene Konvektion: wenn die Bewegung durch äußeren Kräfte erzwungen wird (z. B. Druckdifferenzen, Umwälzpumpe)

Beispiele freie Konvektion:

- Heizung im Raum
- Bei einem von seinem Boden her erwärmten Behälter mit einer Flüssigkeit (allein durch Wärmeleitung kein effizienter Wärmeübertrag)
- Schutz für Auskühlung durch Unterdrückung der Konvektion: Kleidung, Taucheranzug

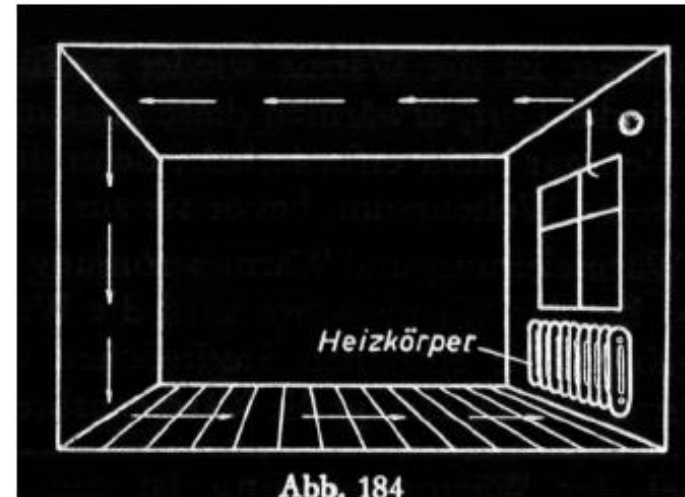


Abb. 184

Wärmestrahlung

Wärmestrahlung: Wärmeaustausch zwischen Körpern durch Emission oder Absorption elektromagnetischer Strahlung.

(kann auch im Vakuum stattfinden, z. B. Strahlung der Sonne)

Sie enthält je nach Temperatur des Körpers oder seiner Umgebung entsprechend hohe Anteile von infrarotem, sichtbarem und ultraviolettem Licht.

Beachte: im Gegensatz zu den beiden bisher besprochenen Wärmeübertragungsmechanismen existiert Wärmetransport durch Strahlung aber sowohl von warm nach kalt als auch von kalt nach warm.

Der Nettowärmestrom (die Differenz beider Wärmeströme) erfolgt stets in Richtung zum Körper mit der tieferen Temperatur.

Wenn zwischen zwei Körpern keine Temperaturdifferenz besteht dann emittiert und absorbiert jeden Körper gleich viel Strahlungsenergie (thermisch Gleichgewicht)

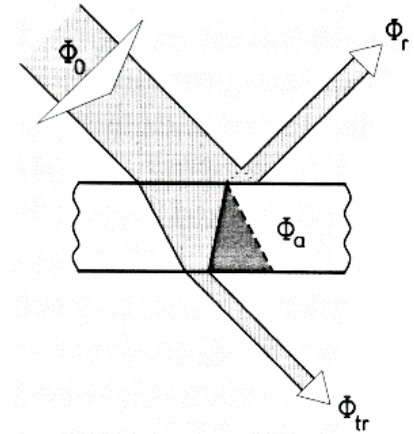
Wärmestrahlung

Die auf einem Körper treffende Strahlung wird jedoch nur zum Teil absorbiert, der übrige Anteil wird reflektiert oder gegebenenfalls durchgelassen.

Reflexionsgrad: $\varrho(\lambda) = \frac{\Phi_r}{\Phi_0}$

Absorptionsgrad: $\alpha(\lambda) = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}$

Transmissionsgrad: $\tau(\lambda) = \frac{\Phi_{tr}}{\Phi_0}$



Beachte: diese Grade sind von der Wellenlänge λ der auftretenden Strahlung und vom Material abhängig

Energieerhaltungssatz: $\Phi_0 = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_{tr}$ $1 = \varrho + \alpha + \tau$

weißen Körper: ein idealer Körper der vollständig reflektiert, $\varrho = 1$ ($\alpha = \tau = 0$)

schwarzen Körper: ein Körper, der sämtliche auftreffende elektromagnetische Strahlung unabhängig von der Frequenz (bzw. Wellenlänge) und der Temperatur absorbiert, $\alpha = 1$ ($\varrho = \tau = 0$)

Wärmestrahlung: schwarzen Strahlers

Als experimentell sehr gute Näherung eines schwarzen Körpers gilt ein abgeschlossener Hohlraum mit einer kleinen Öffnung, in einer der den Hohlraum begrenzenden undurchsichtigen Wand, deren Querschnittsfläche klein gegenüber der gesamten Innenfläche des Hohlraums ist.

Elektromagnetische Strahlung, die durch die Öffnung von außen in den Hohlraum eindringt, wird infolge vielfacher Reflexion an den absorbierenden Innenflächen des Hohlraums so weit abgeschwächt, dass keine Strahlung mehr die Öffnung verlässt.

Wenn die Wände des Hohlraums auf gleiche Temperatur T gebracht werden, sodass die Öffnung als Strahlquelle wirkt, haben wir einen schwarzen Körper mit den größten Emissionsgrad ε .

Bei gegebener Frequenz bzw. Wellenlänge λ und Temperatur T hat somit der schwarze Körper als idealer Strahler die maximal mögliche spezifische Ausstrahlung und wird als **schwarzer Strahler** bezeichnet und die von ihm emittierte Strahlung als **schwarze Strahlung**.

(Unabhängig vom Material und Oberflächenbeschaffenheit des strahlenden Hohlraums)

Wärmestrahlung: schwarzen Strahlers

Stefan-Boltzmann Strahlungsgesetz für einen schwarzen Strahlers:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

P = Strahlungsleistung, Einheit W

T = Temperatur

A = Oberfläche

σ = Stefan-Boltzmann konstante = $5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

Die Ausstrahlung eines realen (nichtscharzen) Körpers ist stets geringer als die des Schwarzen Strahlers bei gleiche Wellenlänge und Temperatur.

Abgegebene Strahlung eines realen Strahlers:

$$P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

ε = Emissionsgrad ($\varepsilon = 1$: schwarzer Strahler)

Wärmestrahlung: Planck'sches Strahlungsgesetz

Die von der Oberfläche eines Warmen Körpers (Temperatur $T > 0$) emittierte elektromagnetische Strahlung zeigt eine charakteristische Wellenlängenabhängigkeit. Die Strahlung eines schwarzen Körpers folgt dem Planck'schen Strahlungsgesetz

Die spektrale Verteilung der (von einem Flächenelement dA in den Raumwinkel $d\Omega$ emittierten) Strahlungsleistungsdichte des schwarzen Körpers:

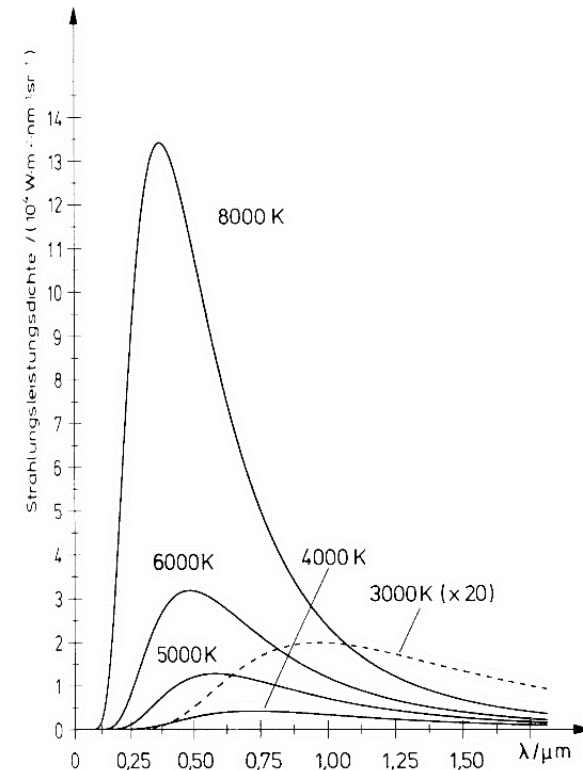
Die Gesamtstrahlungsleistung der emittierten Schwarze Strahlung bei einer Temperatur T entspricht dem Flächeninhalt.

Die Gesamtstrahlungsleistung wächst mit steigender Temperatur, wobei sich das Maximum der jeweiligen T -Kurve mit steigender Temperatur des schwarzen Körpers zu kürzeren Wellenlängen hin verschiebt.

Wien'sche Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} \cdot T = b$$

$$b \approx 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

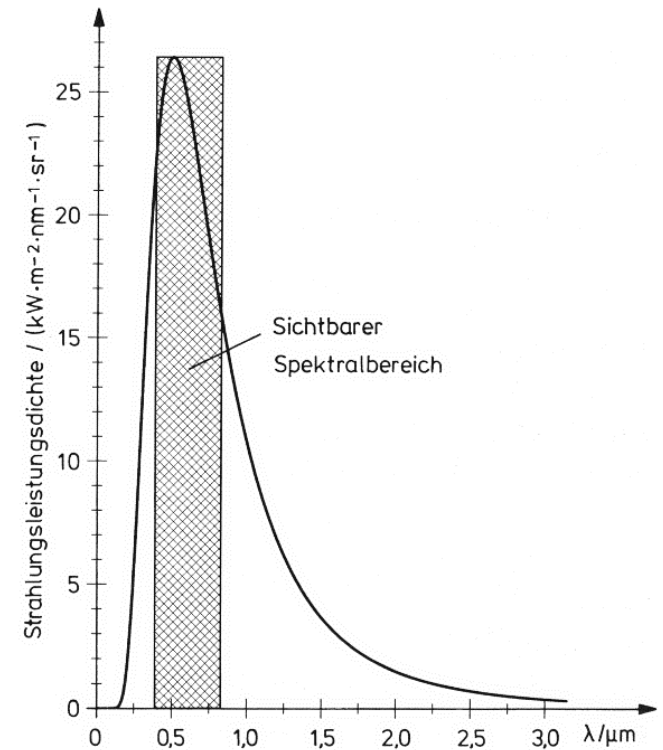


Strahlung

Bei normaler Körpertemperatur (Hauttemperatur ≈ 306 K) liegt das Maximum der Eigenstrahlung des Menschen bei $\lambda_{max} \approx 9,5$ μm .

Ein Körper mit einer Oberflächentemperatur von $T = 1000$ K: $\lambda_{max} \approx 1$ μm
Für das menschliche Auge bereits erkennbar: auch genügend Strahlungsintensität im sichtbaren Spektralbereich emittiert, denn der Körper beginnt augenscheinlich mit schwacher Rotglut zu glühen.

Die Sonne besitzt ihr Strahlungsmaximum bei $\lambda_{max} \approx 500$ nm, d. h. die mittlere Oberflächentemperatur der Sonne beträgt demnach $T \approx 5800$ K



Diffusion

Ganz allgemein treten **Transporterscheinungen** auf, wenn ein räumliches Ungleichgewicht vorhanden ist, wie z. B. ein **Temperaturgefälle** oder ein **Teilchenkonzentrationsgefälle** oder bei elektrischen Ladungsträgern ein elektrisches Potentialgefälle

Die entstehenden Ströme von Energie, Teilchen oder Ladungen sind stets so gerichtet, dass der **vorliegenden Gradient abgebaut** wird.

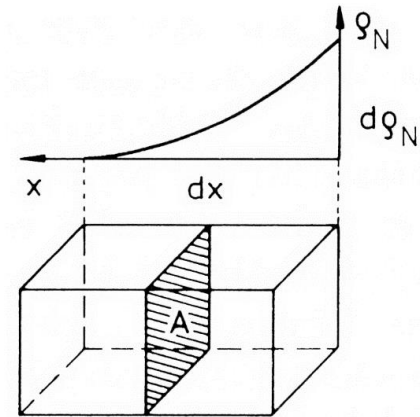
Bei der **Diffusion** findet somit ein **orientierter Massentransport** statt, der dafür sorgt, dass ein vorhandenes räumliches **Konzentrationsgefälle ausgleicht**.

Die Diffusion ist ein **irreversibler Prozess**, ähnlich wie die Wärmeleitung

Zahlreiche der Gesetzmäßigkeiten sind für alle drei Aggregatzustände gültig, insbesondere gilt das **erste Fick'sche Gesetz** ebenso wie das **zweite Fick'sche Gesetz**.

Diffusion

Betrachte: Quaderförmiges Gefäß, das zunächst durch eine Trennwand in zwei Kammern unterteilt ist, die bei gleicher Temperatur mit zwei Gasen gefüllt sind, wobei die Dichte einer Gassorte in der Rechten Kammer größer ist.



Entfernen wir die Wand, so durchmischen sich die beiden Gase spontan, beruhend auf der statistischen ungerichteten Brown'schen Bewegung ihrer diffundierenden Teilchen bis die Durchmischung vollständig ist.

Da die angestellten Überlegungen für beide Gase gelten, genügt es, die Diffusion eines der Gase zu beschreiben.

Da die Teilchenanzahldichte ρ_N rechts größer als links ist, fließt ein Teilchenstrom von rechts nach links.

Für den Teilchenstrom dN/dt gilt das **1. Fick'sche Gesetz**:

$$\frac{dN}{dt} = -D \cdot A \cdot \frac{d\rho_N}{dx}$$

Diffusion

Der Proportionalitätsfaktor D ist der Diffusionskoeffizient, Einheit: $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

$$D_{\text{Gas}} > D_{\text{Flü}} > D_{\text{Fest}}$$

Mit den Definitionen der Stoffmenge n und der Stoffmengenkonzentration c der betrachtete Komponente des Gasgemisches wird das 1. Fick'schen Gesetzes:

$$\frac{dn}{dt} = -D \cdot A \cdot \frac{dc}{dx}$$

Die Diffusion ist dann beendet, wenn ein völliger Ausgleich aller stoffmengenkonzentrationen bzw. Teilchenzahldichten im gesamten Volumen erreicht ist.

Das 1. Fick'sches Gesetz beschreibt die Diffusionserscheinung nicht vollständig (nur an einem bestimmten Ort x), denn der Diffusionsstrom ändert die Stoffmengenkonzentration als Funktion der Zeit.

Beschreibung des Diffusionsvorgangs unter Berücksichtigung der Orts- und Zeitabhängigkeit erfolgt mit dem 2. Fick'schen Gesetz:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$