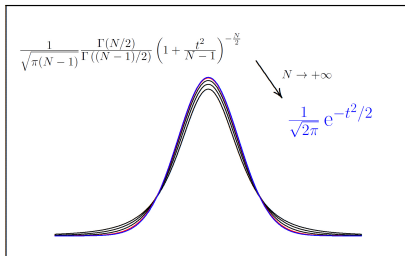
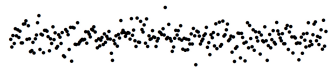


Messabweichungen im physikalischen Experiment



Systematisch Abw.	Verteilung	Zufällige Abw.	Fortpflanzung von Abw.	Regression	Stationarität	Rechenhilfe
○	○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○○	○	○

- 1 Systematisch Abw.
 - Beispiele
- 2 Verteilung
 - Empirische Verteilung und Boxplot
 - Zahlenbeispiel
- 3 Zufällige Abw.
 - Rechenvorschrift
 - Erweiterungsfaktoren $k_{p,N}$
 - Normalverteilung (Gauß-Verteilung)
 - t-Verteilung (Student-Verteilung)
 - Zahlenbeispiel (Fortsetzung)
 - Länge der Messreihe
- 4 Fortpflanzung von Abw.
 - Gaußsche Fehlerfortpflanzung
 - Größtfehlerfortpflanzung, linear
 - Größtfehlerfortpflanzung, nichtlinear
 - Fortpflanzung relativer Messabweichungen
- 5 Regression
 - Regression vs. Interpolation
 - Beispiel: Regression
- 6 Stationarität
 - Stationarität und Unabhängigkeit
- 7 Rechenhilfe
 - CASIO CLASSPAD



Beispiele

... treten auf, wenn eine Größe regelmäßig zu groß oder zu klein gemessen wird.

Beispiel 1: Fehljustierung um den Wert Δ_{sys}

Korrektur:

$$y_n = x_n - \Delta_{\text{sys}}$$

Δ_{sys} hat ein Vorzeichen + oder -

Beispiel 2: Mit Faktor a verzerrte Messskale

Korrektur:

$$y_n = a^{-1} \cdot x_n$$

Δ_{sys} hat ein Vorzeichen + oder -

Beispiel 3: nichtlinear verzerrte Messskale

Korrektur: Kalibrierkurve $y_n = f(x_n)$

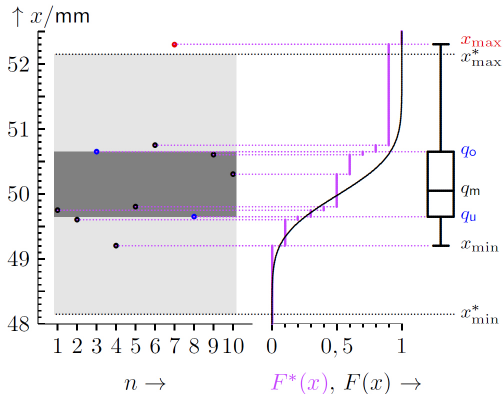
Präzision: Beispiel Messschieber 0,05 mm

indirekte Messung:

Näherungen in der Theorie führen zu syst. Abweichungen

Beispiel Massebestimmung: $m = G/g$, mit $g = ?$

Empirische Verteilung und Boxplot



Zahlenbeispiel

n	1	2	3	4	5
r_n	4	2	8	1	5
x_n / mm	49,75	49,60	50,65	49,20	49,80
n	6	7	8	9	10
r_n	9	10	3	7	6
x_n / mm	50,75	52,30	49,65	50,60	50,30

Längenmessungen

Messschieber-Präzision 0,05 mm

Extremwerte

kleinster Wert: $x_{\min} = x_4 \Rightarrow \text{Rang } r_4 = 1$ größter Wert: $x_{\max} = x_7 \Rightarrow \text{Rang } r_7 = 10 = N$

Quartile

 $q_u = x_8$ und $q_o = x_3$.

Quelle: Computersimulation

- normalverteilte Werte,
- (wahrer) Mittelwert $\mu = 50 \text{ mm}$ und Standardabweichung $\sigma = 0,5 \text{ mm}$
- Rundung auf ganzzahlige Vielfache der Präzision
- Ausreißer x_7 willkürlich eingefügt

1 Mittelwert der Einzelmessung:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

2 Standardabweichung der Einzelmessung:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\bar{x} - x_n)^2}$$

3 Standardabweichung des Mittelwertes:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

4 Erweiterter Vertrauensbereich zur Konfidenz p :

$$\bar{x} \pm \Delta x, \quad \text{mit } \Delta x = k_{p,N} \cdot s_{\bar{x}}$$

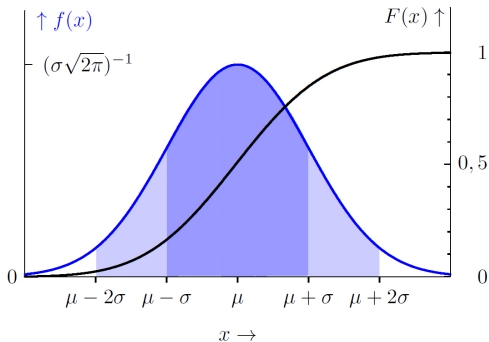
Erweiterungsfaktoren $k_{p,N}$

N	normalverteilte Messwerte				
	p				
	0,683	0,90	0,95	0,98	0,99
4	1,20	2,35	3,18	4,54	5,84
5	1,15	2,13	2,78	3,75	4,60
6	1,11	2,02	2,57	3,36	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,14	3,71
8	1,08	1,89	2,36	3,00	3,50
9	1,07	1,86	2,31	2,90	3,36
10	1,06	1,83	2,26	2,82	3,25
15	1,04	1,76	2,14	2,62	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,54	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,46	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,40	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,36	2,63

N	gleichverteilte Messwerte				
	p				
	0,683	0,90	0,95	0,98	0,99
4	1,15	2,63	3,85	5,98	8,09
5	1,10	2,26	3,15	4,60	5,95
6	1,07	2,07	2,79	3,92	4,93
7	1,06	1,97	2,59	3,52	4,35
8	1,05	1,91	2,46	3,27	3,97
9	1,04	1,87	2,38	3,10	3,71
10	1,04	1,84	2,32	2,98	3,53
15	1,02	1,76	2,17	2,70	3,10
20	1,02	1,73	2,11	2,59	2,94
30	1,01	1,70	2,05	2,49	2,80
50	1,01	1,68	2,01	2,42	2,70
100	1,00	1,66	1,99	2,37	2,64

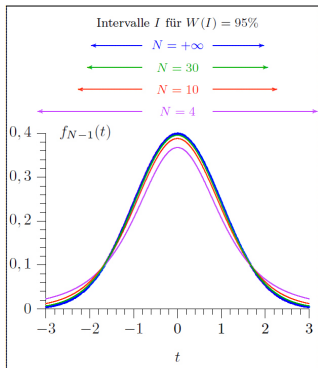
Die Werte der Erweiterungsfaktoren $k_{p,N}$ sind schwarz dargestellt, falls die Unterschiede zwischen normal- und gleichverteilten Werten kleiner als 0,1 also praktisch irrelevant sind, und andernfalls rot.

Normalverteilung (Gauß-Verteilung)



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

t-Verteilung (Student-Verteilung)



$$f_{N-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(N-1)}} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{-N/2}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi}$$

Die t-Verteilungsdichte $f_{N-1}(t)$ geht für viele ($N \gtrsim 30$) Messwerte in die Dichte der Standard-Normalverteilung über:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{N-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Zahlenbeispiel (Fortsetzung)

n	1	2	3	4	5
x_n / mm	49,75	49,60	50,65	49,20	49,80
n	6	7	8	9	10
x_n / mm	50,75	52,30	49,65	50,60	50,30

Auswertung der obigen Messreihe (ohne Ausreißer x_7):

$$\bar{x} = 50,033.. \text{ mm}$$

$$s_x = 0,553.. \text{ mm}$$

$$s_{\bar{x}} = 0,184.. \text{ mm}$$

$$k_{p,N} = 2,31 \quad \text{für } N = 9 \text{ und } p = 0,95$$

$$\Delta x = 0,426.. \text{ mm}$$

Rundung:

- Abweichung Δx auf zwei signifikante Stellen immer aufrunden!
- Mittelwert $\bar{x}$ auf ebenso viele Stellen normal runden!
- Ergebnis:

$$x = (50,03 \pm 0,43) \text{ mm} \quad (95\%)$$

$$x = 50,03(43) \text{ mm} \quad (95\%) \quad \text{kompaktere moderne Schreibweise}$$

Zahlenbeispiel (Fortsetzung)

Ergebnis der Messung ohne Ausreißer: $\bar{x} = 50,03(43) \text{ mm}$ (95%).. **mit** Ausreißer: $\bar{x} = 50,26(65) \text{ mm}$ (95%)wahrer Wert: $x = 50 \text{ mm}$ **wahrer Vertrauensbereich ..**.. der Einzelmessung: $2 \cdot \sigma = 1 \text{ mm}$.. des Mittelwertes für $N = 9$: $2 \cdot \sigma / \sqrt{9} = 0,333 \dots \text{ mm}$.. des Mittelwertes für $N = 10$: $2 \cdot \sigma / \sqrt{10} = 0,316 \dots \text{ mm}$ **wahre Konfidenzen**Ergebnis ohne Ausreißer: $\bar{x} = 50,03(43) \text{ mm}$ (98,89..%)Ergebnis **mit** Ausreißer: $\bar{x} = 50,26(65) \text{ mm}$ (95,91..%)Merke: Angaben zur Konfidenz p nicht überinterpretieren!

Systematisch Abw.	Verteilung	Zufällige Abw.	Fortpflanzung von Abw.	Regression	Stationarität	Rechenhilfe
○	○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ●	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○	○	○

Länge der Messreihe

- Die Länge N der Messreihe bestimmt den Messaufwand.
- Mit wachsendem N wird bei konstanter Konfidenz p das Konfidenzintervall

$$\frac{k_{p,N} \cdot s_x}{\sqrt{N}}$$

immer kleiner, denn s_x konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen einen positiven Wert.

- Wie klein sollte ein Konfidenzintervall werden?
- Es lohnt nur so viele Messwerte $N_{\max}$ zu gewinnen, bis das Konfidenzintervall die Präzision Δ des Messinstrumentes erreicht.

$$\Delta \approx \frac{k_{p,N} \cdot s_x}{\sqrt{N_{\max}}}$$

$$N_{\max} \approx \left(\frac{k_{p,N_{\max}} \cdot s_x}{\Delta} \right)^2$$

- Für die Beispieldaten (ohne Ausreißer) folgt,

$$N_{\max} \approx \left(\frac{2 \cdot 0,55 \text{ mm}}{0,05 \text{ mm}} \right)^2 \lesssim 500$$

Systematisch Abw.	Verteilung	Zufällige Abw.	Fortpflanzung von Abw.	Regression	Stationarität	Rechenhilfe
○	○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	● ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○	○	○

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

gegeben: Mittelwerte $\bar{x}_n$ und Messabweichungen Δx_n

Funktion: $y = f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N)$

gesucht: Messabweichung Δy

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_N} \cdot \Delta x_n \right)^2}$$

Sind die einzelnen Größen x_n normalverteilt,
mit den Mittelwerten $\bar{x}_n$ und den Standardabweichungen Δx_n ,
so ist auch y (näherungsweise) normalverteilt,
mit der Standardabweichung Δy .

Voraussetzung:

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n, \dots, \bar{x}_N) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_N) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_N} \cdot \Delta x_n$$

Ist die Voraussetzung nicht erfüllt, so ist y i.Allg. nicht normalverteilt.

Größtfehlerfortpflanzung, linear

$$\Delta y_g = \sum_{n=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_N} \cdot \Delta x_n$$

Voraussetzung wie bei Gaußscher Fehlerfortpflanzung.

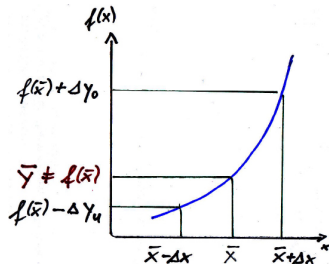
Größtfehlerfortpflanzung, nichtlinear

Fall $N = 1$:

$$\Delta y_o = |f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \Delta x_n)|$$

$$\Delta y_u = |f(\bar{x}) - f(\bar{x} - \Delta x_n)|$$

Voraussetzung:

 $f(x)$ monoton im Intervall $[\bar{x} - \Delta x_n, \bar{x} + \Delta x_n]$ 

Fortpflanzung relativer Messabweichungen

Funktion

$$z(x, y) = a \cdot x^p \cdot y^q$$

a konstant und beliebige reelwertige Exponenten p und q

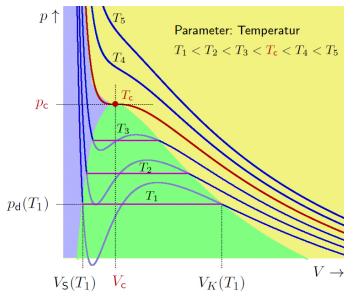
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= p \cdot a \cdot x^{p-1} \cdot y^q = p \cdot \frac{z}{x} \\ \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x &= p \cdot \frac{\Delta x}{x} \end{aligned}$$

Fortpflanzung der relativen Größtabweichungen $\Delta x/x$ und $\Delta y/y$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta z}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \right) \\ &= \left| p \cdot \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| q \cdot \frac{\Delta y}{y} \right| \end{aligned}$$

Beispiel aus Versuch W05 — *Thermische Zustandsgleichung:*

Teilchendurchmesser r_0 von SF_6 als Funktion
der gemessenen kritischen Parameter der Temperatur, T_c , und des Drucks, p_c .



$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{3kT_c}{128\pi p_c}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3k}{128\pi}} \cdot T_c^{1/3} \cdot p_c^{-1/3}$$

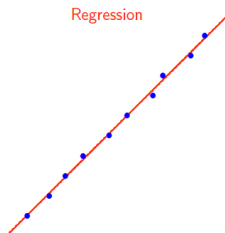
$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta T_c}{T_c} + \frac{\Delta p_c}{p_c} \right)$$

Gegeben:

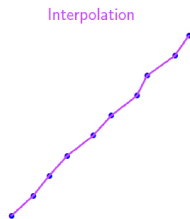
Messwerte-Paare (x_n, y_n) , $n = 1, 2, \dots, N$

Vermutung:

Es gibt einen funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$



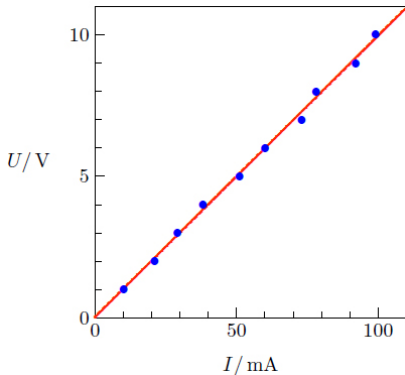
$$y_n \approx f(x_n)$$



$$y_n = f(x_n)$$

Beispiel: Regression

U/V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I/mA	10	21	29	38	51	60	73	78	92	99



Lineare Regression:

$$U = a + b \cdot I$$

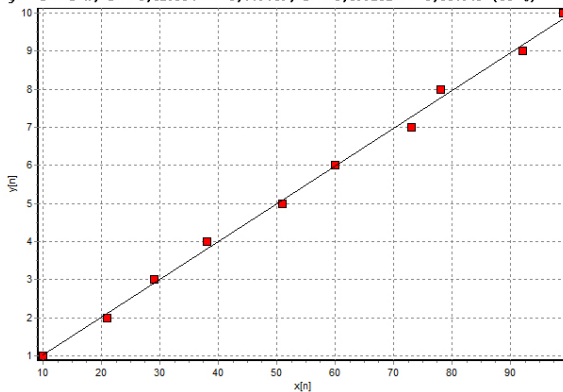
$$a = (0,03 \pm 0,12) \text{ V}$$

$$b = (99,3 \pm 1,9) \Omega$$

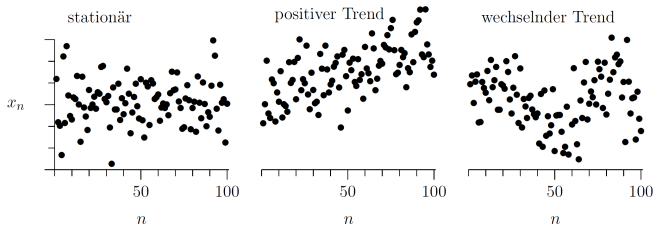
Beispiel: Regression

Ausgabe von Programm regression.exe

15.12.2017 09:02:49

 $y = a + b x$; $a = 0,029551 \pm 0,119109$, $b = 0,099282 \pm 0,001915$ (68 %)

Stationarität und Unabhängigkeit



Stationarität:

Für die Fehleranalyse sind stationäre Messreihen erforderlich.
Für die einzelnen Verteilungsfunktionen F_n der Messgrößen x_n muss also gelten:

$$F_{n_1} = F_{n_2} \quad \text{für alle } n_1, n_2 = 1, 2, \dots, N$$

Unabhängigkeit:

Die Messwerte müssen voneinander unabhängig sein. Für die Verbund-Verteilungsfunktion F der Messgrößen $x_1, x_2, \dots, x_N$ muss also gelten:

$$F = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_N$$

Systematisch Abw.

○

Verteilung

○
○

Zufällige Abw.

○
○
○
○
○
○
○

Fortpflanzung von Abw.

○
○
○
○
○

Regression

○
○
○

Stationarität

○

Rechenhilfe

●

CASIO CLASSPAD



CASIO CLASSPAD