Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald
Institut für Physik

Versuch W8 - Wärmeleitung von Metallen		
Name:	Mitarbeiter:	
Gruppennummer:	lfd. Nummer:	Datum:

1. Aufgabenstellung

1.1. Versuchsziel

Bestimmen Sie die Wärmeleitfähigkeit eines Metallstabes.

Beschäftigen Sie sich mit folgenden Schwerpunkten des Versuches:

- Wärmeleitung, Wärmestrahlung, Konvektion
- Wärmeleitungsgleichung, Fouriersche Ansatz
- Wiedemann - Franz - Gesetz

1.2. Messungen

1.2.1. Messen Sie bei einer Heizspannung von $U = 130$ V die Temperaturen an den vier vorgegebenen Messstellen des Metallstabes alle 10 Minuten bis zur Einstellung des stationären Zustandes. Der Stab hat den Durchmesser $d = (25 \pm 0{,}5)\,\text{mm}$. Zwischen den Temperatur-Messstellen beträgt der Abstand jeweils 120 mm.

1.3. Berechnungen und Auswertungen

1.3.1. Stellen Sie mit den unter 1.2.1. ermittelten Werten für jede Messstelle die Temperatur über der Zeit dar, d.h. $T = f(t)$.

1.3.2. Stellen Sie für den stationären Zustand unter Verwendung der vier Messstellen die Temperaturverteilung längs des Metallstabes, d.h. die Temperatur über der Ortskoordinate $T = f(t)$, dar. Ermitteln Sie die Regressionsgerade.

1.3.3. Bestimmen Sie aus dem Anstieg der unter 1.3.2. dargestellten Regressions-Geraden die Wärmeleitfähigkeit λ des untersuchten Stabmaterials.

1.3.4. Schätzen Sie die Einzelmessfehler ab und berechnen Sie mittels Fehlerfortpflanzungsgesetz die Messunsicherheit $\Delta\lambda$. Vergleichen Sie das experimentelle Ergebnis mit Literaturwerten.

1.3.5. Berechnen Sie unter Anwendung des Wiedemann-Franz-Gesetzes den Wert der elektrischen Leitfähigkeit σ des Metalls bei der Temperatur T = 20°C.

1.4. Zusatzaufgabe

Berechnen Sie die Energie, die nötig ist, um 60 l Wasser von 12°C auf 40°C zu erwärmen, wenn der Elektroboiler einen Wirkungsgrad von 90% hat.

Welchen Energiepreis muss man entrichten, wenn man für 1 kWh 0,3 € ansetzt?

2. Grundlagen

2.1. Wärmeleitung

Wärme ist eine Energieform, die durch *Strahlung*, *Konvektion* und/oder *Wärmeleitung* übertragen werden kann. Der durch Strahlung übertragbare Energieanteil besteht aus elektromagnetischer Strahlung und hängt wesentlich von der Temperatur des Körpers ab (Stefan-Boltzmann-Gesetz). Bei Konvektion wird durch den Stofftransport eines Energieträgers Wärmeenergie von einem Ort zum anderen übertragen (z.B. Warmwasserheizung). Wärmeleitung erfolgt hingegen in ruhender Materie und setzt einen Temperaturgradienten (Temperaturgefälle) voraus.

Ein Temperaturgefälle kann in einem Körper durch lokale Zufuhr von Wärmeenergie und eventuelle Abfuhr in einer *Wärmesenke* aufrechterhalten werden. Unterbricht man die Energiezufuhr, so werden sich Temperaturunterschiede je nach den spezifischen Eigenschaften des Körpers mehr oder weniger schnell durch Wärmeleitung ausgleichen.

Gase leiten die Wärme schon wegen ihrer geringen Dichte besonders schlecht. Im Bereich normaler Drücke und bis herab zu ca. 5000 Pa ist ihre Wärmeleitfähigkeit sogar druckunabhängig. Bei noch geringeren Drücken tendiert die Fähigkeit der Wärmeleitung von Gasen gegen die des Vakuums, nämlich Null. Im Gegensatz zu den Gasen und nichtmetallischen Flüssigkeiten weisen reine Metalle, insbesondere Silber, Kupfer und Aluminium, besonders große Wärmeleitfähigkeiten auf.

Die den Vorgang der Wärmeleitung charakterisierende Größe eines Materials ist die Wärmeleitfähigkeit λ (SI-Einheit W $m^{-1}K^{-1}$), welche durch die Wärmeenergie Q bestimmt ist, die pro Sekunde durch einen Würfel der Kantenlänge 1 m zwischen zwei gegenüberliegenden Seitenflächen tritt, wenn diese eine Temperaturdifferenz von 1 K aufweisen und alle anderen Flächen völlig wärmeundurchlässig sind.

Zur Behandlung von Wärmeleitungsproblemen steht in der Physik die allgemeine Wärmeleitungsgleichung zur Verfügung. Sie beschreibt die zeitliche Änderung einer räumlichen Temperaturverteilung $T(x,y,z,t)$ in einem Medium:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{1}$$

(T – absolute Temperatur, c – spezifische Wärmekapazität, ρ – Dichte des Mediums).

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist schwierig und setzt die genaue Kenntnis der Verteilung der Wärmequellen und -senken sowie der Anfangstemperaturverteilung voraus. Einfacher zu behandeln und messtechnisch zu realisieren sind Experimente unter stationären Bedingungen, d.h. bei denen keine zeitlichen Änderungen mehr auftreten.

Die Vorstellung besteht darin, dass einem zylindrischen Stab der Querschnittsfläche A an einem Ende permanent eine konstante Leistung $P = dQ/dt$ zugeführt und am anderen Ende wieder abgeführt wird. Infolgedessen wird sich in Richtung des Wärmestromes Φ (Wärmemenge, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche fließt) nach einer gewissen Zeit ein zeitlich unveränderliches Temperaturgefälle dT/dx einstellen, dessen Betrag durch Messung der Temperaturdifferenz und des Abstandes der Messstellen bestimmbar ist. Dieser Zusammenhang wird durch den *Fouriersche Ansatz* beschrieben, die Grundlage vieler Messverfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit λ:

$$P = \Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \quad . \tag{2}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich der Wärmestrom eindimensional längs des Stabes (x - Koordinate) ausbreitet und der Stab seitlich adiabatisch isoliert ist.

2.2. Das Wiedemann-Franz-Gesetz

Die elektrische Leitfähigkeit σ (SI-Einheit S m^{-1}) verschiedener Metalle ist bei einer konstanten, nicht zu tiefen Temperatur ihrer Wärmeleitfähigkeit λ annähernd proportional. Es gilt das *Wiedemann-Franz - Gesetz*:

$$\lambda = L \cdot T \cdot \sigma \quad , \tag{3}$$

wobei die Proportionalitätskonstante L als Lorenz-Zahl bezeichnet wird

Eine gute elektrische Leitfähigkeit geht also mit einer guten Wärmeleitfähigkeit einher. Das Verständnis für diesen Zusammenhang lieferte bereits die klassische Elektronentheorie der Metalle, die von Drude und Lorenz erarbeitet wurde. Sommerfeld und Bloch haben diese Theorie auf quantentheoretischer Grundlage weiterentwickelt und verbessert. Der Proportionalitätsfaktor L lässt sich danach durch Elementarkonstanten (Boltzmann-Konstante k und Elementarladung e) ausdrücken, so dass gilt:

$$L = \frac{\lambda}{\sigma \cdot T} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{k^2}{e^2} = 2{,}44 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{V}^2\,\mathrm{K}^{-2} \quad . \tag{4}$$

Dieser Zusammenhang stimmt für zahlreiche Metalle in einem großen Temperaturbereich mit experimentellen Ergebnissen überein.

3. Experiment

3.1. Geräte und Materialien

- Temperaturmessgerät 4-2 von Phywe
- Gleichspannungsnetzgerät Rhode & Schwarz NGK 280
- Stoppuhr
- isolierter Kupferstab mit 4 Messstellen

3.2. Versuchsaufbau

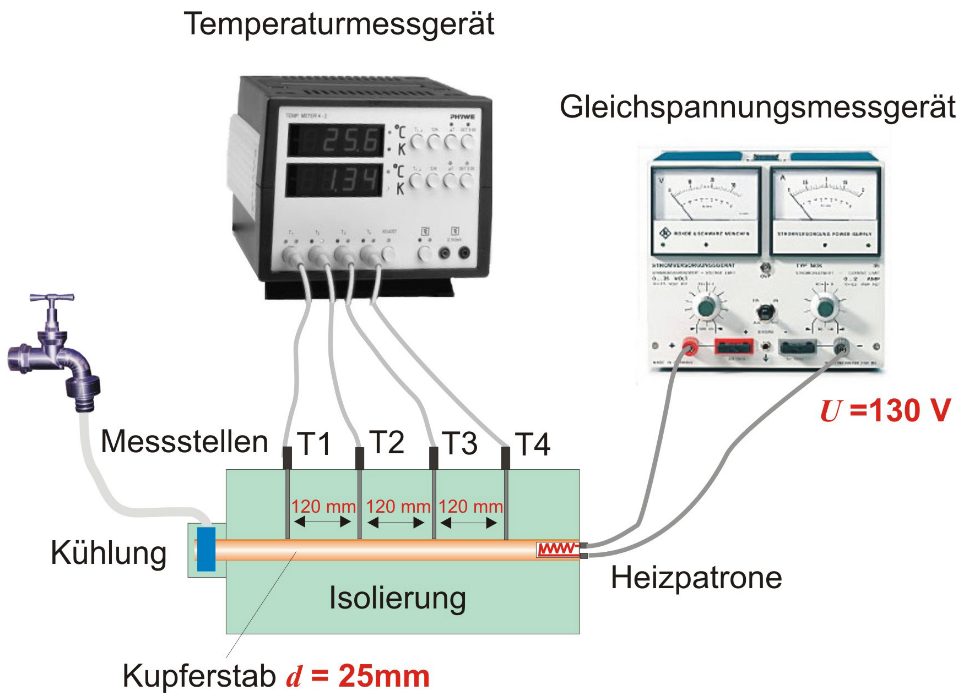

Abb. 1 Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Im vorliegenden Experiment besteht der die Wärmeenergie leitende zylindrische, metallische Stab aus Kupfer. Sein Durchmesser beträgt d = 25 mm. Der Metallstab wird durch eine elektrische Heizpatrone an einem Stabende erwärmt. Dazu sind an dem elektrischen Versorgungsgerät eine Spannung von 130 V einzustellen und der zugehörige Heizstrom abzulesen. Beide Werte ermöglichen die Berechnung der zugeführten elektrischen Leistung. Die Wärmeenergie wird am anderen Stabende durch eine an das Wasserleitungsnetz angeschlossene Kühlung wieder entzogen.

Längs des Stabes kann die Temperatur an vier hintereinanderliegenden Messpunkten mit einem gegenseitigen Abstand von jeweils 120mm gemessen werden (s. Abb. 1). Die Messung erfolgt durch Temperatur-Oberflächen-Messfühler mit digitaler Anzeige (siehe Gerätebeschreibung).

Zum Erreichen des stationären Temperaturgefälles sind mindestens 90 Minuten erforderlich. Beginnen Sie daher rechtzeitig mit dem Experiment. Messen Sie alle 10 Minuten die aktuellen Temperaturwerte T_1, ..., T_4 der vier Messstellen T1 – T4.

3.3. Hinweise zum Experimentieren Auswerten

Die Bestimmung des Wärmestromes geschieht durch Berechnung der elektrischen Leistung, die der Heizpatrone zugeführt wird, d.h. $P = U \cdot I$. Trotz guter Isolation wird diese allerdings nur teilweise auf den Stab übertragen. Darüber hinaus treten am heißen Stabende weitere Wärmeverluste auf. Schätzungsweise sind es daher nur ca. 60% der ursprünglichen Leistung, die dem Stabsystem real zugeführt werden:

$$P_{real} \approx 0{,}6 \cdot U \cdot I \quad . \tag{5}$$

Für den stationären Zustand, d.h. $\Phi = P_{real} = const.$, folgt nach Integration von Gl. (2)

$$\begin{aligned} P_{real} &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} = const. \\ \rightarrow \quad -\lambda \cdot A \cdot (T - T_1) &= P_{real} \cdot (x - x_1) \end{aligned} \tag{6}$$

(T_1 - Temperatur bei $x = x_1$). Die Beziehung erlaubt die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit λ aus den Messdaten mittels linearer Regression. Dazu werden der Koordinatenursprung zweckmäßigerweise in den ersten Messpunkt, d.h. $x_1 = 0$, gelegt und die Temperaturmesswerte über der x - Koordinate im Abstand von 120mm aufgetragen. Mit Gl. (6) folgt

$$T(x) = T_1 - \frac{P_{real}}{\lambda \cdot A} \cdot x = a + b \cdot x \quad \text{d.h.} \quad \lambda = -\frac{P_{real}}{A \cdot b} \tag{7}$$

(b - Anstieg der Regressionsgeraden).Zur Bestimmung der Messunsicherheit $\Delta\lambda$ wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz auf den zweiten Teil von Gl. (7) angewendet:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{P}{A \cdot b} = \frac{4 \cdot 0{,}6 \cdot U \cdot I}{\pi \cdot d^2 \cdot b} \\ \rightarrow \quad \Delta\lambda &= \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial U} \cdot \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial I} \cdot \Delta I\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

4. Literatur

Lehrbücher der Experimentalphysik,
Ulrich Haas: Physik für Pharmazeuten und Mediziner, Wiss. Verlagsgesellschaft mbH
Walcher: Praktikum der Physik, Teubner-Verlag.