Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald
Institut für Physik

Praktikum für Studierende der Umweltwissenschaften **Versuch M14 - Kapillarströmungen**		
Namen:		
Gruppennummer:	lfd. Nummer:	Datum:

1. Aufgabenstellung

1.1. Versuchsziel

Bestimmung der dynamischen Viskosität des Wassers und ihre Temperaturabhängigkeit.

Verschaffen Sie sich Kenntnisse zu folgenden Schwerpunkten des Versuches:

- laminare und turbulente Strömung
- Definition der dynamischen Viskosität
- Gesetz von HAGEN-POISEUILLE, Vergleich mit dem OHMschen Gesetz
- ARRHENIUS-Gesetz
- Beschreibung der Versuchsanordnung

1.2. Messungen

1.2.1. Messen Sie die Volumenstromstärke J von Wasser durch drei Kapillaren gleichen Durchmessers $d_2 \approx$ 2mm jedoch unterschiedlicher Länge ($l \approx$ 0.6m, 1m und 2m) bei Zimmertemperatur. Die Längen sind im konkreten Fall nachzumessen.

1.2.2. Bestimmen Sie J durch drei Kapillaren unterschiedlichen Durchmessers ($d_1 \approx$ 1mm, $d_2 \approx$ 2mm, $d_3 \approx$ 3 mm) jedoch gleicher Länge $l \approx$ 1 m bei identischem Druckunterschied und Zimmertemperatur. Verwenden Sie das bereits unter 1.2.1 erzielte Teilergebnis für $d_2 \approx$ 2mm.

1.2.3. Messen Sie die Volumenstromstärke durch eine Kapillare ($d_2 \approx$ 2mm und $l \approx$ 1m) für drei Druckunterschiede bei Zimmertemperatur. Hierzu kann wieder das bereits unter 1.2.1 erzielte Teilergebnis verwendet werden.

1.2.4. Ermitteln Sie die Volumenstromstärke J durch eine Kapillare ($d_3 \approx$ 3 mm, $l \approx$ 1) bei drei unterschiedlichen Temperaturen (T - Zimmertemperatur, ca. 40°C und 60°C). Hierzu kann das bereits unter 1.2.2 bei Zimmertemperatur erzielte Teilergebnis Verwendung finden.

Beachten Sie die Hinweise zur Versuchsdurchführung in Abschnitt 3.3.2 !

1.3. Auswertungen

1.3.1. Stellen Sie die unter 1.2.1 gewonnenen Werte als $J(l)$ sowie $J(1/l)$ grafisch dar und berechnen Sie die Viskosität η und deren Messunsicherheit $\Delta\eta$ nach Gl. (6).

1.3.2. Fertigen Sie grafische Darstellungen aus den unter 1.2.2 ermittelten Daten für $J(d)$ und $J(d^4)$ an und berechnen Sie η und $\Delta\eta$ nach Gl. (7).

1.3.3. Stellen Sie die Abhängigkeit der Volumenstromstärke vom Pegelunterschied $J(h)$ mit den Daten aus 1.2.3. grafisch dar und berechnen Sie η und $\Delta\eta$ nach Gl. (8).

1.3.4. Erweitern Sie bei den Messungen zu 1.2.4. die Tabelle um die Spalten ln(η) und $1/T$ und zeichnen Sie ein Diagramm, in welchem Sie ln(η) über $1/T$ darstellen. Berechnen Sie die Aktivierungsenergie E_{Akt} mittels linearer Regression.

2. Grundlagen

In diesem Experiment soll die dynamische Viskosität von Wasser auf der Grundlage des HAGEN-POISEUILLEschen Gesetzes bestimmt werden.

2.1. Viskosität

Bei der Modellierung von strömenden Flüssigkeiten und Gasen stellt man sich diese als Schichten bzw. Lamellen vor, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Dabei wirkt zwischen jeweils benachbarten Schichten eine Reibungskraft, infolge dessen ein Teil der Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird. Als Maß für diese innere Reibung definiert man die Viskosität. Sie ist maßgebend dafür, wie gut oder schlecht ein Stoff ein Rohr durchströmt (z.B. Blut durch eine Ader) und welchen Widerstand er einem Körper entgegensetzt, der sich in ihm bewegt**.** Eine Strömung wird als "laminar" bezeichnet, wenn sich die Flüssigkeitsschichten ungestört parallel zueinander bewegen. Kann dieser Zustand nicht aufrecht erhalten werden, so wird die laminare Strömung "turbulent".

Wird eine zwischen zwei Platten befindliche Flüssigkeit durch Verschiebung der einen Platte gegenüber der anderen in Bewegung versetzt, so strömen die entstehen Flüssigkeitslamellen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit (Abb. 1). Auf diese Weise resultiert innerhalb der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsgradient, d.h. zwischen benachbarten Lamellen im Abstand Δx besteht ein Geschwindigkeitsunterschied Δv.

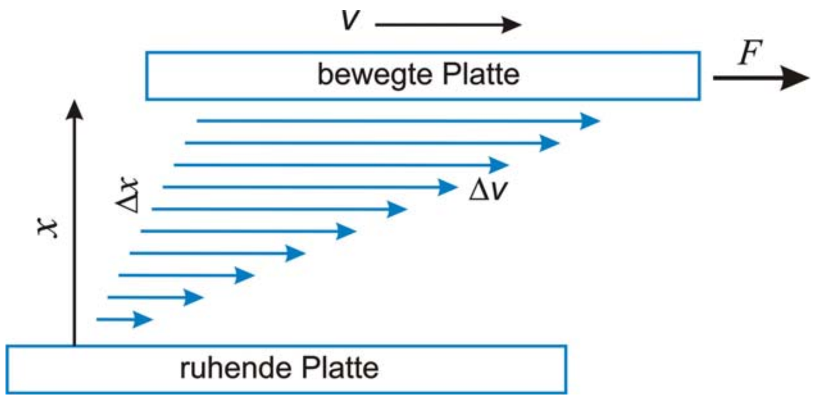

Abb. 1 Strömende Flüssigkeitslamellen zwischen einer ruhenden und einer bewegten Platte.

Durch die innere Reibung wird die schnellere Lamelle gebremst, die langsamere beschleunigt und zwischen ihnen eine Schubspannung $\tau = F/A$ erzeugt. Für diese gilt:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \,. \tag{1}$$

Dabei sind F die angreifende Kraft und A die Plattenfläche. Der Faktor η wird als dynamische Viskosität bezeichnet. Unter Beachtung, dass Pascal Pa = Nm^{-2} die SI-Einheit für den Druck darstellt, gilt für ihre Einheit [η] = Nm^{-2} s = Pa s.

2.2. Das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE

Eine Röhre bzw. Kapillare vom Durchmesser $d = 2\,r$ und der Länge l werde von einer Flüssigkeit der Dichte ρ und der dynamischen Viskosität η durchflossen. Zwischen den Enden der Kapillare herrsche die Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$, d.h. senkrecht zur Rohrquerschnittsfläche A_{Rohr} wirkt auf die Flüssigkeitssäule eine Kraft $F = \Delta p \cdot A_{Rohr}$. Infolgedessen strömt durch die Kapillare in der Zeit Δt ein Flüssigkeitsvolumen ΔV .

Das Verhältnis $J = \Delta V / \Delta t$ wird als Volumenstromstärke bezeichnet. Durch Anwendung von Gl. (1) folgt unter Beachtung der zylindrischen Gestalt des Kapillarrohres das HAGEN-POISEUILLE-Gesetz, welches die Volumenstromstärke in Abhängigkeit von der Druckdifferenz, des Radius bzw. Durchmessers und der Länge des Rohres sowie der Viskosität der Flüssigkeit angibt:

$$J = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot \Delta p}{128 \cdot \eta \cdot l} = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot F}{128 \cdot \eta \cdot A_{Rohr} \cdot l} \quad . \qquad (2)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich in Analogie zum Ohmschen Gesetz der Elektrik interpretieren. Vergleicht man die Volumenstromstärke J mit dem elektrischen Strom I und die Druckdifferenz Δp mit der elektrischen Spannung U, so besteht zwischen dem Kehrwert des Faktors $\pi \cdot d^4 / 128 \cdot \eta \cdot l$ und dem Ohmschen Widerstand R eine entsprechende Analogie (Ohmsches Gesetz $I = U / R$). Der Ausdruck $128 \cdot \eta \cdot l / \pi \cdot d^4$ kann daher als Strömungswiderstand gedeutet werden.

2.1.1. ARRHENIUS-Gesetz

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur meist stark ab. Für viele Flüssigkeiten gilt in guter Näherung das ARRHENIUS-Gesetz:

$$\eta(T) = D \cdot \exp\left(\frac{E_{Akt}}{k \cdot T}\right) \quad . \qquad (3)$$

Hierbei ist D eine Konstante, E_{Akt} eine Aktivierungsenergie, k die BOLTZMANN-Konstante ($k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J/K) und T die absolute Temperatur.

Flüssigkeitsmoleküle sind zwar nicht wie im Festkörper an Ruhelagen fixiert, aber die Verzahnung benachbarter Molekülschichten bedingt Potentialwälle, die um so leichter zu überspringen sind, je höher die Temperatur ist. Demzufolge bedeutet E_A im Wesentlichen die Aktivierungsenergie des Platzwechsels.

3. Experiment

3.1. Geräte und Materialien

- 1 Haltevorrichtung
- 1 Lineal
- 2 Messbecher
- 3 Schläuche unterschiedlicher Durchmesser und Längen
- 1 Spritze mit Aufsatz
- 1 Thermometer
- 1 Wasserkocher (für mehrere Gruppen)
- 1 Stoppuhr
- 1 Thermoskanne mit Eiswasser (für mehrere Gruppen)

Abb. 2 Materialien.

3.2. Versuchsaufbau

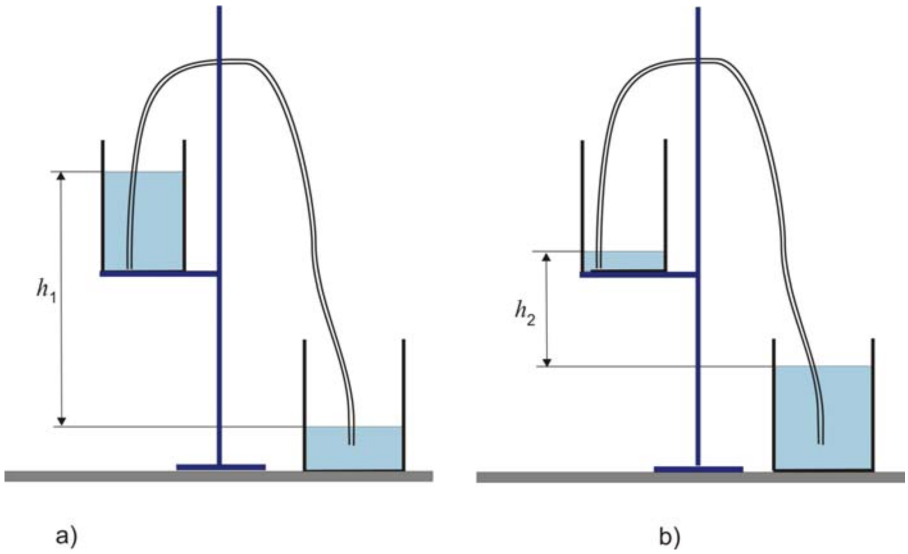

Abb. 3 Schematische Darstellung der experimentellen Anordnung.

3.3. Hinweise zum Experimentieren und Auswerten

3.3.1. Anpassung des Hagen-Poiseulle-Gesetzes

Zur Messung der dynamischen Viskosität η von Wasser dient die in Abb. 3 dargestellte Anordnung. Die den Flüssigkeitsstrom antreibende Kraft wird hier durch das Gewicht des Teiles der Flüssigkeitssäule verursacht, der sich zwischen den Pegelständen der beiden Behälter befindet (s. Abb. 4).

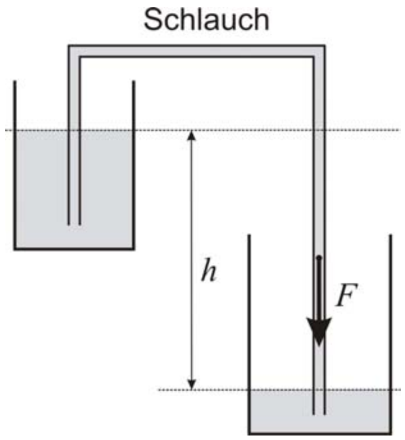

Abb. 4 Zur Beschreibung eines Flüssigkeitsstromes durch einen Schlauch, der zwei in unterschiedlichen Höhen befindliche Behälter verbindet.

Unter Berücksichtigung der Dichte ρ der Flüssigkeit, des Volumens der Flüssigkeitssäule $V_{Flüss}$ und der Fallbeschleunigung g gilt

$$F = m \cdot g = \rho \cdot V_{Flüss} \cdot g = \rho \cdot A_{Rohr} \cdot h \cdot g \quad . \tag{4}$$

(g = 9,81 m/s^2, Dichte von Wasser ρ = 10^3 kg/m^3). Wird diese Beziehung in das Hagen-Poiseuillesche Gesetz Gl. (2) eingesetzt, so folgt:

$$J = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot \rho \cdot g \cdot h}{128 \cdot \eta \cdot l} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{128} \cdot \frac{d^4 \cdot h}{\eta \cdot l} = 240{,}8\, kg\, m^{-2} s^{-2} \cdot \frac{d^4 \cdot h}{\eta \cdot l} \quad . \tag{5}$$

Entsprechend den Aufgabenstellungen 1.2.1 bis 1.2.3 wird die Volumenstromstärke J zunächst in Abhängigkeit von der Länge l, dann vom Durchmesser d und schließlich vom Pegelunterschied h ermittelt. Die Auswertung kann in jedem Fall (A, B, C) durch Anwendung der linearen Regression erfolgen. Dazu wird J entweder als Funktion von $1/l$, von d^4 oder von h dargestellt und die Viskosität η jeweils aus dem mittels Regressionsrechnung bestimmten Anstieg b berechnet werden:

$$J = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4 \cdot h}{\eta} \cdot \frac{1}{l} = a + b_{\mathrm{A}} \cdot x$$

(A) $x = \frac{1}{l}$, $a = 0$ und $b_{\mathrm{A}} = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4 \cdot h}{\eta}$ $\rightarrow$ $\eta = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4 \cdot h}{b_{\mathrm{A}}}$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial b_{\mathrm{A}}} \cdot \Delta b_{\mathrm{A}}\right)^2}$$

(6)

$$J = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot h}{\eta \cdot l} \cdot d^4 = a + b_{\mathrm{B}} \cdot x$$

(B) $x = d^4$, $a = 0$ und $b_{\mathrm{B}} = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot h}{\eta \cdot l}$ $\rightarrow$ $\eta = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot h}{b_{\mathrm{B}} \cdot l}$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial b_{\mathrm{B}}} \cdot \Delta b_{\mathrm{B}}\right)^2}$$

(7)

$$J = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4}{\eta \cdot l} \cdot h = a + b_{\mathrm{C}} \cdot x$$

(C) $x = h$, $a = 0$ und $b_{\mathrm{C}} = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4}{\eta \cdot l}$ $\rightarrow$ $\eta = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4}{b_{\mathrm{C}} \cdot l}$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial b_{\mathrm{C}}} \cdot \Delta b_{\mathrm{C}}\right)^2}$$

(8)

Zur Ermittlung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität wird Gl.(5) nach η umgestellt, d.h.

$$\eta(T) = \frac{240{,}8\,kg\,m^{-2}s^{-2} \cdot d^4 \cdot h}{l} \cdot \frac{1}{J(T)} \quad . \tag{9}$$

Nach Messung der Volumenstromstärke J bei drei unterschiedlichen Temperaturen und Berechnung der entsprechenden Viskositätswerte wird die Aktivierungsenergie E_{Akt} aus dem ARRHENIUS-Gesetz ebenfalls mittels linearer Regression bestimmt:

$$\eta(T) = D \cdot \exp\left(\frac{E_{Akt}}{k \cdot T}\right) \quad \rightarrow \quad \ln \eta(T) = \ln D + \frac{E_{Akt}}{k} \cdot \frac{1}{T} = a + b \cdot x$$

$$x = \frac{1}{T}, \quad a = \ln D \quad \text{und} \quad b = \frac{E_{Akt}}{k} \quad \rightarrow \quad E_{Akt} = k \cdot b \quad . \tag{10}$$

3.3.2. Experimentelles Vorgehen

Das Vorratsgefäß (oberes Gefäß) wird mit Leitungswasser gefüllt und dessen Temperatur T_{Start} unmittelbar vor dem Start des Experimentes gemessen. Daraufhin wird das Vorratsgefäß über die Kapillare mit dem Auffanggefäß verbunden. Diese muss im Vorratsgefäß bis zum Boden und im Auffanggefäß stets bis unter den Wasserspiegel eingetaucht sein, da sich sonst Tropfen bilden, deren Oberflächenspannung eine Verminderung der Druckdifferenz bewirken und das Messergebnis erheblich verfälschen würde. Nachdem der anfängliche Höhenunterschied h_1 der Flüssigkeitspegel (Abb.3a) mittels Lineal gemessen worden ist, kann das Wasser durch die Kapillare fließen (dazu kurz etwas Wasser mit der Spritze ansaugen).

Zur Bestimmung der Viskosität ist das in einem Zeitintervall Δt durchgeflossene Flüssigkeitsvolumen ΔV zu ermitteln. Praktisch wird hierzu eine bestimmten Wassermenge (**mindestens 100 ml**) festgelegt und die für deren Durchfluss resultierende Zeit gemessen. Danach ist der verbliebene Höhenunterschied h_2 (Abb. 3b) zu bestimmen und der Mittelwert

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2} \tag{6}$$

zu berechnen.

Schließlich ist auch die Temperatur T_{Ende} des Wassers im Vorratsgefäß (oberes Gefäß) unmittelbar nach Abschluss der Durchflussmessung zu bestimmen. Die mittlere Wassertemperatur ergibt sich zu

$$T = \frac{T_{Start} + T_{Ende}}{2} \quad . \tag{7}$$

Zur Messung der Volumenstromstärke J bei unterschiedlichen Drücken, entsprechend 1.2.3, werden die erforderlichen Pegelunterschiede durch Verstellen der Höhe des oberen Gefäßes am Stativstab erreicht. Dabei ist zu Beginn zu prüfen, ob die gewählten Gefäßabstände auch für den Einsatz des kürzesten Schlauches geeignet sind. Um außerdem die Durchflusszeiten zu minimieren, dürfen die Pegelunterschiede nicht zu klein gewählt werden. Dies ist insbesondere für den Schlauch mit dem kleinsten Durchmesser $d_1 \approx$ 1mm zu beachten.

Die erforderlichen Wassertemperaturen können mit einem im Praktikumsraum befindlichen Kocher vorbereitet werden.

4. Literatur

Lehrbücher der Experimentalphysik,
Ilberg, Physikalisches Praktikum, Teubner-Verlag,
Walcher, Praktikum der Physik, Teubner-Verlag.